

# Comportement asymptotique des Zonotopes dans un hypercube

Théophile Buffière

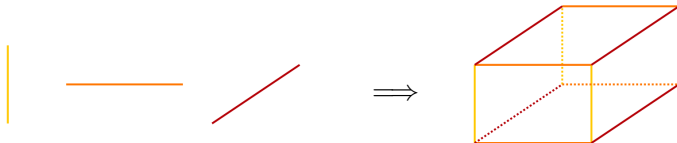
LIPN & LAGA (Univ. Sorbonne Paris Nord)

# Quoi ? Pourquoi ?

Comportement asymptotique en Géométrie discrète:

## Definition

Un zonotope est une somme de Minkowski de segments de  $\mathbb{Z}^d$

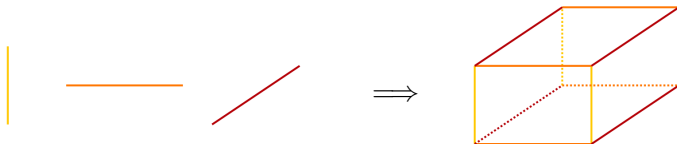


# Quoi ? Pourquoi ?

Comportement asymptotique en Géométrie discrète:

## Definition

Un zonotope est une somme de Minkowski de segments de  $\mathbb{Z}^d$



Intérêt d'une telle étude :

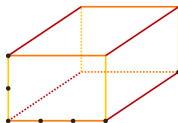
- Résoudre des conjectures (type Hirsch)
- Parce que ce sont de bons "représentants" des polytopes (conjecture pour l'algorithme du simplexe...)

- 1 Énumération des Zonotopes
- 2 Aspects arithmétiques
- 3 Forme limite, Convergences probabilistes

- ① Enumération des Zonotopes
- ② Aspects arithmétiques
- ③ Forme limite, Convergences probabilistes

# Méthode symbolique

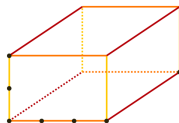
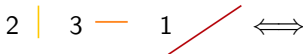
Définition combinatoire : ensemble non trié, avec doublons possibles, de segments **primitifs** (un multiset).



# Méthode symbolique

Définition combinatoire : ensemble non trié, avec doublons possibles, de segments **primitifs** (un multiset).

(0,0,1) (1,0,0) (2,3,0)



Méthode symbolique :

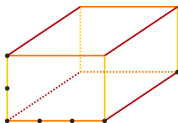
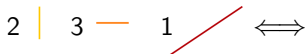
Arbres binaires  $\mathcal{T} \rightarrow$

$$T(x) = \sum_n t_n x^n \text{ avec } t_n = |\{t \in \mathcal{T}, |t| = n\}|.$$

# Méthode symbolique

Définition combinatoire : ensemble non trié, avec doublons possibles, de segments **primitifs** (un multiset).

(0,0,1) (1,0,0) (2,3,0)



Méthode symbolique :

Arbres binaires  $\mathcal{T} \rightarrow$

$$T(x) = \sum_n t_n x^n \text{ avec } t_n = |\{t \in \mathcal{T}, |t| = n\}|.$$

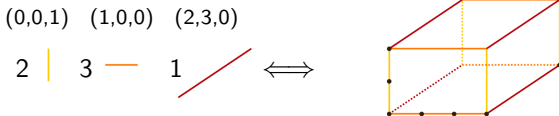
$\mathcal{T} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rightarrow$

$$t_n = a_n + b_n \text{ donc } T(x) = A(x) + B(x).$$



# Méthode symbolique

Définition combinatoire : ensemble non trié, avec doublons possibles, de segments **primitifs** (un multiset).



Méthode symbolique :

Arbres binaires  $\mathcal{T} \rightarrow$

$$T(x) = \sum_n t_n x^n \text{ avec } t_n = |\{t \in \mathcal{T}, |t| = n\}|.$$

$\mathcal{T} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rightarrow$

$$t_n = a_n + b_n \text{ donc } T(x) = A(x) + B(x).$$

$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \mathcal{T} \times \{t^1\} \times \mathcal{T} \rightarrow$

$$T(x) = 1 + xT(x)^2.$$

## Fonctions génératrices combinatoires

La fonction du multiset :

Ici multidimensionnel, donc une taille pour chaque coordonnée.

