Pourquoi la conjecture de Fedotov n'est pas vraie

Exposé pour raconter l'article cité de R. van Handel

But : exposer la preuve par RvH de la non-validité de la conjecture de Fedotov. Celle-ci s'appuie sur une relecture du theoreme de Timorin (celui appelé "relations de Hodge-Riemann pour les polytopes simples), et sur une réinterprétation des inégalités d'Alexandrov (ou de leur généralisation par Shephard) comme *hyperbolicité* de certaines matrices positives. Des contre-exemples simples à la conjecture seront donnés, et si le temps, on expliquera comment ces contre-exemples ont été trouvés (ie le lien avec le thm de Timorin).

1 Introduction, inégalités d'Alexandrov et de Shephard

Les corps convexes de $\mathbb{R}^n$ (dont on note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble) forment un cone : si $K, L \in \mathcal{K}_n$ et $\lambda, \mu > 0$, alors $\lambda K + \mu L$ est lui aussi un corps convexe. On appelle *espace de Minkowski* le cone constitué de ces corps convexes (attention : ici un corps convexe est seulement un compact convexe de $\mathbb{R}^n$, il a le droit d'etre d'intérieur vide). Minkowski a découvert au début du XXeme le fait remarquable suivant.

Theorem 1. *(Minkowski 1903) Soit K, L deux corps convexes dans $\mathbb{R}^n$. Alors $Vol_n(\lambda K + \mu L)$ est un polynome en $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_{>0}$.*

On peut donc écrire $Vol_n(\lambda K + \mu L) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \lambda^k \mu^{n-k}$, pour certains réels a_k. La convention en vigueur milieu XXeme était $a_{n-k} = V_k(K, L)$. La convention commune aujourd'hui est $a_k = V(K[k], L[n-k])$, qu'on comprend peut-etre mieux au vu de la généralisation suivante (aussi due à Minkowski) de l'énoncé qui précède, que voici :

Theorem 2. *(Minkowski 1903) Soit $m \geq 2$ et $K_1, ..., K_m$ des coprs convexes dans $\mathbb{R}^n$. Alors $Vol_n(\lambda_1 K_1 + ... \lambda_m K_m)$ est un polynome en les $\lambda_i > 0$. De plus, tous les coefficients de ce polynome sont positifs ou nuls.*

Les notations courantes pour ce polynome (ou plutot, pour ses coefficients) sont les suivantes :

$$V(\lambda_1 K_1 + ... + \lambda_m K_m) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}^m \\ a_1 + ... + a_m = n}} \binom{n}{a} v_a \lambda^a := \sum_a \frac{n!}{a_1! ... a_m!} v_a \prod \lambda_i^{a_i}$$

Si $a = (a_1, ..., a_m) \in \mathbb{N}^m$, avec $|a| = n$, alors v_a est plutot écrit $V(K_1[a_1], ..., K_m[a_m])$. En dimension n, le volume mixte prend n argument. La notation $(K_1[a_1], ..., K_m[a_m])$ est donc celle d'un n-uplet (d'éléments de $\mathcal{K}_n$), où K_1 apparait a_1 fois, etc.

Petits dessins de polytopes au tableau pour deux exemples (dus à Steiner, avec $L = B_2^n$), où l'on sait déterminer les coefficients, qui ont une interprétation géométrique.

Quelques identités connues :

i/ soit $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, et $[0,u] \subset \mathbb{R}^n$, segment de longueur 1 dans la direction u. Alors :

$$V_n([0,u], K_2, ..., K_n) = \frac{1}{n} V_{n-1}(\pi_{u^\perp}(K_2), ..., \pi_{u^\perp}(K_n))$$

ii/ Soit $B = B_2^n$ la boule euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ et $K \subset \mathbb{R}^n$ corps convexe, de surface bien définie. Alors :

$$V_n(K, ..., K, B) = V(K[n-1], B) = \frac{1}{n} Vol_{n-1}(\partial K)$$

iii/ Soit K, L deux corps, h_L la fonction de support de L et S_K la mesure de surface de K. Alors on a la "représentation intégrale" (du volume mixte) suivante :

$$V(K[n-1], L) = \frac{1}{n} \int h_L(u) dS_K(u) \quad \text{où l'intégrale est sur } u \in \mathbb{S}^{n-1}$$

A partir des identités données ci-dessus, vous pouvez répondre aux questions ci-dessous.

1. En itérant l'item $i/$ précédent, obtenir que pour $u_1, ..., u_k \in \mathbb{S}^{n-1}$ (noter $U := Vect\{u_1, ..., u_k\}$) :
$$V_n([0,u_1], ...[0,u_k], K[n-k]) = \frac{Vol_k([0,u_1] + ... + [0,u_k])}{n(n-1)...(n-k+1)} Vol_{n-k}(\pi_{U^\perp} K)$$
2. montrer la formule $iii/$ dans le cas des polytopes. On pourra supposer $0_{\mathbb{R}^n} \in int(P)$, et on donne que pour P polytope de facettes $F_1, ..., F_N$, avec vecteurs normaux associés $u_1, ..., u_N$, la mesure de surface est la mesure discrète $S_P = \sum_{i=1}^N \delta_{u_i} Vol_{n-1}(F_i)$. (donc il s'agit de voir que $V(Q, P[n-1]) = \langle h_Q, S_P \rangle := \frac{1}{n} \sum_i h_Q(u_i)|F_i|$.)

Quelques propriétés bien connues des volumes mixtes : multilinéarité, invariance par permutation des arguments, croissance (au sens large, pour l'inclusion), et continuité (prendre la distance de Hausdorff sur $\mathcal{K}_n$, puis la topologie produit). Mais aussi :

- $V(K_1, ..., K_n) \geq 0$, et non nul ssi on peut trouver $L_1 \subset K_1$, ... $L_n \subset K_n$, des segments linéairement indépendants.
- soit $K, L \in \mathcal{K}_n$. Alors la suite $a_k = V(K[k], L[n-k])$ est log-concave, ie $a_k^2 \geq a_{k-1}a_{k+1}$, pour tout $1 \leq k \leq n-1$.

