Séminaire DGeCo

Associèdres de graphes et d'édifices

Germain POULLOT

22 octobre 2020

Cône de type des édifices

1. Associaèdre

Cône de type des édifices

1. Associaèdre
   - Familles de Catalan et mutations

Cône de type des édifices

1. Associaèdre
   - Familles de Catalan et mutations
   - Détour par le permutoèdre

Cône de type des édifices

1. Associaèdre
   - Familles de Catalan et mutations
   - Détour par le permutoèdre
2. Associèdres de graphe

Cône de type des édifices

Cône de type des édifices

Cône de type des édifices

1. Associaèdre
   - Familles de Catalan et mutations
   - Détour par le permutoèdre
2. Associèdres de graphe
3. Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
   - Réalisation par les sommets
   - Autres points de vue

Cône de type des édifices

Cône de type des édifices

Cône de type des édifices

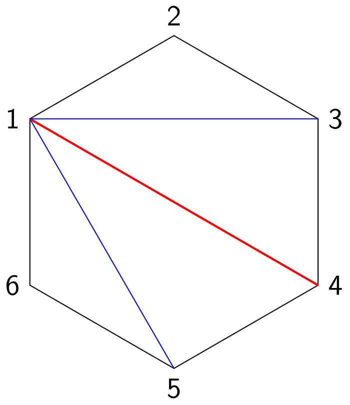
Cône de type des édifices

Séminaire DGeCo

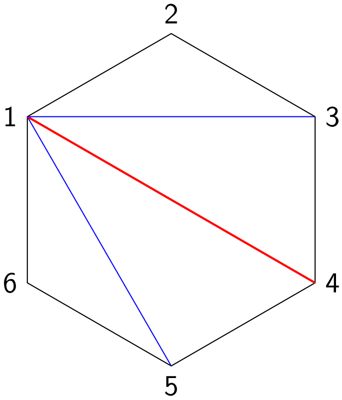
1. Associaèdre
   - Familles de Catalan et mutations
   - Détour par le permutoèdre
2. Associèdres de graphe
3. Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
   - Réalisation par les sommets
   - Autres points de vue
4. Édifices
   - Complexe nidifié
   - Associaèdres d'édifice
5. Transformations d'édifices et d'associaèdres

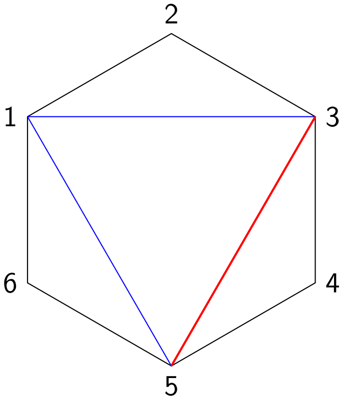
Séminaire DGeCo

Triangulations

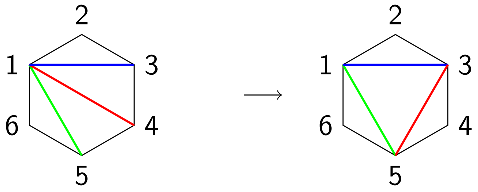


Triangulations

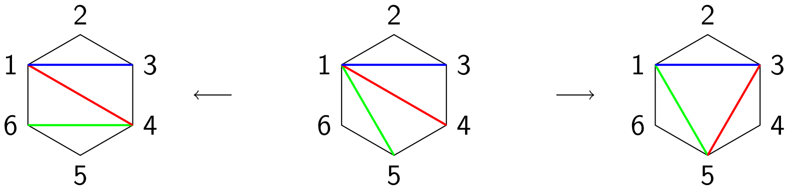




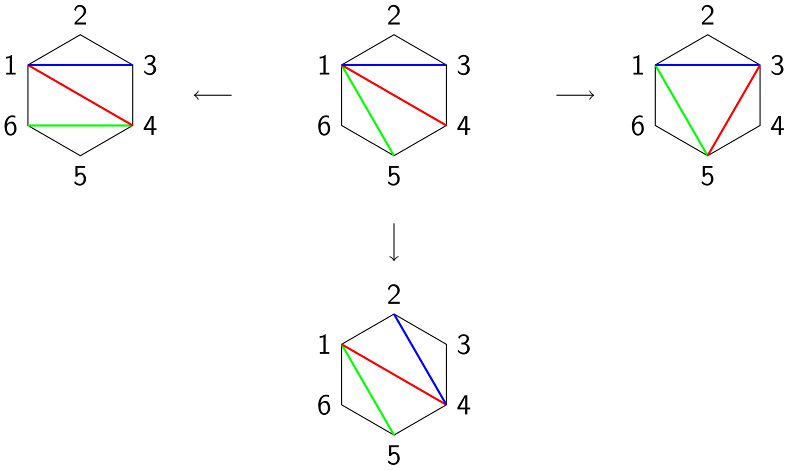
Triangulations



Triangulations



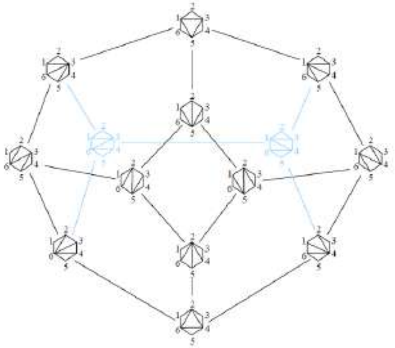
Triangulations



Associaèdres

Associaèdres

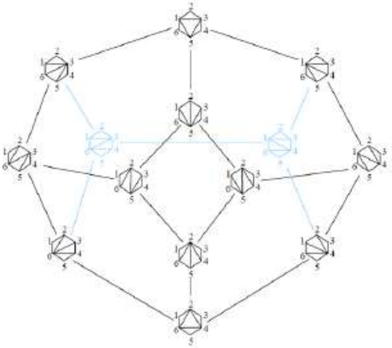
L'*associaèdre* A_n est le polytope dont les sommets correspondent à une famille de Catalan et les arêtes à leur relation de mutation.

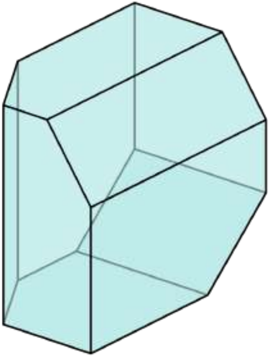


Associaèdres

Associaèdres

L'*associaèdre* A_n est le polytope dont les sommets correspondent à une famille de Catalan et les arêtes à leur relation de mutation.

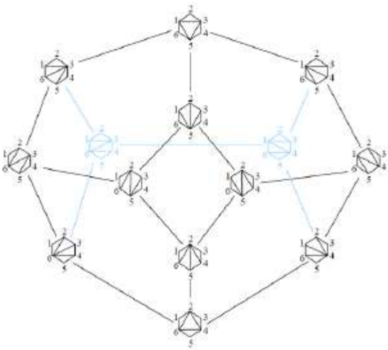


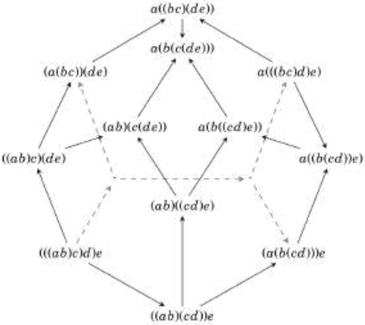


Associaèdres

Associaèdres

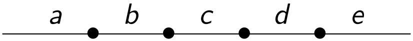
L'*associaèdre* A_n est le polytope dont les sommets correspondent à une famille de Catalan et les arêtes à leur relation de mutation.





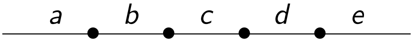
Parenthèsages et chemins

On peut encoder chaque parenthèsage sur le chemin suivant.

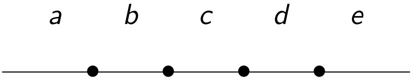


Parenthèsages et chemins

On peut encoder chaque parenthèsage sur le chemin suivant.

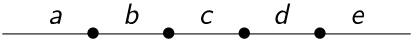


$(ab)((cd)e)$

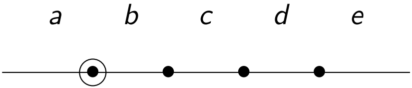


Parenthèsages et chemins

On peut encoder chaque parenthèsage sur le chemin suivant.