On introduit la séquence de  $\alpha$ :  $SEQ(\alpha) = \{\emptyset, \alpha, \{\alpha, \alpha\} \dots\}$ .

## Fonctions génératrices combinatoires

La fonction du multiset :

Ici multidimensionnel, donc une taille pour chaque coordonnée.

On introduit la séquence de  $\alpha$ :  $SEQ(\alpha) = \{\emptyset, \alpha, \{\alpha, \alpha\} \dots\}$ .

Fonction génératrice  $S(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x^{|\alpha|})^n = \frac{1}{1-x^{|\alpha|}}$ .

$$MULTISET(\mathcal{P}^d) = \prod_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}^d} SEQ(\mathbf{p})$$

.

## Fonctions génératrices combinatoires

La fonction du multiset :

Ici multidimensionnel, donc une taille pour chaque coordonnée.

On introduit la séquence de  $\alpha$ :  $SEQ(\alpha) = \{\emptyset, \alpha, \{\alpha, \alpha\} \dots\}$ .

Fonction génératrice  $S(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x^{|\alpha|})^n = \frac{1}{1-x^{|\alpha|}}$ .

$$MULTISET(\mathcal{P}^d) = \prod_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}^d} SEQ(\mathbf{p})$$

.

$$Z(x) = \prod_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}^d} \frac{1}{1 - x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_d^{p_d}}$$

# Probabilités "de Boltzmann"

Fonction multiplicité:  $w_z : \mathbf{p} \mapsto w_z(\mathbf{p})$ .

Point d'arrivée du zonotope  $\mathbf{X}(z) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}^d} w_z(\mathbf{p}) \mathbf{p}$ .

Probabilité d'avoir le Zonotope  $z$  avec distribution selon Boltzmann

$$P_{\mathbf{t}}(z) = \frac{1}{C(\mathbf{t})} e^{-\mathbf{t} \cdot \mathbf{X}(z)}$$

## Probabilités "de Boltzmann"

Fonction multiplicité:  $w_z : \mathbf{p} \mapsto w_z(\mathbf{p})$ .

Point d'arrivée du zonotope  $\mathbf{X}(z) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}^d} w_z(\mathbf{p}) \mathbf{p}$ .

Probabilité d'avoir le Zonotope  $z$  avec distribution selon Boltzmann

$$P_{\mathbf{t}}(z) = \frac{1}{C(\mathbf{t})} e^{-\mathbf{t} \cdot \mathbf{X}(z)} = \frac{1}{Z(e^{-\mathbf{t}})} e^{-\mathbf{t} \cdot \mathbf{X}(z)}.$$

# Probabilités "de Boltzmann"

Fonction multiplicité:  $w_z : \mathbf{p} \mapsto w_z(\mathbf{p})$ .

Point d'arrivée du zonotope  $\mathbf{X}(z) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}^d} w_z(\mathbf{p}) \mathbf{p}$ .

Probabilité d'avoir le Zonotope  $z$  avec distribution selon Boltzmann

$$P_{\mathbf{t}}(z) = \frac{1}{C(\mathbf{t})} e^{-\mathbf{t} \cdot \mathbf{X}(z)} = \frac{1}{Z(e^{-\mathbf{t}})} e^{-\mathbf{t} \cdot \mathbf{X}(z)}.$$

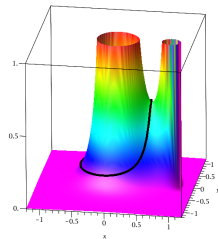
- Soit  $Y$  zonotope aléatoire,  $P_{\mathbf{t}}(Y = z | \mathbf{X}) = \frac{P_{\mathbf{t}}(Y=z, \mathbf{X})}{P_{\mathbf{t}}(\mathbf{X})} \rightarrow$   
Distribution uniforme.
- Intéret : Génération aléatoire