La propriété 1 ci-dessus est due à Minkowski, et peut etre obtenue si on suit la preuve de Minkowski de 1903, où il montre l'existence des volumes mixtes, en les construisant comme volume de certains polytopes [1]. Ou encore (en utilisant la continuité des volumes mixtes et,) en montrant $v_a \geq 0$ dans le cas où tous les corps $K_1, ..., K_n$ sont lisses. Dans ce cas, la représentation intégrale $V(K_1, ..., K_n) = \frac{1}{n} \int h_{K_1}(u) dS(K_2, ..., K_n, u)$ peut etre précisée car la mesure (mixte) de surface est abs. continue par rapport à la mesure de Haar sur la sphère, la dérivee de Radon-Nikodym est donnée par le discriminant ($(n-1)$-dimensionnel) mixte des hessiennes $D^2 h_{K_2}, ..., D^2 h_{K_n}$.

[1] à vérifier. En fait je n'ai toujours pas lu la preuve originale par Minkowski de son theoreme...

Ce second point de vue permet d'obtenir la positivité[2] des volumes mixtes, comme conséquence de celle des discriminants mixtes.

[le disc. mixte est défini de facon similaire, en montrant que le determinant de la matrice $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$, est un polynome (homogene, de degré k) en (λ_1, λ_2), où M_1, M_2 sont deux matrices de taille k^2 : $det_k(\lambda_1 M_1 + ... + \lambda_m M_m) = \sum_a \binom{k}{a} d_a \lambda^a$ avec $d_a = D_k(M_1[a_1], ..., M_m[a_m]) \geq 0$ le discriminant mixte du k-uplet de matrices (de taille $k \times k$) $(M_1[a_1], ..., M_k[a_k])$]

Quant à la seconde propriété énoncée ci-dessus (log-concavité de la suite $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$), elle est un cas particulier de l'énoncé suivant.

Theorem 3 (inégalités d'Aleksandrov-Fenchel)**.** *Quels que soient $A, B, C_3, ..., C_n \in \mathcal{K}_n$, on a :*

$$V(A, A, C_3, ..., C_n) V(B, B, C_3, ..., C_n) \leq V(A, B, C_3, ..., C_n)^2.$$

On doit à R. Shephard les inégalités qui suivent.

Theorem 4 (inégalités de Shephard pour les volumes mixtes)**.** *Soit $m \geq 2$, et $K_1, ..., K_m, C_3, ..., C_n$ des corps convexes dans $\mathbb{R}^n$. Soit M la matrice (symétrique) définie par $M_{i,j} = V_n(K_i, K_j, C_3, ..., C_n)$. Alors $(-1)^m det(M) \leq 0$.*

Il s'agit d'une généralisation des inégalités d'Aleksandrov, qui correspondent au cas $m = 2$.

Dans son article [RvH10], van Handel propose un démonstration élémentaire des inégalités de Shephard. Par continuité (du volume mixte, et du déterminant), on peut supposer que tous les coeffs $M_{i,j} > 0$. (En effet si $(-1)^m det(M) \leq 0$ vaut avec cette hypothese supplémentaire, alors le cas général s'obtient en posant $K_{i,\epsilon} = K_i + \epsilon B_2^n$, $C_{i,\epsilon} = C_i + \epsilon B_2^n$, M_ϵ la matrice correspondante (qui vérifie $M_\epsilon > 0$). De sorte que $(-1)^m det(M_\epsilon) \leq 0$ pour tout $\epsilon > 0$, et on déduit l'inégalité voulue en faisant $\epsilon \to 0$.)

Or dans le cas $M > 0$ [3], les inégalités d'Aleksandrov (pour $C_3, ..., C_n$ de l'énoncé, et pour C_1, C_2 quelconques), reviennent à dire que la matrice M de Shephard est toujours hyperbolique (pour tout m, et tous $K_1, ..., K_m$). Si M est une matrice symétrique (à coeffs réels), on dit[4] que M est *hyperbolique* si le positive eigenspace $E_+(M)$ est uni-dimensionnel. (voir a. lemme)

Lemma 1. *Soit $M > 0$ une matrice symétrique réelle à coeffs tous positifs (stricts). Alors les items qui suivent se valent tous :*

a. M est hyperbolique : unique valeur propre $\lambda_0 > 0$, et $dim(E_{\lambda_0}(M)) = 1$.

b. $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$: si $y \geq 0$, alors $\langle x, My \rangle^2 \geq \langle x, Mx \rangle \langle y, My \rangle$.

b'. idem mais pour tous les $(x, y) \in (\mathbb{R}^m)^2$ avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

c. $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$: si $y \geq 0$ et $y \neq 0$, alors $(\langle x, My \rangle = 0) \Rightarrow \langle x, Mx \rangle \leq 0$.

Démo. Le thm de Perron-Frobenius, donne l'existence de $\lambda_0 > 0$ et de $v_0 \in \mathbb{R}^m$, $v_0 > 0$, tels que $Mv_0 = \lambda_0 v_0$.

[2] english : non-negativeness

[3] notation qui signifie : $M_{i,j} > 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq m$, de meme plus loin : si $y \in \mathbb{R}^m$, alors $y \geq 0$ signifie $y_j \geq 0$ pour tout j, et $y > 0$ signifie $y_j > 0$ pour tout j

[4] hmmm... pourquoi ?

$\underline{a \Rightarrow b}$ L'hyperbolicité dit que M est définie négative sur $v_0^\perp$. Donc $\langle x, Mx\rangle \leq 0$ pour tout $x \perp v_0$. On en déduit b lorsque $y = v_0$, car (quel que soit $t \in \mathbb{R}$) l'inégalité $I(x,y)$ équivaut à celle $I(x_t, y)$, où $x_t = x + ty$ (développer le produit scalaire et le produit / le carré, pour le voir). Pour tout x, on peut choisir un réel t tel que $x_t \perp v_0$. Comme $\langle x_t, Mv_0\rangle = \lambda_0\langle x_t, v_0\rangle = 0$, que $\langle x_t, Mx_t\rangle \leq 0$ (par a.), et que $\langle v_0, Mv_0\rangle = \lambda_0||v_0||^2 > 0$, on a bien $I(x_t, v_0)$ qui est vraie. Et donc $I(x, v_0)$ aussi.