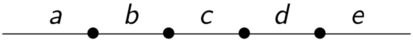


$(ab)((cd)e)$

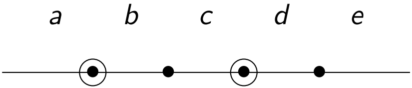


Parenthèsages et chemins

On peut encoder chaque parenthèsage sur le chemin suivant.

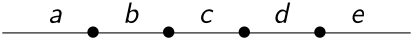


$(ab)((cd)e)$

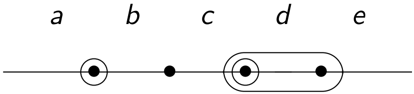


Parenthèsages et chemins

On peut encoder chaque parenthèsage sur le chemin suivant.

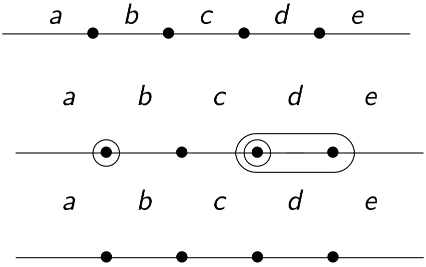


$(ab)((cd)e)$



Parenthèsages et chemins

On peut encoder chaque parenthèsage sur le chemin suivant.

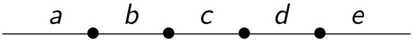


$(ab)((cd)e)$

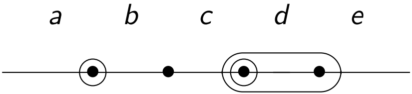
$a((b(cd))e)$

Parenthèsages et chemins

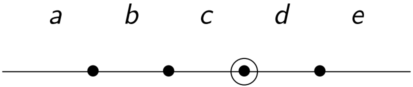
On peut encoder chaque parenthèsage sur le chemin suivant.



$(ab)((cd)e)$

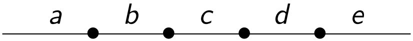


$a((b(cd))e)$

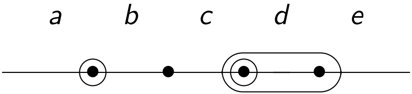


Parenthèsages et chemins

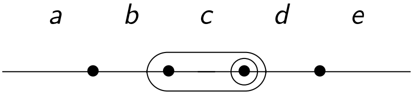
On peut encoder chaque parenthèsage sur le chemin suivant.



$(ab)((cd)e)$

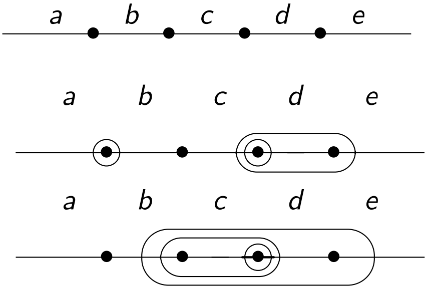


$a((b(cd))e)$



Parenthèsages et chemins

On peut encoder chaque parenthèsage sur le chemin suivant.

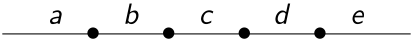


$(ab)((cd)e)$

$a((b(cd))e)$

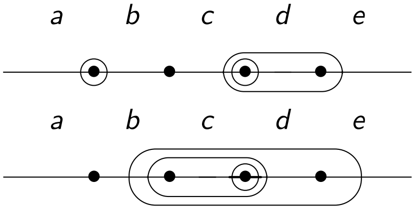
Parenthèsages et chemins

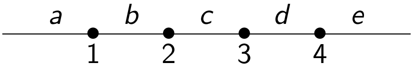
On peut encoder chaque parenthèsage sur le chemin suivant.



$(ab)((cd)e)$

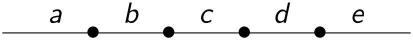
$a((b(cd))e)$



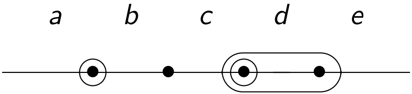


Parenthèsages et chemins

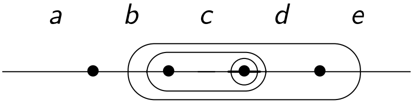
On peut encoder chaque parenthèsage sur le chemin suivant.

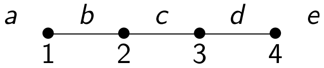


$(ab)((cd)e)$



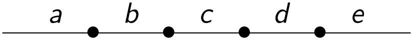
$a((b(cd))e)$



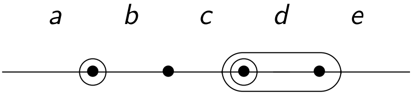


Parenthèsages et chemins

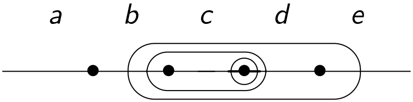
On peut encoder chaque parenthèsage sur le chemin suivant.

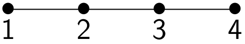


$(ab)((cd)e)$



$a((b(cd))e)$

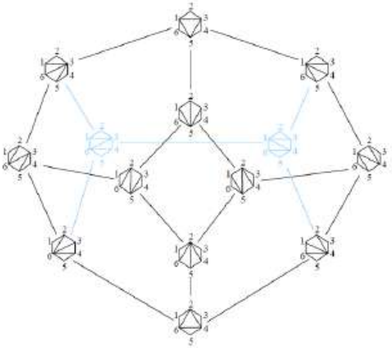


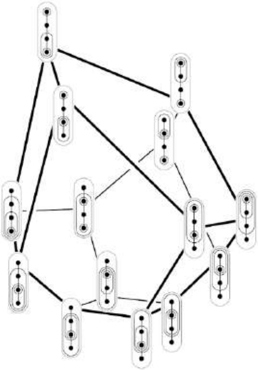


Associaèdres

Associaèdres

L'*associaèdre* A_n est le polytope dont les sommets correspondent à une famille de Catalan et les arêtes à leur relation de mutation.



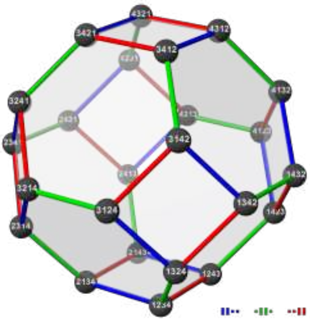


Séminaire DGeCo

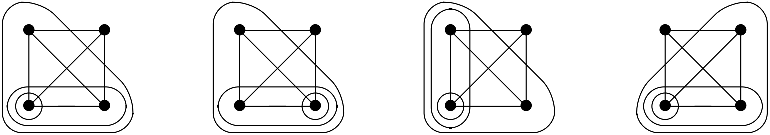
Permutoèdres

Permutoèdres

Le *permutoèdre* P_n est le polytope dont les sommets sont $(\sigma(i))_i$ pour $\sigma \in S_n$.



Permutoèdre



Identité $\sigma = (12)$ $\sigma = (23)$ $\sigma = (34)$

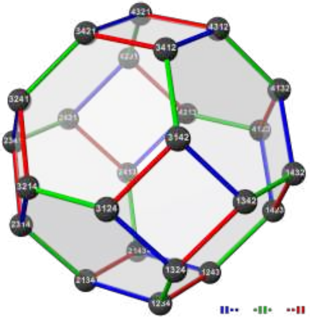
On peut utiliser les éléments de S_n pour effectuer une action sur le schéma de gauche, par une suite de transpositions $(i\ i+1)$.

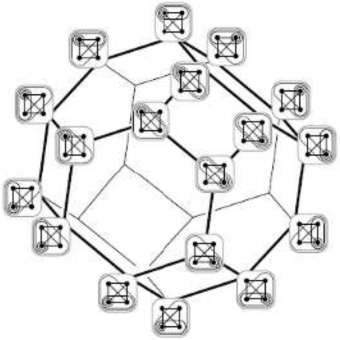
Remarque : (1 2) et (3 4) commutent, et leurs actions aussi.

Permutoèdres

Permutoèdres

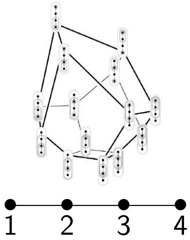
Le *permutoèdre* P_n est le polytope dont les sommets sont $(\sigma(i))_i$ pour $\sigma \in S_n$.

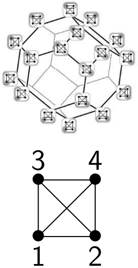


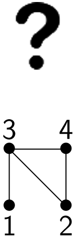


Vers les associaèdres de graphes ?