# Méthode du point col

- Formule de Cauchy:

$$[x_i^n]Z(\mathbf{x}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_n} Z(\mathbf{x}) x_i^{-n-1} dx_i.$$

- Approximation à une gaussienne.
- Calcul de l'intégrale



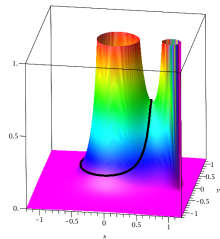


# Méthode du point col

- Formule de Cauchy:

$$[x_i^n]Z(\mathbf{x}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_n} Z(\mathbf{x}) x_i^{-n-1} d\mathbf{x}_i.$$

- Approximation à une gaussienne.
- Calcul de l'intégrale



Le chemin choisi passe par le point-col:  $\mathbf{x}_n$  (resp.  $\mathbf{t}_n$ ):

Les dérivées de  $Z(\mathbf{x})x_i^{n-1}$  s'annulent  $\iff$  L'espérance de  $|z|$  est  $n$ .

## Résultat et contexte

### Hardy-Ramanujan, 1918

Le nombre de partition de  $n$  est  $\frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\left(\frac{2n}{3}\right)^{1/2}\right) (1 + o(1))$ .

## Résultat et contexte

### Hardy-Ramanujan, 1918

Le nombre de partition de  $n$  est  $\frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\left(\frac{2n}{3}\right)^{1/2}\right) (1 + o(1))$ .

### Bàràny, Bureaux, Lund, 2018

Le nombre de zonotope de taille  $n$  est  $\exp\left(\alpha n^{\frac{d}{d+1}} + o(1)\right)$ .

$$\alpha_d n^{\beta_d} \exp\left(Q_d\left(n^{\frac{1}{d+1}}\right) + I_{\text{crit}}(d, t)\right).$$

## Résultat et contexte

### Hardy-Ramanujan, 1918

Le nombre de partition de  $n$  est  $\frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\left(\frac{2n}{3}\right)^{1/2}\right) (1 + o(1))$ .

### Bàràny, Bureaux, Lund, 2018

Le nombre de zonotope de taille  $n$  est  $\exp\left(\alpha n^{\frac{d}{d+1}} + o(1)\right)$ .

$$\alpha_d n^{\beta_d} \exp\left(Q_d\left(n^{\frac{1}{d+1}}\right) + I_{\text{crit}}(d, t)\right).$$

$Q_d\left(n^{\frac{1}{d+1}}\right)$  :

$Q_d$  polynome de degré  $d$ .

## Résultat et contexte

### Hardy-Ramanujan, 1918

Le nombre de partition de  $n$  est  $\frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\left(\frac{2n}{3}\right)^{1/2}\right) (1 + o(1))$ .

### Bàràny, Bureaux, Lund, 2018

Le nombre de zonotope de taille  $n$  est  $\exp\left(\alpha n^{\frac{d}{d+1}} + o(1)\right)$ .

$$\alpha_d n^{\beta_d} \exp\left(Q_d\left(n^{\frac{1}{d+1}}\right) + I_{\text{crit}}(d, t)\right).$$

$Q_d\left(n^{\frac{1}{d+1}}\right)$  :

$Q_d$  polynome de degré  $d$ .

$I_{\text{crit}}(d, t)$  :

somme de résidues sur les zéros non-triviaux de  $\zeta$ .

- 1 Énumération des Zonotopes
- 2 Aspects arithmétiques
- 3 Forme limite, Convergences probabilistes

# Transformée de Mellin

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_n} Z(\mathbf{x}) x_i^{-n-1} dx_i \longrightarrow \frac{Z(e^{-t_n}) e^{nt_n}}{\sqrt{(2\pi)^d |\Delta Z(e^{-t_n})|}}$$

# Transformée de Mellin

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_n} Z(\mathbf{x}) x_i^{-n-1} dx_i \longrightarrow \frac{Z(e^{-t_n}) e^{nt_n}}{\sqrt{(2\pi)^d |\Delta Z(e^{-t_n})|}}$$

Développement asymptotique de  $Z(e^{-t_n}) = \prod_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}^d} (1 - e^{-t_n \cdot \mathbf{p}})^{-1}$ .