La démo est la meme pour $I(x,y)$ avec $y \geq 0$ vecteur quelconque (toujours en choisissant t tel que $x_t = x + ty \perp v_0$), car $\langle y, v_0\rangle > 0$ (et donc un tel t existe), et car $\langle y, My\rangle > 0$ (par l'hypothese $M > 0$).

$\underline{b' \Rightarrow b}$ Si $y > 0$, alors on obtient $I(x,y)$ (où $x \in \mathbb{R}^m$ quelconque) à partir de $I(x_t, y)$, où $t > 0$ est assez grand pour que $x_t > 0$.

Si $y \geq 0$, alors on approxime $y = \lim_\epsilon y_\epsilon$, où $y_\epsilon = y + \epsilon(e_1 + ... + e_m)$ (les e_i dénotent les vecteurs de la base canonique). Pour tout x, on a $I(x, y_\epsilon)$ pour tout ϵ (car $y_\epsilon > 0$), on en déduit $I(x,y)$ (par continuité de $F_x(y) = \langle x, Mx\rangle\langle y, My\rangle - \langle x, My\rangle^2$).

$\underline{b \Rightarrow c}$ Evident (on a déjà noté plus haut que $\langle y, My\rangle > 0$ si $y \geq 0, y \neq 0$).

$\underline{c \Rightarrow a}$ Par contraposée. Si M n'est pas hyperbolique, et que $\lambda_0 = \max Sp(M) > 0$ est la valeur propre donnée par Perron Frobenius, alors ou bien $dim(E_{\lambda_0}(M)) \geq 2$, ou bien il existe $0 < \lambda_1 < \lambda_0$ autre v.p. positive. Dans les deux cas on a $0 < \lambda_1 \leq \lambda_0$, v.p. de M, et $v_1 \perp v_0$ vecteur propre associé. Prendre $y = v_0$ et $x = v_1$. Alors $\langle x, Mx\rangle = \lambda_1||v_1||^2 > 0$ bien que $\langle x, My\rangle = 0$. □

Remarque : le lemme n'est plus vrai si on affaiblit l'hypothese en $M \geq 0$. Car plus de Perron-Frobenius alors.

"dans le cas $M > 0$, les inégalités d'Aleksandrov (pour $C_3, ..., C_n$ de l'énoncé, et pour C_1, C_2 quelconques), reviennent à dire que la matrice M de Shephard est toujours hyperbolique (pour tout m, et tous $K_1, ..., K_m$)." Explication : fixer $K_1, ..., K_m, C_3, ..., C_n$, et la matrice de Shephard M. Alors l'hyperbolicité de M équivaut à avoir pour tous $x, y \geq 0$, l'inégalité $\langle x, My\rangle^2 \geq \langle x, Mx\rangle\langle y, My\rangle$, qui n'est autre que l'ineg d'Aleksandrov avec les corps $K_x = x_1K_1 + ... + x_mK_m$, $K_y = y_1K_1 + ... + y_mK_m$ (et $C_3, ..., C_n$).

(en effet $\langle x, My\rangle = \sum_{i,j} x_iy_jV(K_i, K_j, C_3, ..., C_n) = V(K_x, K_y, C_3, ..., C_n)$, par bilinéarité de $(A, B) \mapsto V(A, B, C_3, ..., C_n)$)

On peut conclure la démo des ineg de Shephard : on s'est ramenés (par continuité) au cas $M > 0$. On sait alors que M est hyperbolique (car vérifie condition b du lemme ci-dessus, en vertu des ineg d'Alexksandrov). Et donc les v.p. de M vérifient $\lambda_0 > 0 \geq \lambda_1 \geq ... \geq \lambda_{n-1}$. D'où $(-1)^m det(M) \leq 0$.

De plus une matrice symétrique positive, admet une autre caractérisation, connue sous le nom de critère de Sylvester.

Lemma 2 (Sylvester criterion). *Soit $M > 0$ matrice symétrique réelle, taille $m \times m$. Alors $dim(E_+(M)) = 1$ (M est hyperbolique), ssi pour tout $\emptyset \neq J \subset [m]$, on a $(-1)^{|J|}det(M_J) \leq 0$.*

Proof. Si $m = 1$, alors $M > 0$ signifie simplement $M_{1,1} > 0$: alors $\lambda_0 = M_{1,1}$, M est hyperbolique, et vérifie l'inégalité voulue (pour $J = [m] = [1]$).

Si $m = 2$, alors comme $M > 0$, le critère se résume à l'inégalité $det(M) \leq 0$, autrement dit $\lambda_0\lambda_1 \leq 0$, autrement dit (on a $\lambda_0 = \max_{\lambda \in Sp(M)} \lambda > 0$ par PF), $\lambda_1 \leq 0$. Ce qui équivaut (pour $m = 2$) à l'hyperbolicité de M.

Pour $m \geq 3$, le caractère suffisant du critère (ie des $2^m - 1$ inégalités déterminantales) peut etre obtenu par récurrence. Le caractère nécessaire découle du fait que si $M > 0$ est hyperbolique, alors ses sous-matrices principales $M_J > 0$ sont elles aussi hyperboliques (par exemple, car item *c.* hérité de M), et que M_J hyperbolique implique $(-1)^{|J|}det(M_J) \leq 0$ (expliqué plus haut). □

(par continuité, on obtient aussi que si M est une matrice de Shephard ($M \geq 0$) définie à partir de $K_1, ..., K_m, C_3, ..., C_n$, alors $(-1)^{|J|}det(M_J) \leq 0$ pour tout $J \subset [m]$).

Le critère de Sylvester sera utilisé plus loin pour déduire des contre-exemples à Fedotov, à partir de matrices M ("de Fedotov") dont on verra qu'elles ne sont pas toujours hyperboliques. (car une certaine relation de Hodge-Riemann fera que *c.* du lemme 1 ci-dessus n'est pas respecté).

2 Relations de Hodge-Riemann : theoreme de Timorin et sa reformulation

Rappeler ce qu'est un polytope simple. Définir $\mathcal{P}(P)$, ensemble des n-polytopes "Q fortement isomorphes" à P (ie $dim(Q^u) = dim(P^u)$ pour tout u). Remarquer que $Q \in \mathcal{P}(P)$ implique que P et Q ont memes vecteurs normaux. Introduire notation $h_P \in \mathbb{R}^N$ (si P a N facettes).