On peut encoder l'associaèdre en un chemin, et le permutoèdre en le graphe complet. Y a-t-il d'autres polytopes connus réalisables de cette manière ? Peut-on généraliser à un graphe quelconque ?







Séminaire DGeCo

Tubes

Définition (Tube)

Un *tube d'un graphe G* est un sous-graphe induit connexe propre de G.

Tubes

Définition (Tube)

Un *tube d'un graphe G* est un sous-graphe induit connexe propre de G.

L'ensemble des tubes est un ensemble partiellement ordonné (POSET).

Si 2 tubes t_1 et t_2 s'intersectent, alors $t_1 \cup t_2$ est un tube (mais $t_1 \cap t_2$ pas nécessairement).

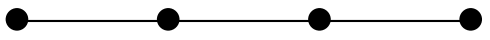
Tubes

Définition (Tube)

Un *tube d'un graphe G* est un sous-graphe induit connexe propre de G.

L'ensemble des tubes est un ensemble partiellement ordonné (POSET).

Si 2 tubes t_1 et t_2 s'intersectent, alors $t_1 \cup t_2$ est un tube (mais $t_1 \cap t_2$ pas nécessairement).



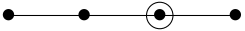
Tubes

Définition (Tube)

Un *tube d'un graphe G* est un sous-graphe induit connexe propre de G.

L'ensemble des tubes est un ensemble partiellement ordonné (POSET).

Si 2 tubes t_1 et t_2 s'intersectent, alors $t_1 \cup t_2$ est un tube (mais $t_1 \cap t_2$ pas nécessairement).



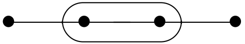
Tubes

Définition (Tube)

Un *tube d'un graphe G* est un sous-graphe induit connexe propre de G.

L'ensemble des tubes est un ensemble partiellement ordonné (POSET).

Si 2 tubes t_1 et t_2 s'intersectent, alors $t_1 \cup t_2$ est un tube (mais $t_1 \cap t_2$ pas nécessairement).



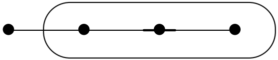
Tubes

Définition (Tube)

Un *tube d'un graphe G* est un sous-graphe induit connexe propre de G.

L'ensemble des tubes est un ensemble partiellement ordonné (POSET).

Si 2 tubes t_1 et t_2 s'intersectent, alors $t_1 \cup t_2$ est un tube (mais $t_1 \cap t_2$ pas nécessairement).



Compatibilité des tubes

Compatibilité des tubes

Deux tubes t_1 et t_2 sont compatibles si :

OU Ils sont nidifiés (i.e. $t_1 \subsetneq t_2$ ou $t_2 \subsetneq t_1$)

OU Ils sont disjoints ($t_1 \cap t_2 = \emptyset$) et non-adjacents ($t_1 \cup t_2$ n'est pas un tube)

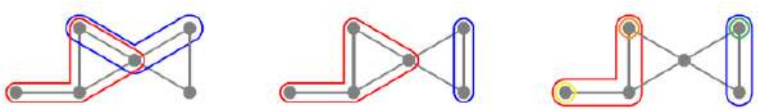
Compatibilité des tubes

Compatibilité des tubes

Deux tubes t_1 et t_2 sont compatibles si :

<u>OU</u> Ils sont nidifiés (i.e. $t_1 \subsetneq t_2$ ou $t_2 \subsetneq t_1$)

<u>OU</u> Ils sont disjoints ($t_1 \cap t_2 = \emptyset$) et non-adjacents ($t_1 \cup t_2$ n'est pas un tube)



Treillis des tubages

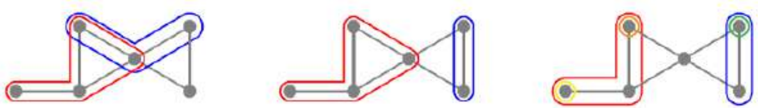
Définition (Tubage)

Un *tubage* d'un graphe G est un ensemble de tubes 2 à 2 compatibles.

Treillis des tubages

Définition (Tubage)

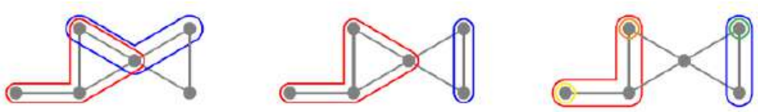
Un *tubage* d'un graphe G est un ensemble de tubes 2 à 2 compatibles.

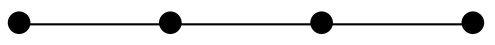


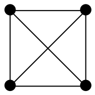
Treillis des tubages

Définition (Tubage)

Un *tubage* d'un graphe G est un ensemble de tubes 2 à 2 compatibles.



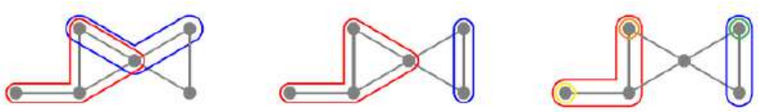


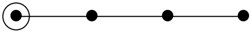


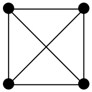
Treillis des tubages

Définition (Tubage)

Un *tubage* d'un graphe G est un ensemble de tubes 2 à 2 compatibles.



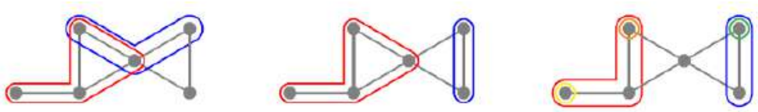


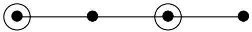


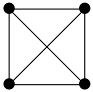
Treillis des tubages

Définition (Tubage)

Un *tubage* d'un graphe G est un ensemble de tubes 2 à 2 compatibles.



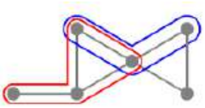


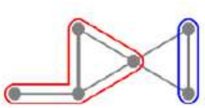


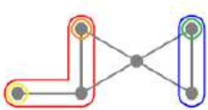
Treillis des tubages

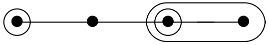
Définition (Tubage)

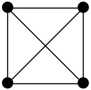
Un *tubage* d'un graphe G est un ensemble de tubes 2 à 2 compatibles.







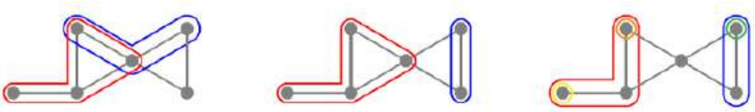


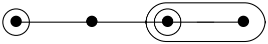


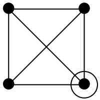
Treillis des tubages

Définition (Tubage)

Un *tubage* d'un graphe G est un ensemble de tubes 2 à 2 compatibles.



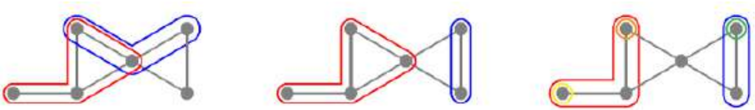


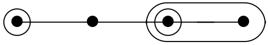


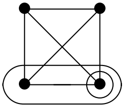
Treillis des tubages

Définition (Tubage)

Un *tubage* d'un graphe G est un ensemble de tubes 2 à 2 compatibles.



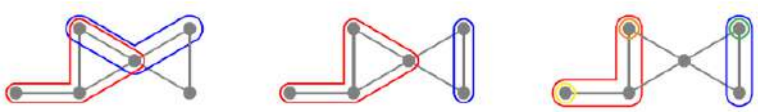


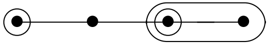


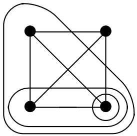
Treillis des tubages

Définition (Tubage)

Un *tubage* d'un graphe G est un ensemble de tubes 2 à 2 compatibles.