# Transformée de Mellin

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_n} Z(\mathbf{x}) x_i^{-n-1} dx_i \longrightarrow \frac{Z(e^{-t_n}) e^{nt_n}}{\sqrt{(2\pi)^d |\Delta Z(e^{-t_n})|}}$$

Développement asymptotique de  $Z(e^{-t_n}) = \prod_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}^d} (1 - e^{-t_n \cdot \mathbf{p}})^{-1}$ .

Transformée de Mellin (attention, 1 dimension):

$$\mathcal{M}[f(e^{-t})](s) = \int_0^{+\infty} f(e^{-t}) t^{s-1} dt.$$

Relation entre développement asymptotique et pôles de la Transformée :

$$Z(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ax^\alpha \log(x)^\beta \longleftrightarrow \mathcal{M}[Z(x)](s) \underset{s \rightarrow \alpha}{\sim} \frac{(-1)^k k! a}{(s + \alpha)^{k+1}}$$

# Polynômes eulériens

## Definition

Le nombre Eulerien  $A(n, m)$  est le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_n$  t.q. il y a exactement  $m$  ascendants ( $m$  éléments plus grand que le précédent). On appelle polynôme Eulerien:

$$A_n(t) = \sum_{m=0}^{n-1} A(n, m)t^{m+1}$$

# Polynômes eulériens

## Definition

Le nombre Eulerien  $A(n, m)$  est le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_n$  t.q. il y a exactement  $m$  ascendants ( $m$  éléments plus grand que le précédent). On appelle polynôme Eulerien:

$$A_n(t) = \sum_{m=0}^{n-1} A(n, m)t^{m+1}$$

$$A_0(x) = x, A_1(x) = x, A_2(x) = x^2 + x \dots$$

$$\text{Euler les découvre avec : } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(t)}{t} \cdot \frac{x^n}{n!} = \frac{t-1}{t-e^{(t-1)x}}.$$

# Polynômes eulériens

## Definition

Le nombre Eulerien  $A(n, m)$  est le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_n$  t.q. il y a exactement  $m$  ascendants ( $m$  éléments plus grand que le précédent). On appelle polynôme Eulerien:

$$A_n(t) = \sum_{m=0}^{n-1} A(n, m)t^{m+1}$$

$$A_0(x) = x, A_1(x) = x, A_2(x) = x^2 + x \dots$$

$$\text{Euler les découvre avec : } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(t)}{t} \cdot \frac{x^n}{n!} = \frac{t-1}{t-e^{(t-1)x}}.$$

$$\text{En particulier } \sum_{n=0}^{+\infty} k^n x^k = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

# Sommes sur les nombres premiers et densité des nombres premiers

$$\sum_{\substack{p_1 \wedge \dots \wedge p_d = 1 \\ \sum p_i = n}} p_1^k x^n \xrightarrow{\mathbb{N} \times \mathcal{P}^d \xrightarrow{\text{bij}} \mathbb{N}^d} \sum_{\sum p_i = n} p_1^k x^n = \frac{A_k(x) \prod_{i=2}^d A_i(x)}{(1-x)^{d+k}}. \quad (1)$$

# Sommes sur les nombres premiers et densité des nombres premiers

$$\sum_{\substack{p_1 \wedge \dots \wedge p_d = 1 \\ \sum p_i = n}} p_1^k x^n \xrightarrow{\mathbb{N} \times \mathcal{P}^d \xrightarrow{\text{bij}} \mathbb{N}^d} \sum_{\sum p_i = n} p_1^k x^n = \frac{A_k(x) \prod_{i=2}^d A_i(x)}{(1-x)^{d+k}}. \quad (1)$$

Pour  $k = 0$ , nombre de vecteur primitif de taille  $n$  (en norme  $L^1$ ).