Enoncer le theoreme (de Timorin ?) : il existe $V_P : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, polynome homogene de degré n, tel que $Vol_n(Q) = V_P(h_Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{P}(P)$. (si P est simple). Exemple lorsque $P = [0, e_1] + ... + [0, e_n]$ (ie, P est "le" cube unité de $\mathbb{R}^n$) : dans ce cas $Q \in \mathcal{P}(P)$ ssi $Q = x + [0, a_1e_1] + ... + [0, a_ne_n]$, pour un certain ($x \in \mathbb{R}^n$ et) $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ (longueurs des cotés de Q). Et en notant $u_1 = e_1, ..., u_n = e_n, u_{n+k} = -u_k$ si $1 \leq k \leq n$, et $N = 2n$, alors V_P est le polynome $V_P(h) = \prod(h_k - h_{n+k})$.

Notation D_hU pour dérivée directionnelle dans $\mathbb{R}^N$: $D_hU(x) = \lim_{t\to 0}(U(x + th) - U(x))/t$. (ok si U polynome...). Ce sont des opérateurs différentiels d'ordre 1. Si $h = h_1 + h_2$, alors $D_h = D_{h_1+h_2} = D_{h_1} + D_{h_2}$, de plus $D_{h_1}D_{h_2} = D_{h_2}D_{h_1}$ (premiere identité vraie par continuité des dérivées premieres, la seconde par continuité des dérivées secondes... toutes les dérivées sont bien sur continues : on agit sur des polynomes).

Et donc tout opérateur différentiel α homogene d'ordre k (agissant sur l'espace des polynomes homogenes de degré n sur $\mathbb{R}^N$), peut s'écrire $\alpha = \sum_I \alpha_I D_I$, avec la somme qui porte sur les multi-sets $I = \{i_1 \leq ... \leq i_k \leq N\}$, et $D_I = D_{e_{i_1}}...D_{e_{i_k}}$ (en notant $(e_1, ..., e_N)$ la base canonique).

Theorem 5. *(Timorin -McMullen) Soit P un n-polytope simple, $\mathcal{P}(P)$ l'ensemble des n-polytopes "fortement isomorphes" à P, et V_P le polynome (de Timorin) associé à P. Soit $k \geq 1$, soient $C_0, C_1, ..., C_{n-2k} \in \mathcal{P}(P)$, et soit $\alpha = \sum_I \alpha_I D_I$ un op. diff. homogene d'ordre k. En notant $h_0, ..., h_{n-2k} \in \mathbb{R}^N$ les vecteurs support respectifs des C_i, on a que :*

si $\alpha D_{h_0}...D_{h_{n-2k}}V_P = 0$, alors $(-1)^k\alpha^2 D_{h_1}...D_{h_{n-2k}}V_P \geq 0$.

Et si de plus $\alpha \neq 0$, alors l'inégalité est stricte.

Lorsque $\alpha \neq 0$ et $\alpha D_{h_0}...D_{h_{n-2k}}V_P = 0$ pour un certain $(P, C_0, ..., C_{n-2k})$, l'identité $\alpha D_{h_0}...D_{h_{n-2k}}V_P = 0$ (où $h_i = h_{C_i}$) est appelée "relation de Hodge-Riemann" pour les polytopes $(P, C_0, ..., C_{n-2k})$.

Dans [RvH], van Handel montre que le theoreme ci-dessus peut etre énoncé uniquement à l'aide de volumes mixtes.

Theorem 6. *Soit P un n-polytope simple, $\mathcal{P}(P)$ comme ci-avant, et V_P le polynome (de Timorin) associé à P. Soit $k \geq 2$, soient $C_0, C_1, ..., C_{n-2k} \in \mathcal{P}(P)$. Alors, pour tout $m \geq 1$ et tous $K_1, ..., K_m \in \mathcal{P}(P)$:*

$$\text{si } x \in \mathbb{R}^m \text{ est tel que pour tout } M \in \mathcal{P}(P),\ \sum_i x_i V(K_i[k], M[k-1], C_0, ..., C_{n-2k}) = 0, \text{ alors}$$

$(-1)^k \langle x, Mx \rangle \geq 0$ *, où on définit la matrice M par $M_{i,j} = V(K_i[k], K_j[k], C_1, ..., C_{n-2k})$, $1 \leq i, j \leq m$.*

Par ailleurs on peut trouver P un polytope simple, $m \geq 3$ et $K_1, ..., K_m \in \mathcal{P}(P)$, et $x \in \mathbb{R}^m$, tels qu'on ait $\sum_i x_i V(K_i[k], M[k-1], P[n-2k+1]) = 0$ pour tout $M \in \mathcal{P}(P)$, et tels que $(-1)^k \langle x, Mx \rangle > 0$.

Dans la seconde partie de l'exposé, j'explique pourquoi les deux énoncés (ou plutot : leur partie 1) sont équivalents.

Comme $\alpha D_{h_0}...D_{h_{n-2k}}V_P$ est un polynome de degré $n-(n-2k+1)-k = k-1$, il revient au meme de dire que $\alpha D_{h_0}...D_{h_{n-2k}}V_P = 0$, ou que $\alpha\beta D_{h_0}...D_{h_{n-2k}}V_P = 0$ pour tout op. differentiel β homogene d'ordre $k-1$. (on vient d'utiliser que α et β commutent).

L'équivalence repose d'une part sur l'identité $D_{h_1}...D_{h_n}V_P = n!V_n(C_1, ..., C_n)$ [42], valide pour tout $(C_1, ..., C_n) \in \mathcal{P}(P)^n$, : qu'on peut obtenir par simple calcul, à partir de l'identité dite de polarisation : $V_n(C_1, ..., C_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\epsilon \in \{0,1\}^n} Vol_n(\epsilon_1 C_1 + ... + \epsilon_n C_n)$, d'autre part sur le lemme qui suit.