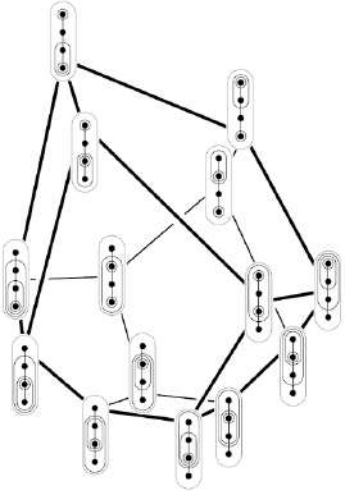






Treillis des tubages

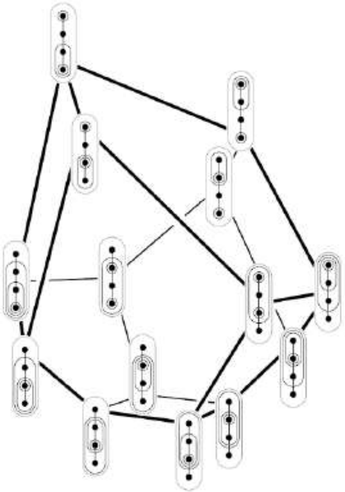
Quel est le treillis de faces de ce polytope ?



Treillis des tubages

Quel est le treillis de faces de ce polytope ?

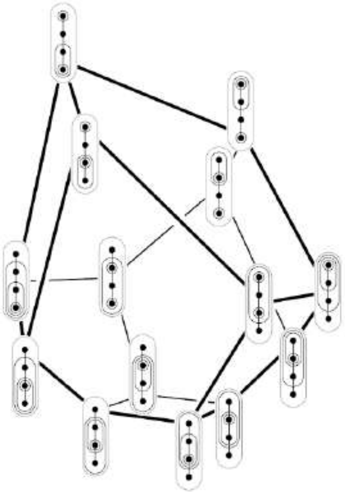
- Sommets $\simeq$ 3-tubages



Treillis des tubages

Quel est le treillis de faces de ce polytope ?

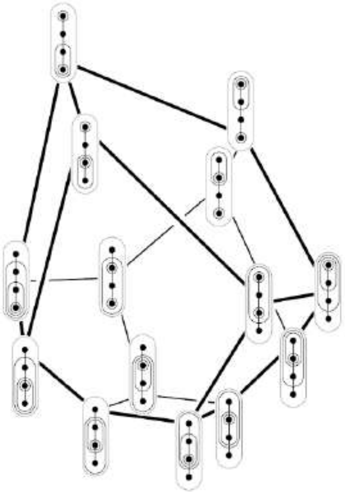
- Sommets $\simeq$ 3-tubages
- Arêtes $\simeq$ 2-tubages



Treillis des tubages

Quel est le treillis de faces de ce polytope ?

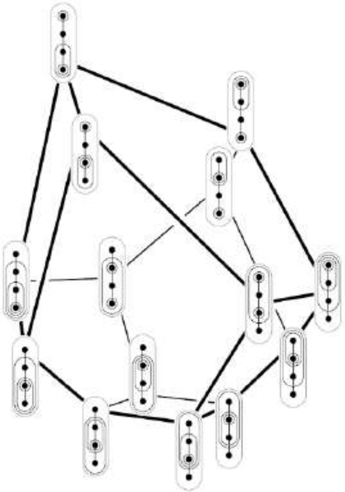
- Sommets $\simeq$ 3-tubages
- Arêtes $\simeq$ 2-tubages
- Faces $\simeq$ 1-tubages



Treillis des tubages

Quel est le treillis de faces de ce polytope ?

- Sommets $\simeq$ 3-tubages
- Arêtes $\simeq$ 2-tubages
- Faces $\simeq$ 1-tubages
- Polyèdre $\simeq$ 0-tubage

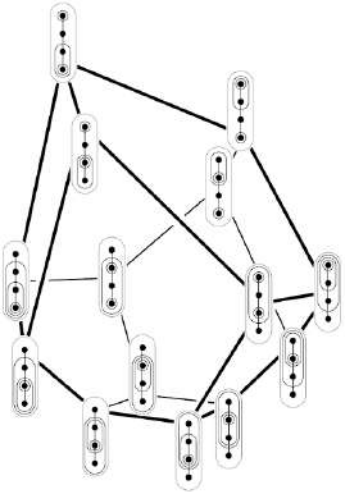


Treillis des tubages

Quel est le treillis de faces de ce polytope ?

- Sommets $\simeq$ 3-tubages
- Arêtes $\simeq$ 2-tubages
- Faces $\simeq$ 1-tubages
- Polyèdre $\simeq$ 0-tubage

$\Rightarrow$ **Isomorphisme de POSET : treillis de faces $\simeq$ treillis des tubages**



Treillis des tubages

L'ensemble des tubages forme un treillis pour l'inclusion [1].

1. Si on ajoute un élément maximal artificiel et un élément minimal correspondant à $\emptyset$.

Treillis des tubages

L'ensemble des tubages forme un treillis pour l'inclusion [1].

Les tubages maximaux ont tous la même taille : $|G| - 1$.

1. Si on ajoute un élément maximal artificiel et un élément minimal correspondant à $\emptyset$.

Treillis des tubages

L'ensemble des tubages forme un treillis pour l'inclusion [1].

Les tubages maximaux ont tous la même taille : $|G| - 1$.

Les tubes sont les atomes du treillis des tubages.

1. Si on ajoute un élément maximal artificiel et un élément minimal correspondant à $\emptyset$.

Treillis des tubages

L'ensemble des tubages forme un treillis pour l'inclusion [1].

Les tubages maximaux ont tous la même taille : $|G| - 1$.

Les tubes sont les atomes du treillis des tubages.

Treillis des tubages

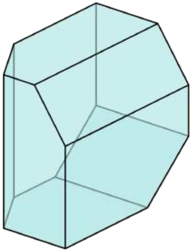
Le treillis (inverse) des tubages du chemin est le treillis de faces de l'associaèdre.
Le treillis (inverse) des tubages du graphe complet est le treillis de faces du permutaèdre.

1. Si on ajoute un élément maximal artificiel et un élément minimal correspondant à $\emptyset$.

Associaèdres de graphe

Associaèdres de graphe

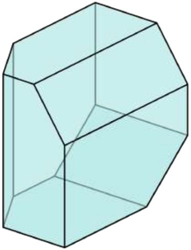
L'*associaèdre d'un graphe G* est le polytope dont le treillis de faces est le treillis (inverse) des tubages du graphe G.

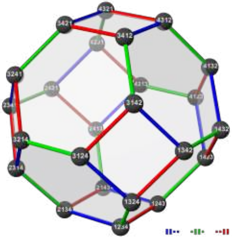


Associaèdres de graphe

Associaèdres de graphe

L'*associaèdre d'un graphe G* est le polytope dont le treillis de faces est le treillis (inverse) des tubages du graphe G.



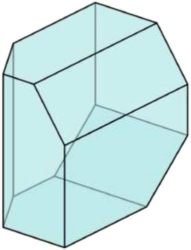


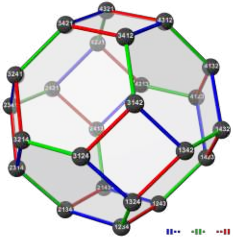
Outre l'associaèdre, on retrouve beaucoup de polytopes connus (permutaèdre,

Associaèdres de graphe

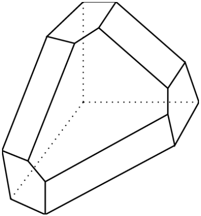
Associaèdres de graphe

L'*associaèdre d'un graphe G* est le polytope dont le treillis de faces est le treillis (inverse) des tubages du graphe G.





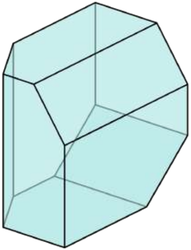
Outre l'associaèdre, on retrouve beaucoup de polytopes connus (permutaèdre, stellaèdre,

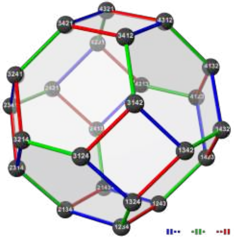


Associaèdres de graphe

Associaèdres de graphe

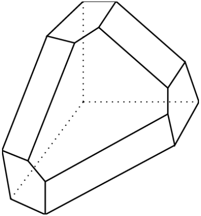
L'*associaèdre d'un graphe G* est le polytope dont le treillis de faces est le treillis (inverse) des tubages du graphe G.

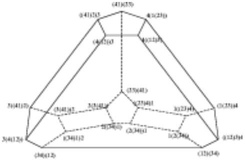




Outre l'associaèdre, on retrouve beaucoup de polytopes connus (permutaèdre, stellaèdre, cycloèdre,...).