# Sommes sur les nombres premiers et densité des nombres premiers

$$\sum_{\substack{p_1 \wedge \dots \wedge p_d = 1 \\ \sum p_i = n}} p_1^k x^n \xrightarrow{\mathbb{N} \times \mathcal{P}^d \xrightarrow{\text{bij}} \mathbb{N}^d} \sum_{\sum p_i = n} p_1^k x^n = \frac{A_k(x) \prod_{i=2}^d A_i(x)}{(1-x)^{d+k}}. \quad (1)$$

Pour  $k = 0$ , nombre de vecteur primitif de taille  $n$  (en norme  $L^1$ ).

- Le polynôme vient de

$$\frac{\prod_{i=1}^d A_i(x)}{(1-x)^{d+k}} = \sum \left( \prod_{i=1}^d A_i(x) \binom{d+k+m-1}{d+k-1} x^m \right).$$

# Sommes sur les nombres premiers et densité des nombres premiers

$$\sum_{\substack{p_1 \wedge \dots \wedge p_d = 1 \\ \sum p_i = n}} p_1^k x^n \xrightarrow{\mathbb{N} \times \mathcal{P}^d \xrightarrow{bij} \mathbb{N}^d} \sum_{\sum p_i = n} p_1^k x^n = \frac{A_k(x) \prod_{i=2}^d A_i(x)}{(1-x)^{d+k}}. \quad (1)$$

Pour  $k = 0$ , nombre de vecteur primitif de taille  $n$  (en norme  $L^1$ ).

- Le polynôme vient de

$$\frac{\prod_{i=1}^d A_i(x)}{(1-x)^{d+k}} = \sum \left( \prod_{i=1}^d A_i(x) \binom{d+k+m-1}{d+k-1} x^m \right).$$

- Développement asymp. par T.M pour tout type de somme comme (1).



# Transformée de Mellin et fonction $\zeta$

Deuxième propriété de la T.M: propriété harmonique

$$\sum_{k \geq 0} k^i f(x)^{kn} \xrightarrow{\mathcal{M}} \zeta(s-i) \mathcal{M}[f(x)^n](s)$$

# Transformée de Mellin et fonction $\zeta$

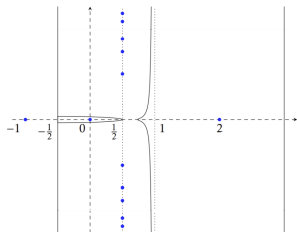
Deuxième propriété de la T.M: propriété harmonique

$$\sum_{k \geq 0} k^i f(x)^{kn} \xrightarrow{\mathcal{M}} \zeta(s-i) \mathcal{M}[f(x)^n](s)$$

Il y a en fin de parcours la bande critique:

$\lambda$  l'ensemble des zéros non-triviaux.

$$I_{\text{crit}}(d, t_n) = \sum_{r \in \Lambda} \text{Res}(\mathcal{M}[Z(e^{-t})](r)) (n)^{\frac{r}{d}}$$



## Lien à l'énumération

### Théorème

*L'hypothèse de Riemann est vraie ssi  $\forall \epsilon > 0, I_{crit}(d, t_n) = O\left(n^{\frac{1}{2d} + \epsilon}\right)$ .*

## Lien à l'énumération

### Théorème

*L'hypothèse de Riemann est vraie ssi  $\forall \epsilon > 0, I_{crit}(d, t_n) = O\left(n^{\frac{1}{2d} + \epsilon}\right)$ .*

Réalité:

- Pour les  $d$  petits :

$$I_{crit}(d, t_n) \approx \text{Res}(\mathcal{M}[Z(e^{-t})])(r_1)(n)^{\frac{r_1}{d}} \approx 10^{-10} n^{\frac{1}{2d}}.$$

## Lien à l'énumération

### Théorème

*L'hypothèse de Riemann est vraie ssi  $\forall \epsilon > 0, I_{crit}(d, t_n) = O\left(n^{\frac{1}{2d} + \epsilon}\right)$ .*

Réalité:

- Pour les  $d$  petits :  

$$I_{crit}(d, t_n) \approx \text{Res}(\mathcal{M}[Z(e^{-t})](r_1))(n)^{\frac{1}{d}} \approx 10^{-10} n^{\frac{1}{2d}}.$$
- Pour les autres, la vitesse de convergence très lente.