Lemma 3. *Soit $P \in \mathcal{K}_n$, un polytope simple. Soit $\alpha = \sum \alpha_I D_I$ un op. diff. homogene d'ordre $k \geq 1$. Alors il existe $m \geq 1$, $K_1, ..., K_m \in \mathcal{P}(P)$, des polytopes, et $x \in \mathbb{R}^m$, tels que $\alpha = \sum x_i \left(D_{h_{K_i}}\right)^k$. Autrement dit, tout opérateur diiférentiel hom. d'ordre k, est somme de puissances k-iemes d'op d'ordre 1.*

La preuve du lemme (voir appendice) repose sur le fait que, lorsque P est simple, alors quel que soit $h \in \mathbb{R}^N$, $h_P + \epsilon h$ est le vecteur support d'un $Q \in \mathcal{P}(P)$, pour tout ϵ assez petit. Donc, en prenant $h = e_1, ..., e_N$, il vient qu'on trouve $\epsilon > 0$ petit tel que $\epsilon e_i = h_{Q_i} - h_P$, pour certains Q_i dans $\mathcal{P}(P)$. Et donc $e_i = h_{L_i} - h_{P_0}$, avec $L_i = \epsilon^{-1}Q_i \in \mathcal{P}(P)$, et $P_0 = \epsilon^{-1}P$. Il s'ensuit que $D_{e_i} = D_{h_i} - D_{h_0}$, en notant $h_0 = \epsilon^{-1}h_P = h_{P_0}$, et $h_i = h_{L_i} \in \mathbb{R}^N$.

Démo de l'équivalence modulo le lemme (et l'identité [42])

thm5 $\Rightarrow$ thm6 Supposons vrai le theoreme de Timorin, et soient P un n-polytope simple, $\mathcal{P}(P)$ et $V_P : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ comme ci-avant, et soit aussi $k \geq 2$, $C_0, C_1, ..., C_{n-2k} \in \mathcal{P}(P)$, $m \geq 1$ et $K_1, ..., K_m \in \mathcal{P}(P)$, $x \in \mathbb{R}^m$, qui vérifient l'hyp. de thm 6.

A savoir : pour tout $M \in \mathcal{P}(P)$, $\sum x_i V(M[k-1], K_i[k], C_0, ..., C_{n-2k}) = 0$ (hyp.)

On choisit $\alpha := \sum x_i \left(D_{h_{K_i}}\right)^k$ (op. différentiel homogène d'ordre k). D'apres l'identité [42], l'hyp. se traduit donc par :

$D_{h_M}^{k-1} \alpha D_{h_{C_0}} ... D_{h_{C_{n-2k}}} V_P = 0$ pour tout $M \in \mathcal{P}(P)$.

Or d'apres le lemme, tout op. diff. hom β d'ordre $k-1$ peut etre écrit (pour un certain $A \geq 1$, et certains $M_1, ..., M_A \in \mathcal{P}(P)$), $\beta = \sum_{i=1}^{A} z_i D_{h_{M_i}}^{k-1}$. On en déduit que $\beta \alpha D_{h_{C_0}} ... D_{h_{C_{n-2k}}} V_P = 0$, pour tout β d'ordre $k-1$, ce qui signifie $\alpha D_{h_{C_0}} ... D_{h_{C_{n-2k}}} V_P = 0$.

Le thm 5 permet de conclure que $(-1)^k \alpha^2 D_{h_{C_1}} ... D_{h_{C_{n-2k}}} V_P \geq 0$, autrement dit (utilisant de nouveau [42]) que $(-1)^k \sum x_i x_j V(K_i[k], K_j[k], C_1, ..., C_{n-2k}) \geq 0$. (qu'on peut encore récrire $(-1)^k \langle x, Mx \rangle \geq 0$, avec la matrice M comme dans thm 6).

<u>*thm6* $\Rightarrow$ *thm*5</u> Soit P simple, $k \geq 1$, $C_0, ..., C_{n-2k}$ et $\alpha = \sum \alpha_I D_I$ op. diff. hom d'ordre k comme dans l'énoncé de thm 5. On suppose donc qu' α vérifie $\alpha D_{h_0} ... D_{h_{n-2k}} V_P = 0$ (avec $h_i = h_{C_i}$). D'après le lemme, on peut trouver $m \geq 1$, et $K_1, ..., K_m \in \mathcal{P}(P)$, $x \in \mathbb{R}^m$, tels que $\alpha = \sum x_i \left(D_{h_{K_i}}\right)^k$.

On a pour tout β d'ordre $k-1$, $\alpha \beta D_{h_0} ... D_{h_{n-2k}} V_P = 0$. En particulier vrai pour tout $\beta = D_{h_M}^{k-1}$ avec $M \in \mathcal{P}(P)$.

De sorte que (par [42]) $\sum x_i V(K_i[k], M[k-1], C_0, ..., C_{n-2k}) = 0$, pour tout M. Par thm 6, cela implique $(-1)^k \sum x_i x_j V(K_i[k], K_j[k], C_1, ..., C_{n-2k}) \geq 0$. Qui (par [42]) se récrit $(-1)^k \alpha^2 D_{h_{C_1}} ... D_{h_{C_{n-2k}}} V_P \geq 0$, qui est bien la ccl de la premiere partie du thm 5.

3 Contre-exemples aux inégalités de Fedotov

Inspiré par les inégalités déterminantales de Shephard, Fedotov a proposé dans les années 70 la conjecture qui suit (qu'il pensait avoir montrée) :

Conjecture 1 (inégalités de Fedotov pour les volumes mixtes)**.** *Soit $m \geq 2$, $k \geq 1$ et $K_1, ..., K_m, C_1, ..., C_{n-2k}$ des corps convexes dans $\mathbb{R}^n$. Soit M la matrice (symétrique) définie par $M_{i,j} = V_n(K_i[k], K_j[k], C_1, ..., C_{n-2k})$. Alors $(-1)^m det(M) \leq 0$.*

Remarque : par analogie avec les paragraphes précédents, on appellera *matrice de Fedotov* la matrice M qui est définie dans l'énoncé ci-dessus. (qu'on a appelée *matrice de Shephard* dans le cas $k = 1$).