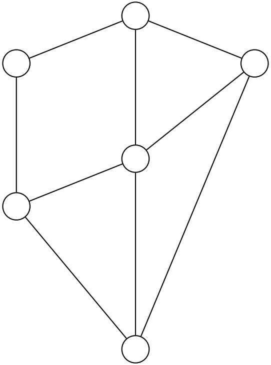
Cf Carr & Devadoss 2004, PPPP19,...





Associaèdres de graphe

Pour un graphe G donné, est-ce qu'il existe un associaèdre de graphe pour G ?
Comment en calculer un explicitement ?



Séminaire DGeCo

Séminaire DGeCo

Augmentation par singleton

Corollaire (Augmentation par singleton)

Soit G un graphe de sommets V. Soit T un tubage maximal d'un graphe G. La fonction φ_T est bijective :

$$\begin{array}{rccc} & T & \longrightarrow & V \\ \varphi_T : & t & \longmapsto & t \setminus \bigcup_{u \in T \ ; \ u \subsetneq t} u \end{array}$$

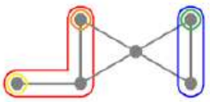
Augmentation par singleton

Corollaire (Augmentation par singleton)

Soit G un graphe de sommets V. Soit T un tubage maximal d'un graphe G. La fonction φ_T est bijective :

$$\begin{array}{rccc} & T & \longrightarrow & V \\ \varphi_T : & t & \longmapsto & t \setminus \bigcup_{u \in T \,;\, u \subsetneq t} u \end{array}$$

Concrètement, dans un tubage maximal, chaque tube peut être identifié par le sommet qu'il est "le premier" à voir (dans ce tubage).



Fonction des sommets

Définition

Pour un tubage maximal T, on définit $f_T : V(G) \to \mathbb{R}_+$ par :

- Si $v \in t$ pour un $t \in T$, alors : $f_T(v) = 0$
- Sinon, soit $t_v = \min\{t \in T ; v \in t\}$: $\sum_{x \in t_v} f_T(x) = 3^{|t(v)|-2}$

Fonction des sommets

Définition

Pour un tubage maximal T, on définit $f_T : V(G) \to \mathbb{R}_+$ par :

- Si $v \in t$ pour un $t \in T$, alors : $f_T(v) = 0$
- Sinon, soit $t_v = \min\{t \in T; v \in t\}$: $\sum_{x \in t_v} f_T(x) = 3^{|t(v)|-2}$

Réalisabilité de l'associaèdre de graphe

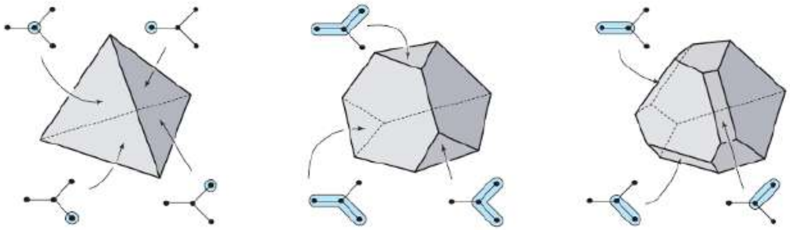
Soit G un graphe avec V ses sommets et $\mathcal{T}_{max}$ l'ensemble de ses tubages maximaux. Alors un associaèdre de G est :

$$\mathrm{Conv}\left\{(f_T(v))_{v \in V} \ ; \ T \in \mathcal{T}_{max}\right\}$$

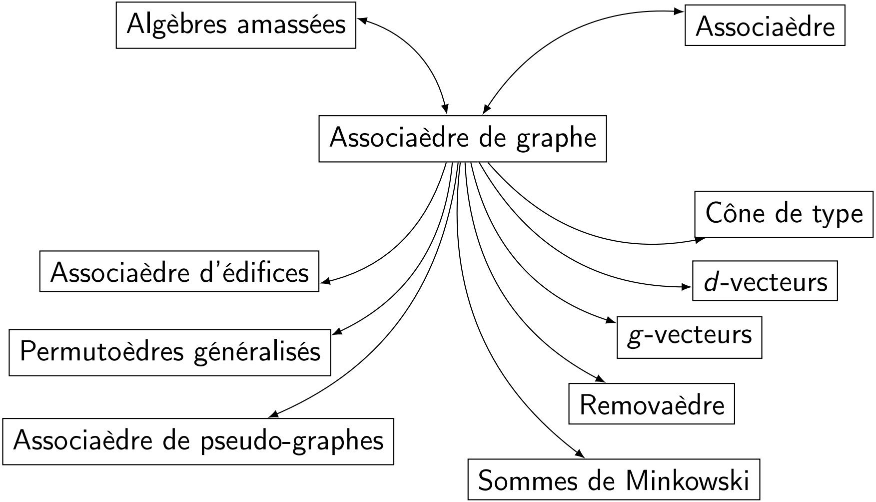
Séminaire DGeCo

Troncations de facettes

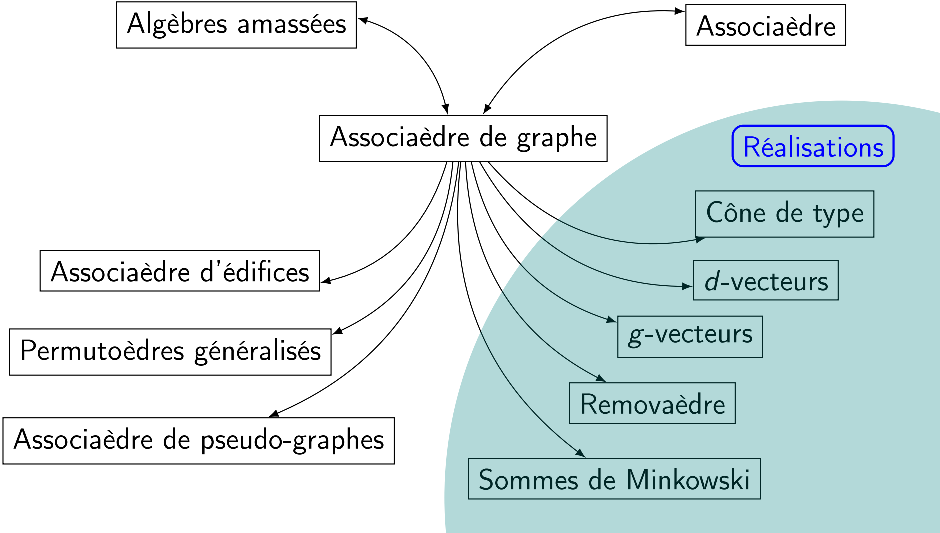
Le procédé de Carr & Devadoss va beaucoup plus loin.



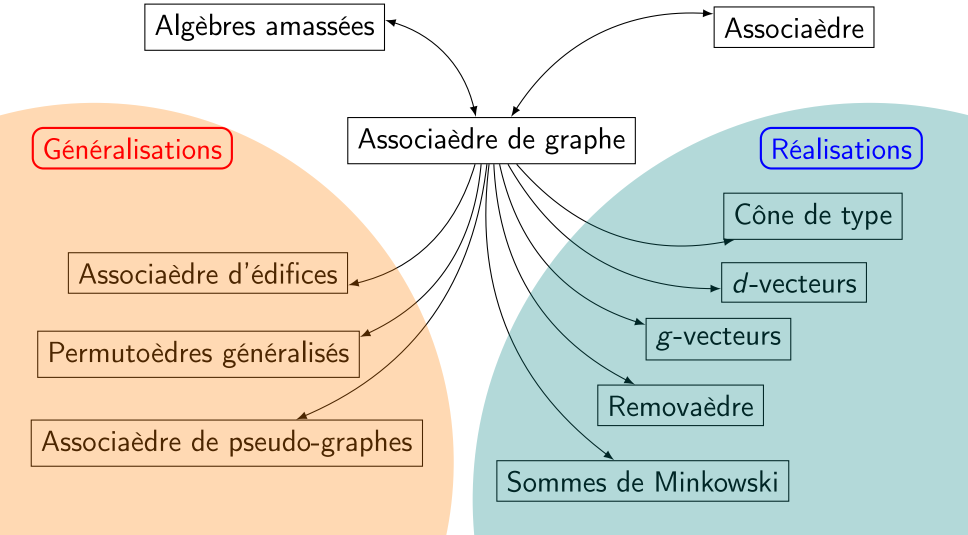
Quelle(s) généralisation(s) ensuite ?