- 1 Énumération des Zonotopes
- 2 Aspects arithmétiques
- 3 Forme limite, Convergences probabilistes**

## Paramètres asymptotiques

Quantification de paramètres avec des variables auxiliaires:  
 $Z(\mathbf{x}) \rightarrow Z(u, \mathbf{x})$ .

## Paramètres asymptotiques

Quantification de paramètres avec des variables auxiliaires:  
 $Z(\mathbf{x}) \rightarrow Z(u, \mathbf{x})$ .

### Diamètre moyen des zonotopes

La moyenne (resp. variance) du diamètre d'un zonotope de taille  $n$  est  $\mu = \frac{d+1\sqrt{\kappa_d}}{\zeta(d+1)} n^{\frac{d}{d+1}}$  (resp.  $(1 - \frac{1}{2^d}) \mu$ ).



## Paramètres asymptotiques

Quantification de paramètres avec des variables auxiliaires:  
 $Z(\mathbf{x}) \rightarrow Z(u, \mathbf{x})$ .

### Diamètre moyen des zonotopes

La moyenne (resp. variance) du diamètre d'un zonotope de taille  $n$  est  $\mu = \frac{d+1\sqrt{\kappa_d}}{\zeta(d+1)} n^{\frac{d}{d+1}}$  (resp.  $(1 - \frac{1}{2^d}) \mu$ ).

### Multiplicité moyenne de $\mathbf{p}$

La moyenne (resp. variance) de la multiplicité de  $\mathbf{p}$  est

$$\mu = \frac{n^{\frac{1}{d+1}}}{\kappa_d^{\frac{1}{d+1}} \|\mathbf{v}_0\|_1} \text{ (resp. } \mu^2 \text{ )}.$$

## Forme limite - approche probabiliste

Méthode du col donne immédiatement la convergence en loi vers une gaussienne centrée sur la forme limite.

Mais pas de convergence uniforme, retour aux probabilités ( $T$  frontière du zonotope).

## Forme limite - approche probabiliste

Méthode du col donne immédiatement la convergence en loi vers une gaussienne centrée sur la forme limite.

Mais pas de convergence uniforme, retour aux probabilités ( $T$  frontière du zonotope).

$$\begin{aligned}
 P_t(\text{dist}(T_z, T_{\text{lim}}) > \epsilon | \mathbf{X}(z) = \mathbf{n}) &= \frac{P_t(\text{dist}(T_z, T_{\text{lim}}) > \epsilon, \mathbf{X}(z) = \mathbf{n})}{P_t(\mathbf{X}(z) = \mathbf{n})} \\
 &\leq \frac{P_t(\text{dist}(T_z, T_{\text{lim}}) > \epsilon)}{P_t(\mathbf{X}(z) = \mathbf{n})}
 \end{aligned}$$

## Forme limite - approche probabiliste

Méthode du col donne immédiatement la convergence en loi vers une gaussienne centrée sur la forme limite.

Mais pas de convergence uniforme, retour aux probabilités ( $T$  frontière du zonotope).

$$\begin{aligned}
 P_t(\text{dist}(T_z, T_{\text{lim}}) > \epsilon | \mathbf{X}(z) = \mathbf{n}) &= \frac{P_t(\text{dist}(T_z, T_{\text{lim}}) > \epsilon, \mathbf{X}(z) = \mathbf{n})}{P_t(\mathbf{X}(z) = \mathbf{n})} \\
 &\leq \frac{P_t(\text{dist}(T_z, T_{\text{lim}}) > \epsilon)}{P_t(\mathbf{X}(z) = \mathbf{n})}
 \end{aligned}$$

- ① Dénominateur de l'ordre de l'inverse de l'écart-type.
- ② Numérateur : inégalité de Markov sur les queues de distribution (l'ordre de l'inverse de la variance).