Theorem 7 (van Handel)**.** *Il existe pour tout $k \geq 2$, des exemples avec un certain $m \geq 3$, $K_1, ..., K_m$, et $C_1, ..., C_{n-2k}$, tels que $(-1)^m det(M) > 0$. On peut de plus trouver des exemple avec $C_1 = ... = C_{n-2k} = P$, qui soit un n-polytope, simple, et $K_1, ..., K_m$ qui soient* fortement isomorphes *à P.*

Remarque : il n'y a pas de contre exemple avec $m = 1$, car tout volume mixte est $V(.) \geq 0$ (thm de Minkowski). Il n'y a pas de contre-exemple avec $m = 2$, car pour tout $k \geq 1$, pour tout $\underline{C} = (C_1, ..., C_{n-2k}) \in \mathcal{K}_n^{n-2k}$, et tous K_1, K_2, on a $det(M) \leq 0$, par log-concavité de la suite $a_j = V(K_1[2k-j], K_2[j], \underline{C})$, $0 \leq j \leq 2k$. Enfin il n'y a pas de contre-exemple lorsque $k=1$, cela contredirait les inégalités de Shephard.

Démonstration pour $k=2$ Soient P, $m, K_1, ..., K_m \in \mathcal{P}(P)$ et $x \in \mathbb{R}^m$ tels que donnés par la seconde partie du thm 6. On note $x' = (x, 0) \in \mathbb{R}^{m+1}$, et on note $y = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^{m+1}$, ainsi que $K_{m+1} := P$.

En prenant $M = P \in \mathcal{P}(P)$, on a que $\sum x_i V(K_i[k], P[k], P[n-2k]) = 0$, autrement dit que $\langle x, My \rangle = 0$, avec M la matrice $M_{i,j} = V(K_i[k], K_j[k], P[n-2k])$, $1 \leq i, j \leq m+1$. Comme $M > 0$ (tous les K_i sont des polytopes ici), et que $y \geq 0$, si M était hyperbolique, on autait $\langle x, Mx \rangle \leq 0$, mais les K_i et le x donnés par [thm 6, 2nde partie], sont tels que l'inégalité va dans l'autre sens.

Donc la matrice M n'est pas hyperbolique. D'après le critère de Sylvester, on peut trouver $J \subset [m+1]$ tel que $(-1)^{|}J|det(M_J) > 0$ (nécessairement $|J| \geq 3$, cf. remarque qui suit l'énoncé du thm). C'est la matrice M_J qui contredit à la conjecture de Fedotov.

Noter que la meme démo fonctionne pour tout $k \geq 2$ pair.

Démonstration dans le cas $k \geq 3$ *impair* Il s'agit de se ramener au cas $k=2$ par polarisation. Soit $3 \leq k \leq n/2$ et soient $m, P, K_1, ..., K_m$ et $x \in \mathbb{R}^m$ donnés par [thm 6, 2nde partie]. Là encore on note $K_{m+1} = P$ et $x' = (x, 0) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Et on note $M_{i,j} = V(K_i[2], K_j[2], P[n-4])$, $1 \leq i, j \leq m+1$, la "matrice de Fedotov" associée. Par (double) polarisation :

$$V(K_i[2], P[k-2], K_j[2], P[k-2], P[n-2k]) = \frac{1}{(k!)^2} \sum_{\epsilon, \delta \in \{0,1\}^k} (-1)^{k-|\delta|}(-1)^{k-|\epsilon|} V(K_{i,\delta}[k], K_{j,\epsilon}[k], P[n-2k])$$

avec $K_{i,\delta} = (\delta_1 + \delta_2)K_i + (\delta_3 + ... + \delta_4)P$.

On pose $m_2 = (2^k - 1)(m+1)$. On définit la matrice B de taille $m_2 \times m_2$ par $B_{i,\delta,j,\epsilon} = V(K_{i,\delta}[k], K_{j,\epsilon}[k], P[n-2k])$. On pose $x_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ défini par $(x_2)_{i,\delta} = \frac{(-1)^{k-|\delta|} x_i}{k!}$ et $y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ défini par $(y_2)_{j,\epsilon} = 1_{j=m+1} 1_{|\epsilon|=1}$.

Alors $\langle x_2, By_2 \rangle = k \frac{1}{k!} \sum_i \sum_\delta (-1)^{k-|\delta|} V(K_{i,\delta}[k], P[n-2k]) = k\langle x, My \rangle = 0$.

Tandis que (par l'identité de polarisation) $\langle x_2, Bx_2 \rangle = \langle x, Mx \rangle > 0$.

Et donc $B > 0$ n'est pas hyperbolique : il existe, d'après le critère de Sylvester, $J \subset [m_2]$ tel que la matrice $M' := B_J$, contredise l'inégalité de Fedotov.

3.1 contre-exemples concrets

Les contre-exemples suivants montrent qu'on peut en fait prendre $m = 3$, quel que soit $k \geq 2$.

Premier contre-exemple : $n = 4$, $k = 2$, $m = 3$. Let $(e_i)_{i \leq 4}$ denote canonical basis of $\mathbb{R}^4$. Let $K_1 = [0, e_1] + [0, e_2]$ and $K_2 = [0, e_3] + [0, e_4]$, and $K_3 = C = K_1 + K_2$, the unit cube of $\mathbb{R}^4$.

Then $V(K_1[2], K_2[2]) = V(K_1[2], K_3[2]) = V(K_2[2], K_3[2]) = 1/6$, while $V(K_3[4]) = Vol_4(C) = 1$, so that $det(M) = -\frac{2}{6^3} < 0$, contradicting the conjecture.

Second contre-exemple : $k \geq 3$, $n = 2k$, $m = 3$. Similarly choose $K_1 = [0, e_1] + ... + [0, e_k]$,

$K_2 = [0, e_{k+1}] + ... + [0, e_n]$, and $K_3 = C = K_1 + K_2$.

Then $V(K_1[k], K_2[k]) = V(K_1[k], K_3[k]) = V(K_2[k], K_3[k]) = \binom{2k}{k}^{-1}$ while $Vol_n(C) = 1$. Thus $det(M) = -a^3 \left(\binom{2k}{k} - 2\right) < 0$ (with $a = \binom{2k}{k}^{-1}$), contradicting Fedotov's prediction.