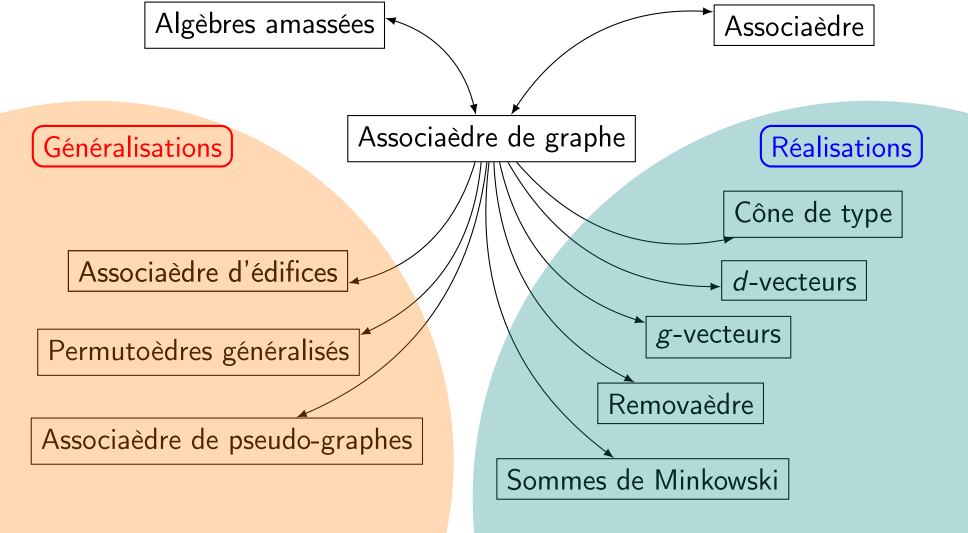
Quelle(s) généralisation(s) ensuite ?



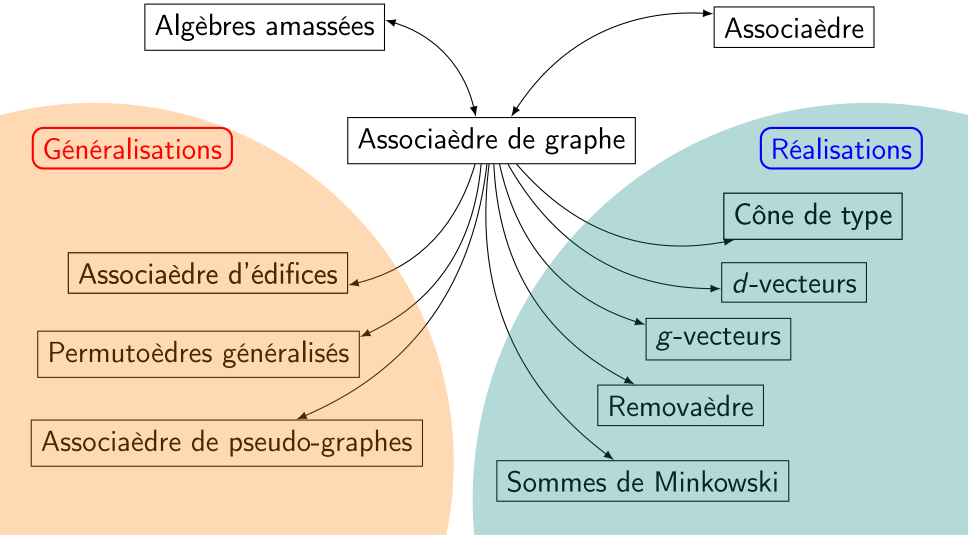
Quelle(s) généralisation(s) ensuite ?



Quelle(s) généralisation(s) ensuite ?



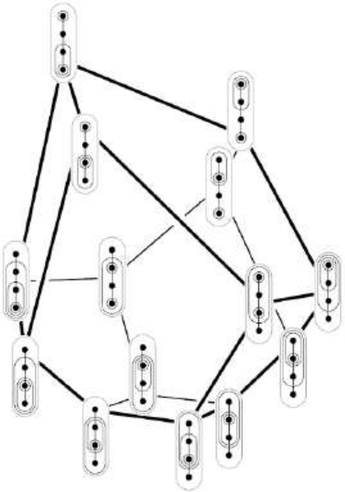
Quelle(s) généralisation(s) ensuite ?



Séminaire DGeCo

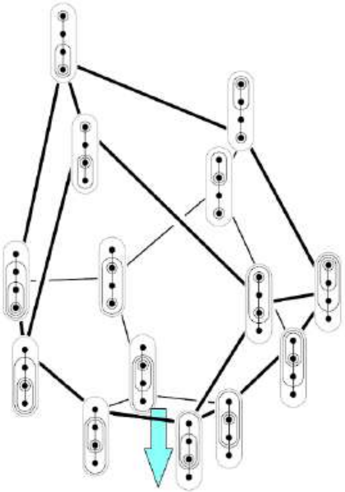
Modification de l'associaèdre de graphe

Lorsqu'on dispose d'un associaèdre de graphe, on pourrait par exemple vouloir "tirer une facette".



Modification de l'associaèdre de graphe

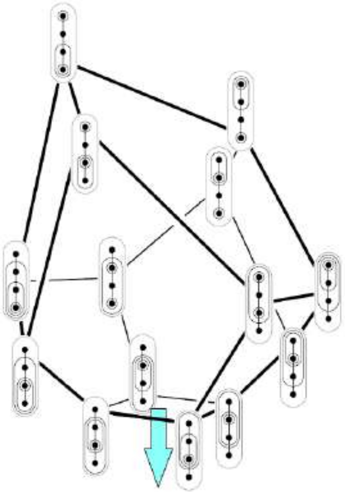
Lorsqu'on dispose d'un associaèdre de graphe, on pourrait par exemple vouloir "tirer une facette".



Modification de l'associaèdre de graphe

Lorsqu'on dispose d'un associaèdre de graphe, on pourrait par exemple vouloir "tirer une facette".

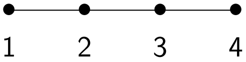
Cela revient à éliminer un tube dans le POSET des tubes.

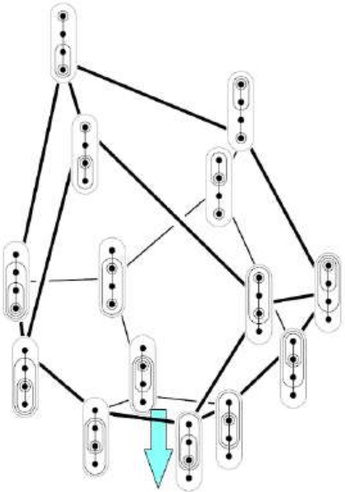


Modification de l'associaèdre de graphe

Lorsqu'on dispose d'un associaèdre de graphe, on pourrait par exemple vouloir "tirer une facette".

Cela revient à éliminer un tube dans le POSET des tubes.

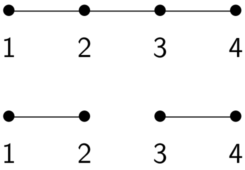


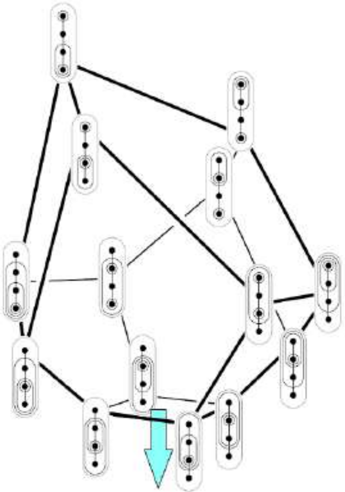


Modification de l'associaèdre de graphe

Lorsqu'on dispose d'un associaèdre de graphe, on pourrait par exemple vouloir "tirer une facette".

Cela revient à éliminer un tube dans le POSET des tubes.

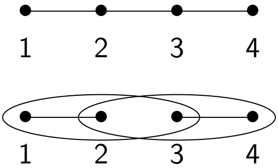


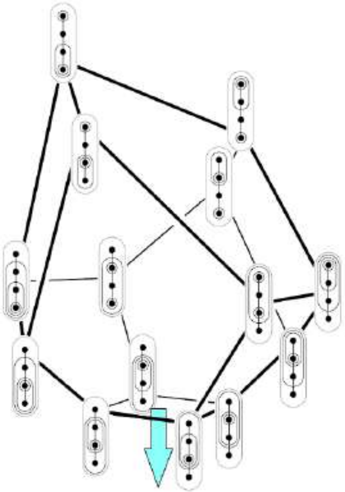


Modification de l'associaèdre de graphe

Lorsqu'on dispose d'un associaèdre de graphe, on pourrait par exemple vouloir "tirer une facette".