# Forme limite

## Théorème

*Soit  $\epsilon > 0$ ,  $\mathbf{Z}$  zonotope aléatoire, il existe un ensemble convexe  $T_0$  tel que*

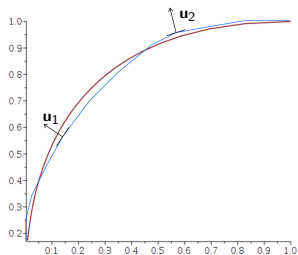
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left( \mathbf{Z} = z, \text{dist} \left( \frac{1}{n} T_z, T_0 \right) > \epsilon \right) = 0.$$

## Maintenant : Variations autour de la forme limite

$\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  deux vecteurs:

Point tangent  $A_{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{A}_{\mathbf{u}}$  écart renormalisé:

- $\mathbb{E}[\tilde{A}_{\mathbf{u}}] = 0$
- $\tilde{A}_{\mathbf{u}_2} - \tilde{A}_{\mathbf{u}_1}$  indépendant de  $\tilde{A}_{\mathbf{u}_1}$ , et de moyenne nulle.

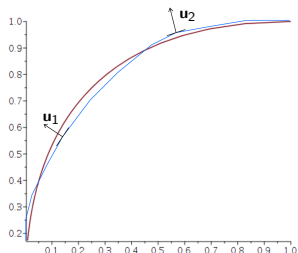


## Maintenant : Variations autour de la forme limite

$\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  deux vecteurs:

Point tangent  $A_{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{A}_{\mathbf{u}}$  écart renormalisé:

- $\mathbb{E}[\tilde{A}_{\mathbf{u}}] = 0$
- $\tilde{A}_{\mathbf{u}_2} - \tilde{A}_{\mathbf{u}_1}$  indépendant de  $\tilde{A}_{\mathbf{u}_1}$ , et de moyenne nulle.



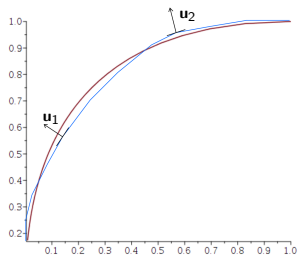
⇒ converge vers processus stochastique gaussien de dimension 2.

## Maintenant : Variations autour de la forme limite

$\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  deux vecteurs:

Point tangent  $A_{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{A}_{\mathbf{u}}$  écart renormalisé:

- $\mathbb{E}[\tilde{A}_{\mathbf{u}}] = 0$
- $\tilde{A}_{\mathbf{u}_2} - \tilde{A}_{\mathbf{u}_1}$  indépendant de  $\tilde{A}_{\mathbf{u}_1}$ , et de moyenne nulle.



$\Rightarrow$  converge vers processus stochastique gaussien de dimension 2.  
Maintenant: dimensions supérieures, pour détailler la structure de covariance du processus.

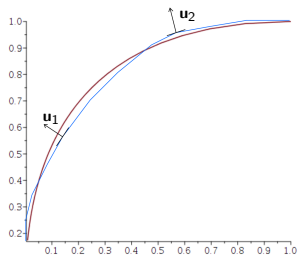


## Maintenant : Variations autour de la forme limite

$\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  deux vecteurs:

Point tangent  $A_{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{A}_{\mathbf{u}}$  écart renormalisé:

- $\mathbb{E}[\tilde{A}_{\mathbf{u}}] = 0$
- $\tilde{A}_{\mathbf{u}_2} - \tilde{A}_{\mathbf{u}_1}$  indépendant de  $\tilde{A}_{\mathbf{u}_1}$ , et de moyenne nulle.



⇒ converge vers processus stochastique gaussien de dimension 2.  
 Maintenant: dimensions supérieures, pour détailler la structure de covariance du processus.

Merci !