Idem avec $n > 2k$: $k \geq 2$, $n \geq 2k$, $m = 3$. Then choose $K_1 = [0, e_1] + ... + [0, e_k]$, $K_2 = [0, e_{k+1}] + ... + [0, e_{2k}]$, $K_3 = K_1 + K_2$, and C the unit cube in $\mathbb{R}^n$. Then multilinearity of mixed volumes yields $V(K_1[k], K_2[k], C[n-2k]) = V(K_1[k], K_3[k], C[n-2k]) = V(K_2[k], K_3[k], C[n-2k]) = \frac{1}{\binom{n}{2k}} \frac{1}{\binom{2k}{k}} =: a$, while $M_{3,3} = V(K_3[2k], C[n-2k]) = \frac{1}{\binom{n}{2k}} =: b$.

Therefore $det(M) = -a^3 \left(\binom{2k}{k} - 2\right) < 0$ (where $a = \frac{k!k!(n-2k)!}{n!}$), contradicting Fedotov's inequality.

Relations de Hodge-Riemann associées aux (contre-)exemples ci-dessus

Prendre $P = C = [0, 1]^n$, le cube unité dans $\mathbb{R}^n$. Si $n = 2k$, on pose $K_1 = [0, e_1] + ... + [0, e_k]$ et $K_2 = [0, e_{k+1}] + ... + [0, e_n]$, et $K_3 = C = K_1 + K_2$. Pour que $\alpha = \sum x_i \left(D_{h_{K_i}}\right)^k$ vérifie l'hypothèse du thm6 ci-dessus, il suffit que pour tout $M_a = [0, a_1 e_1] + ... + [0, a_n e_n]$ (avec $a \in \mathbb{R}^n$, $a > 0$), on ait : $\sum x_i V(K_i[k], M_a[k-1], P[n-2k+1]) = 0$.

On aura alors (en vertu de la seconde partie de thm 5) que $\langle x, Mx \rangle > 0$ (pour ce meme $x \in \mathbb{R}^3$), avec $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ la matrice de Fedotov associée, qui vérifiera donc $(-1)^3 det(M) > 0$, sans quoi le critere de Sylvester serait vérifié (impossible puisque $\langle x, Mx \rangle > 0$, et $\langle x, My \rangle = 0$, avec $y = (0, 0, 1)$, signalent que M n'est pas hyperbolique). Le contre-exemple 2 ci-dessus détaille le calcul direct qui montre que $det(M) < 0$.

Cas particulier : $k = 2$ (et $n = 4$) Alors $V(K_1[2], M_a, C) = \frac{2}{4!}(a_3 + a_4)$ et de meme $V(K_2[2], M_a, C) = \frac{2}{4!}(a_1 + a_2)$ tandis que $V(K_3[2], M_a, C) = V(M_a, C[3]) = \frac{3!}{4!}(a_1 + ... + a_4)$. On en déduit que α avec $x = (3, 3, -1)$ convient.

et si $k \geq 3$? (cas $n = 2k$) Alors $V(K_1[k], M_a[k-1], C[n-2k+1]) = \sum_{\substack{|J|=k-1 \\ J \cap [k] = \emptyset}} \frac{1}{k\binom{2k}{k}} \sum_{j \in J} a_j$ et donc $v_1(M_a) := V(K_1[k], M_a[k-1], C[n-2k+1]) = \frac{1}{\binom{2k}{k}} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{j=k+1}^{n} a_j$.

De meme $v_2(M_a) = \frac{1}{\binom{2k}{k}} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{j=1}^{k} a_j$. Tandis que $v_3(M_a) = V(M_a[k-1], C[k+1]) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{j=1}^{n} a_j$.

On en déduit que $\alpha = \sum x_i \left(D_{h_{K_i}}\right)^k$ convient, avec $x = (a, a, -b)$ où $a = \binom{2k}{k}$ et $b = 2$.

Relation de Hodge-Riemann pour l'exemple 3 (ie $n > 2k$)

On pose $v_i(a) = V(K_i[k], M_a[k-1], C[n-2k+1])$, $i = 1, 2, 3$, avec K_1, K_2 les cubes k-dimensionnels du contre-exemple 3, et $K_3 = K_1 + K_2$. Alors :

$$v_1(a) = \frac{k!(k-1)!(n-2k+1)!}{n!} \sum_{\substack{|J|=k-1 \\ J \cap [k] = \emptyset}} \sum_{j \in J} a_j = c_1 \sum_{j=k+1}^{n} a_j \quad \text{avec } c_1 = \binom{n-k}{k-2} \binom{n}{k, k-1, n-2k+1}^{-1}.$$

De meme $v_2(a) = c_1 (\sum_{j=2k+1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{k} a_j)$.

Tandis que $v_3(a) = c_2\left(\sum_{j=2k+1}^{n} a_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2k} a_j\right)$ avec $c_2 = \binom{2k}{k}\binom{n-k-1}{k-2}\binom{n}{k,k-1,n-2k+1}^{-1}$.

On en déduit que pour tout $a > 0$: $c_2(v_1(a) + v_2(a)) = 2c_1 v_3(a)$. Et donc que $\alpha = \sum x_i \left(D_{h_{K_i}}\right)^k$ donne une relation de Hodge non triviale, en prenant $x = (c_2, c_2, -2c_1)$.

Le thm 5 dit alors que $\langle x, Mx\rangle > 0$. Par continuité, on peut prendre $a \geq 0$ plutot que $a > 0$, dans la relation de Hodge, et donc choisir $M_a = K_3$, qui donne $\langle x, My\rangle = 0$, avec $y = (0,0,1)$. On conclut comme[5] avant que M n'est pas hyperbolique, et donc (par Sylvester, et les autres inégalités déterminantales étant vérifiées, en vertu d'AF), $(-1)^3 det(M) > 0$, contrairement à la prédiction de Fedotov.

4 Appendix

Identité de polarisation. (avec $1 \leq k \leq n$)

On a pour tous $L_1, .., L_k, P_1, ..., P_{n-k}$:

$$V(L_1,...,L_k,P_1,...,P_{n-k}) = \frac{1}{k!}\sum_{\delta}(-1)^{k-|\delta|}V(K_\delta[k],P_1,...,P_{n-k}) \quad \text{où } K_\delta = \delta_1 L_1 + ... + \delta_k L_k$$

(le terme avec $\delta = 0_k$ donne $K_\delta = \emptyset$ donc $V(K_\delta[k], P_1, ..., P_k) = 0$)

démo : conséquence immédiate de la multilinéarité du volume mixte. Seul le terme avec $\delta = (1,...,1)$ fait apparaitre (en développant), le volume $V(L_1,...,L_k,P_1,...,P_{n-k})$, qui apparait $k!$ fois. Tout autre terme $V(L_{i_1},...,L_{i_k},P_1,...)$ avec $\{i_1,...,i_k\} \neq [k]$, a une contribution totale nulle, due aux facteurs $(-1)^{k-|\delta|}$.