Cela revient à éliminer un tube dans le POSET des tubes.





Séminaire DGeCo

Édifices

Définition (Édifices)

Un *édifice* [a] *sur S* est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de S respectant :

- Singletons et connexion : $\forall s \in S,\ \{s\} \in \mathcal{B}$ et $S \in \mathcal{B}$
- Stabilité par réunion : $\forall A, B \in \mathcal{B},\ A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}$

On appellera *blocs* les éléments d'un édifice et *blocs inséparables* les éléments nécessaires pour l'engendrer par réunions non-disjointes.

a. *building set* en anglais

Édifices

Définition (Édifices)

Un *édifice*[a] *sur S* est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de S respectant :

- Singletons et connexion : $\forall s \in S, \ \{s\} \in \mathcal{B}$ et $S \in \mathcal{B}$
- Stabilité par réunion : $\forall A, B \in \mathcal{B}, \ A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}$

On appellera *blocs* les éléments d'un édifice et *blocs inséparables* les éléments nécessaires pour l'engendrer par réunions non-disjointes.

a. *building set* en anglais

Ce POSET correspond au POSET des (hyper)tubes d'un hypergraphe.

Édifices

Définition (Édifices)

Un *édifice*[a] *sur S* est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de S respectant :

- Singletons et connexion : $\forall s \in S,\ \{s\} \in \mathcal{B}$ et $S \in \mathcal{B}$
- Stabilité par réunion : $\forall A, B \in \mathcal{B},\ A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}$

On appellera *blocs* les éléments d'un édifice et *blocs inséparables* les éléments nécessaires pour l'engendrer par réunions non-disjointes.

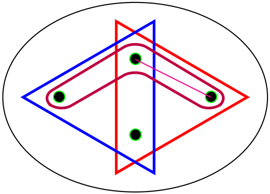
a. *building set* en anglais

Ce POSET correspond au POSET des (hyper)tubes d'un hypergraphe.

Cf Feichtner 2005, Postnikov 2009, Manneville & Pilaud 2015,...

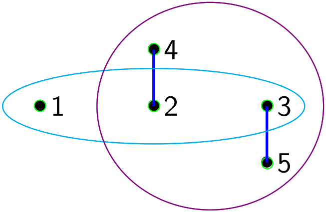
Exemple d'édifice

$S = \{1, 2, 3, 4\}$



$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup \{\{1,2\}; \{1,2,3\}; \{1,3,4\}; \{1,2,4\}\} \cup \{S\}$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$\mathcal{B} = \{\text{singletons}\} \cup \{\{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}\} \cup \{S\}$

Ensembles nidifiés (maximaux)

Définition (Ensemble nidifié)

Un *ensemble nidifié* $\mathcal{N}$ d'un édifice $\mathcal{B}$ est une partie de $\mathcal{B}$ telle que :

- Nidification : $\forall N_1, N_2 \in \mathcal{N},\ N_1 \subseteq N_2$ ou $N_2 \subseteq N_1$ ou $N_1 \cap N_2 = \emptyset$
- Non recouvrement : $\forall k \geq 2, \forall N_1, ..., N_k \in \mathcal{N},\ \forall i \neq j,\ N_i \cap N_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i=1}^{k} N_i \notin \mathcal{B}$.
- Connexion : $S \in \mathcal{N}$

Ensembles nidifiés (maximaux)

Définition (Ensemble nidifié)

Un *ensemble nidifié* $\mathcal{N}$ d'un édifice $\mathcal{B}$ est une partie de $\mathcal{B}$ telle que :

- Nidification : $\forall N_1, N_2 \in \mathcal{N},\ N_1 \subseteq N_2$ ou $N_2 \subseteq N_1$ ou $N_1 \cap N_2 = \emptyset$
- Non recouvrement : $\forall k \geq 2, \forall N_1, ..., N_k \in \mathcal{N},\ \forall i \neq j,\ N_i \cap N_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i=1}^{k} N_i \notin \mathcal{B}$.
- Connexion : $S \in \mathcal{N}$ *(hypothèse en discussion)*

Ensembles nidifiés (maximaux)

Définition (Ensemble nidifié)

Un *ensemble nidifié* $\mathcal{N}$ d'un édifice $\mathcal{B}$ est une partie de $\mathcal{B}$ telle que :

- Nidification : $\forall N_1, N_2 \in \mathcal{N},\ N_1 \subseteq N_2$ ou $N_2 \subseteq N_1$ ou $N_1 \cap N_2 = \emptyset$
- Non recouvrement : $\forall k \geq 2, \forall N_1, ..., N_k \in \mathcal{N},\ \forall i \neq j,\ N_i \cap N_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i=1}^k N_i \notin \mathcal{B}$.
- Connexion : $S \in \mathcal{N}$ *(hypothèse en discussion)*

Les ensembles nidifiés correspondent aux "tubages" d'un hypergraphe.

Ensembles nidifiés (maximaux)

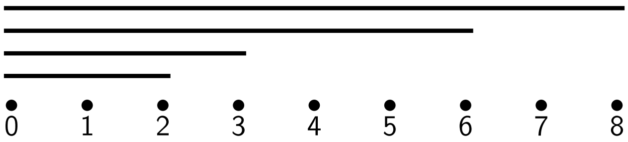
Définition (Ensemble nidifié)

Un *ensemble nidifié* $\mathcal{N}$ d'un édifice $\mathcal{B}$ est une partie de $\mathcal{B}$ telle que :

- Nidification : $\forall N_1, N_2 \in \mathcal{N},\ \ N_1 \subseteq N_2$ ou $N_2 \subseteq N_1$ ou $N_1 \cap N_2 = \emptyset$
- Non recouvrement :
  $\forall k \geq 2, \forall N_1, \ldots, N_k \in \mathcal{N},\ \forall i \neq j,\ \ N_i \cap N_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i=1}^{k} N_i \notin \mathcal{B}$.
- Connexion : $S \in \mathcal{N}$ *(hypothèse en discussion)*

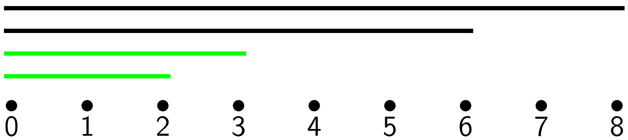
Les ensembles nidifiés correspondent aux "tubages" d'un hypergraphe.
L'ensemble des ensembles nidifiés forme un complexe simplicial abstrait, appelé *complexe nidifié*.

Exemple d'ensemble nidifiés

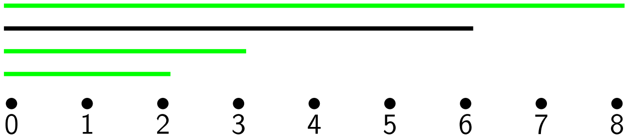


Exemple d'ensemble nidifiés

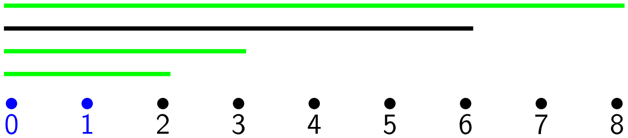
Exemple d'ensemble nidifiés



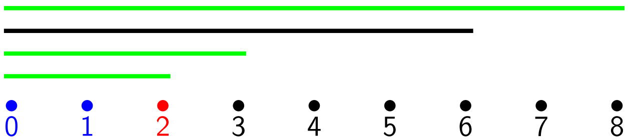
Exemple d'ensemble nidifiés



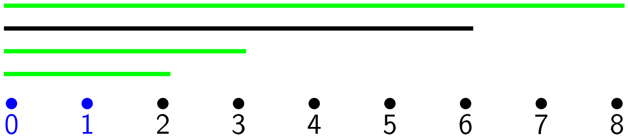
Exemple d'ensemble nidifiés



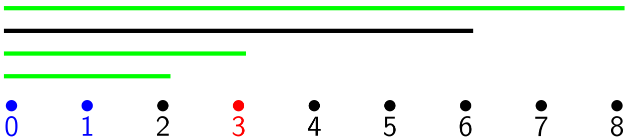
Exemple d'ensemble nidifiés



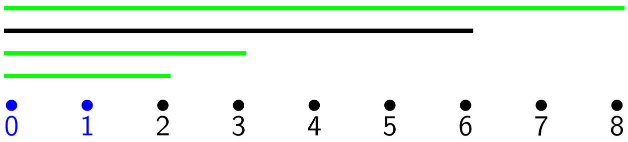
Exemple d'ensemble nidifiés



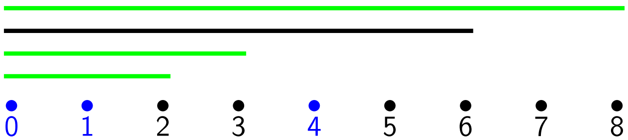
Exemple d'ensemble nidifiés



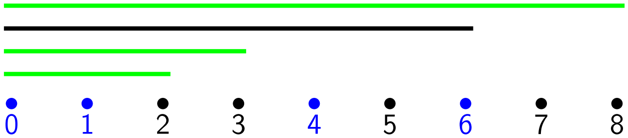
Exemple d'ensemble nidifiés



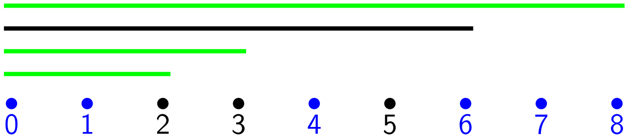
Exemple d'ensemble nidifiés



Exemple d'ensemble nidifiés



Exemple d'ensemble nidifiés

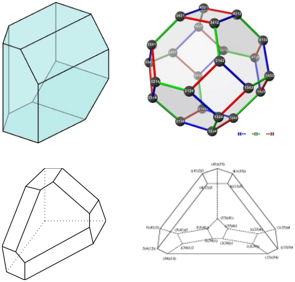


Séminaire DGeCo

Associaèdres d'édifice

Associaèdres d'édifice

L'*associaèdre d'un édifice* $\mathcal{B}$ est le polytope qui réalise son complexe nidifié.

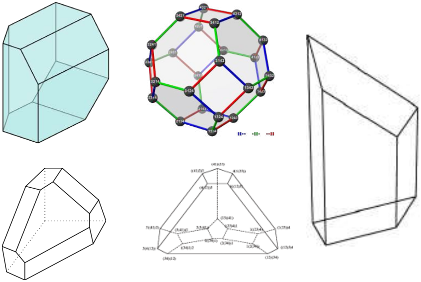


Associaèdres d'édifice

Associaèdres d'édifice

L'*associaèdre d'un édifice $\mathcal{B}$* est le polytope qui réalise son complexe nidifié.

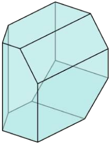
On retrouve d'autres polytopes connus (Pitman-Stanley,...),

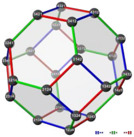


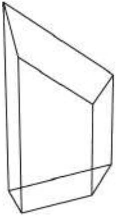
Associaèdres d'édifice

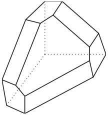
Associaèdres d'édifice

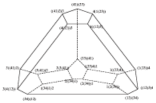
L'*associaèdre d'un édifice* $\mathcal{B}$ est le polytope qui réalise son complexe nidifié.





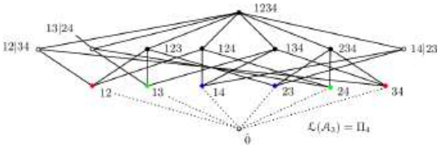






On retrouve d'autres polytopes connus (Pitman-Stanley,...), et des liens algébriques profonds (compactification merveilleuse de De Concini-Procesi,...).

Cf Zelevinsky 2005, Feichtner 2005, Postnikov 2009,...



Séminaire DGeCo

Transformations d'édifices

On a vu que retirer une arête d'un graphe donne un édifice. L'associaèdre de cet édifice s'obtient à partir de l'associaèdre du graphe en "tirant" une facette (en retirant l'inégalité associée).

Transformations d'édifices

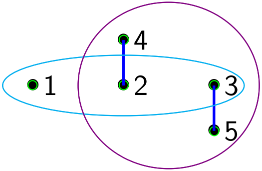
On a vu que retirer une arête d'un graphe donne un édifice. L'associaèdre de cet édifice s'obtient à partir de l'associaèdre du graphe en "tirant" une facette (en retirant l'inégalité associée).

Y a-t-il d'autres opérations naturelles sur les édifices qui se transcrivent bien sur l'associaèdre d'édifice ?

Transformations d'édifices

On a vu que retirer une arête d'un graphe donne un édifice. L'associaèdre de cet édifice s'obtient à partir de l'associaèdre du graphe en "tirant" une facette (en retirant l'inégalité associée).

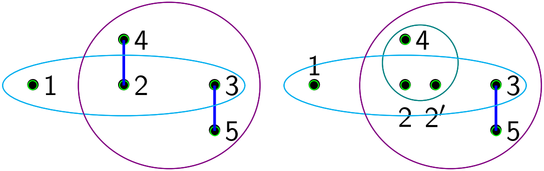
Y a-t-il d'autres opérations naturelles sur les édifices qui se transcrivent bien sur l'associaèdre d'édifice ?



Transformations d'édifices

On a vu que retirer une arête d'un graphe donne un édifice. L'associaèdre de cet édifice s'obtient à partir de l'associaèdre du graphe en "tirant" une facette (en retirant l'inégalité associée).

Y a-t-il d'autres opérations naturelles sur les édifices qui se transcrivent bien sur l'associaèdre d'édifice ?

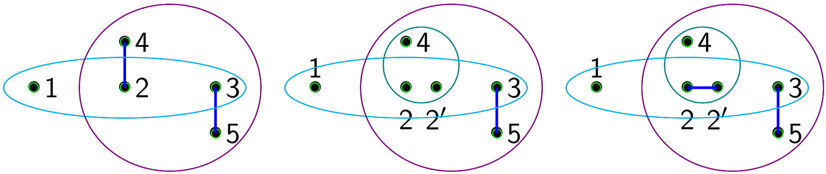


Dédoublement

Transformations d'édifices

On a vu que retirer une arête d'un graphe donne un édifice. L'associaèdre de cet édifice s'obtient à partir de l'associaèdre du graphe en "tirant" une facette (en retirant l'inégalité associée).

Y a-t-il d'autres opérations naturelles sur les édifices qui se transcrivent bien sur l'associaèdre d'édifice ?



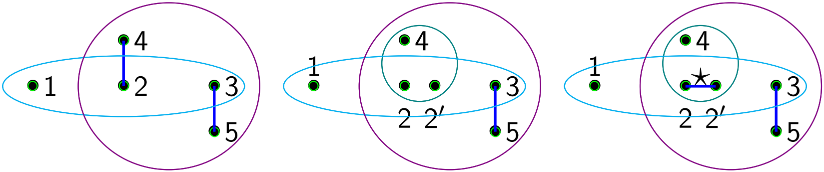
Dédoublement

Rassemblement

Transformations d'édifices

On a vu que retirer une arête d'un graphe donne un édifice. L'associaèdre de cet édifice s'obtient à partir de l'associaèdre du graphe en "tirant" une facette (en retirant l'inégalité associée).

Y a-t-il d'autres opérations naturelles sur les édifices qui se transcrivent bien sur l'associaèdre d'édifice ?

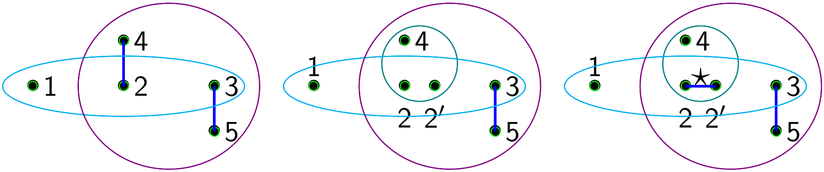


Dédoublement

Rassemblement
Composition

Transformation de l'associaèdre d'édifice

Associaèdre d'origine	Opération d'édifice	Nouvel associaèdre
P, F	Dédoublement	$\mathrm{wedge}_F(P)$
P	Rassemblement	$\mathrm{prism}(P)$
P, F, Q	Composition	$P \lhd_F Q$?
P, Q	Produit	$P \times Q$
P, Q	Produit couvert	*Work in progress...*



Dédoublement

Rassemblement
Composition

Merci pour votre attention !