On obtient en particulier que $V(L_1,...,L_n) = \frac{1}{n!}\sum_\delta Vol_n(K_\delta)$.

Si $k \leq n/2$, on peut appliquer la polarisation 2 fois : sur $(L_1,...,L_k)$ puis sur $(P_1,...,P_k)$. Chaque terme $V(K_\delta[k],P_1,...,P_{n-k})$ peut en effet etre récrit :

$$V(K_\delta[k],P_1,...,P_{n-k}) = \frac{1}{k!}\sum_{\epsilon}(-1)^{k-|\epsilon|}V(K_\delta[k],P_\epsilon[k],P_{k+1},...,P_{n-k})$$

(avec $P_\epsilon = \epsilon_1 P_1 + ... + \epsilon_k P_k$). L'un dans l'autre cela donne :

$$V(L_1,...,L_k,P_1,...,P_{n-k}) = \frac{1}{(k!)^2}\sum_{\epsilon,\delta}(-1)^{|\delta|+|\epsilon|}V(K_\delta[k],P_\epsilon[k],P_{k+1},...,P_{n-2k})$$

qui est l'identité de "double" polarisation utilisée dans la démo ($k \geq 3$) du thm 7.

Démo du lemme utilisé pour l'équivalence des deux énoncés du thm de Timorin.

[5] ici on triche car on n'a pas $M > 0$, ... il convient de remplacer K_1, K_2, K_3 par K_1', K_2', K_3' (n-dimensionnels) pour appliquer l'argument. Le calcul montre qu'on peut aussi trouver $x \in \mathbb{R}^3$ qui donne une relation de Hodge non triviale, pour des K_i' bien choisis. Si $n = 2k$, il suffit de prendre $K_1' = K_1 + \epsilon K_2$, et $K_2' = K_2 + \epsilon K_1$.

On rappelle l'énoncé : Soit $P \in \mathcal{K}_n$, un polytope simple. Soit $\alpha = \sum \alpha_I D_I$ un op. diff. homogene d'ordre $k \geq 1$. Alors il existe $m \geq 1$, $K_1, ..., K_m \in \mathcal{P}(P)$, des polytopes, et $x \in \mathbb{R}^m$, tels que $\alpha = \sum x_i \left(D_{h_{K_i}} \right)^k$. Autrement dit, tout opérateur diiférentiel hom. d'ordre k, est somme de puissances k-iemes d'op d'ordre 1.

Proof. Démo Soit $\alpha = \sum_I \alpha_I D_I$ un opérateur diff. hom. d'ordre k. La somme porte sur les $I \in [N]^k$. On rappelle que $D_I := D_{e_{i_1}} .. D_{e_{i_k}}$, si $i_1 \leq ... \leq i_k$ sont les éléments de I (comptés avec répétitions). On rappelle qu'il existe $\epsilon > 0$, $P_0 = \epsilon^{-1} P, L_1, ..., L_N \in \mathcal{P}(P)$, tels que $D_{e_i} = D_{h_i} - D_{h_0}$ pour tout $1 \leq i \leq N$, en notant $D_{h_i} = D_{h_{L_i}}$, et $D_{h_0} = D_{P_0}$.

Donc $\alpha = \sum_I \alpha_I (D_{h_{j_1}} - D_{h_0}) ... (D_{h_{j_k}} - D_{h_0})$. On peut développer. Il vient :

$$\alpha = \sum_{l=0}^{k} \sum_{|J|=l} \beta_J D_{h_{j_1}} ... D_{h_{j_l}} D_{h_0}^{k-l} = \sum_{J'} \beta_{J'} D_{h_{j_1}} ... D_{h_{j_k}} \quad \text{avec } \beta_J = (-1)^{k-|J|} \sum_{J \subset I} \alpha_I$$

avec J qui décrit les multisets de $\{1, ..., N\}$ de taille $l \leq k$, et J' les multi-sets de taille k de $\{0, 1, ..., N\}$ (J obtenu de J' en effacant les occurences de 0).

Il s'agit ensuite de voir que pour tout $L_1, ..., L_k \in \mathcal{P}(P)$, l'op. $D_{h_1} ... D_{h_k}$ se récrit comme une somme de $(D_{h_K})^k$.

C'est en fait simplement dû aux faits que les D_h commutent (tous) ici, et que $D_{h_1 + h_2} = D_{h_1} + D_{h_2}$ pour tous h_1, h_2 (vecteurs de support ou non). En effet ces deux propriétés impliquent qu'on a l'identité de polarisation :

$$D_{h_1} ... D_{h_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\delta \in \{0,1\}^k} (D_{h_\delta})^k \quad \text{où } h_\delta := \delta_1 h_1 + ... + \delta_k h_k, \text{ et où } D_0 = 0 \text{ par convention.}$$

Ce qui appliqué à $(h_1, ..., h_k) = (h_{j_1}, ..., h_{j_k}) = (h_{L_{j_1}}, ..., h_{L_{j_k}})$, où $L_0 = \epsilon^{-1} P$ (noté P_0 tout à l'heure...), donne :

$$D_{h_{j_1}} ... D_{h_{j_k}} = \frac{1}{k!} \sum_{\delta \in \{0,1\}^k} \left(D_{h_{L_\delta}} \right)^k \quad \text{avec } L_\delta := \delta_1 L_{j_1} + ... + \delta_k L_{j_k}$$

(noter que pour tout $\delta \neq 0$, $L_\delta \in \mathcal{P}(P)$ puisque les L_i y sont tous)

On obtient la somme annoncée par le lemme, avec $m \leq (2^k - 1)\binom{N+k}{k}$ termes dans la somme.

□

Références :

(Tim) V. A. Timorin, *An analogue of the Hodge-Riemann relations for simple convex polytopes*, 1999.

(RvH) R. van Handel, *Shephard's inequalities, Hodge-Riemann relations, and a conjecture of Fedotov*, 2021.