Séminaire DGeCo

Associèdres de graphes et d'édifices

Germain POULLOT

22 octobre 2020

Cône de type des édifices

1. Associaèdre
   - Familles de Catalan et mutations
   - Détour par le permutoèdre
2. Associèdres de graphe
3. Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
   - Réalisation par les sommets
   - Autres points de vue
4. Édifices
   - Complexe nidifié
   - Associaèdres d'édifice
5. Transformations d'édifices et d'associaèdres

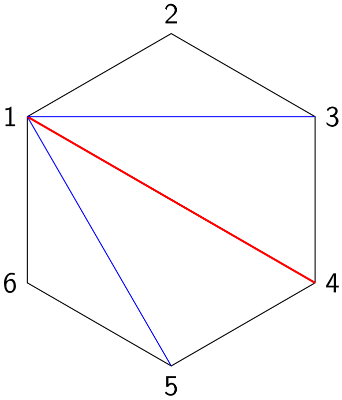
Séminaire DGeCo

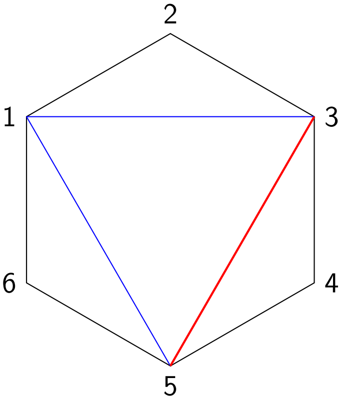
1. Associaèdre
   - Familles de Catalan et mutations
   - Détour par le permutoèdre
2. Associèdres de graphe
3. Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
   - Réalisation par les sommets
   - Autres points de vue
4. Édifices
   - Complexe nidifié
   - Associaèdres d'édifice
5. Transformations d'édifices et d'associaèdres

Séminaire DGeCo

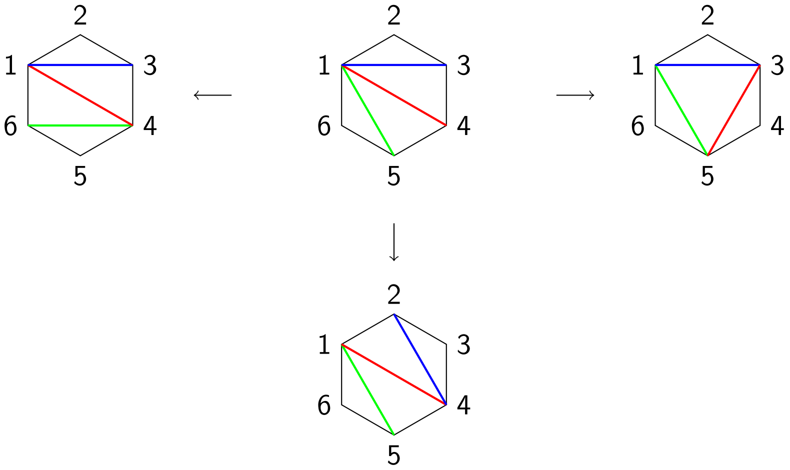
1. Associaèdre
   - Familles de Catalan et mutations
   - Détour par le permutoèdre
2. Associèdres de graphe
3. Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
   - Réalisation par les sommets
   - Autres points de vue
4. Édifices
   - Complexe nidifié
   - Associaèdres d'édifice
5. Transformations d'édifices et d'associaèdres

Triangulations





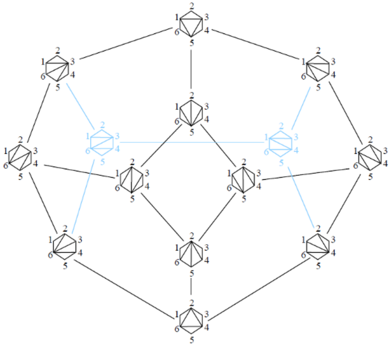
Triangulations

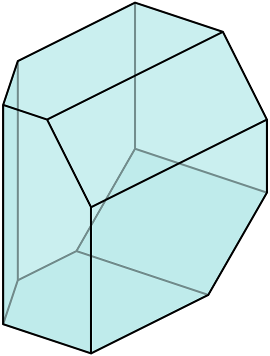


Associaèdres

Associaèdres

L'*associaèdre* A_n est le polytope dont les sommets correspondent à une famille de Catalan et les arêtes à leur relation de mutation.

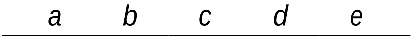




$a((bc)(de))$

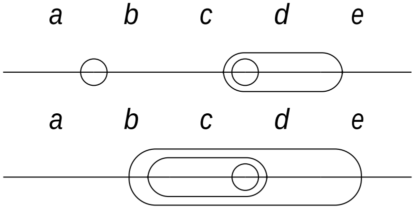
Parenthèsages et chemins

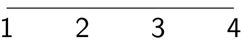
On peut encoder chaque parenthèsage sur le chemin suivant.



$(ab)((cd)e)$

$a((b(cd))e)$

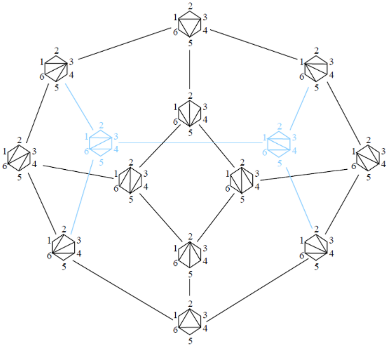


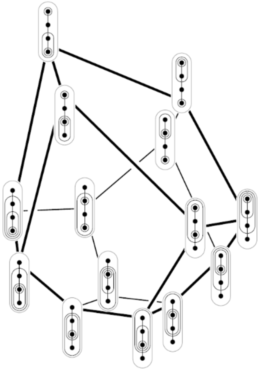


Associaèdres

Associaèdres

L'*associaèdre* A_n est le polytope dont les sommets correspondent à une famille de Catalan et les arêtes à leur relation de mutation.



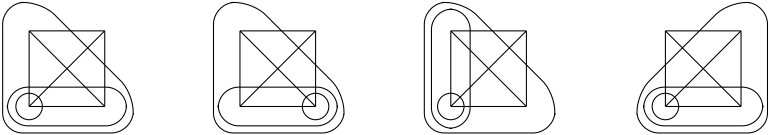


Séminaire DGeCo

1. Associaèdre
   - Familles de Catalan et mutations
   - Détour par le permutoèdre
2. Associèdres de graphe
3. Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
   - Réalisation par les sommets
   - Autres points de vue
4. Édifices
   - Complexe nidifié
   - Associaèdres d'édifice
5. Transformations d'édifices et d'associaèdres

Permutoèdres

Le permutoèdre P_n est le polytope dont les sommets sont $(\sigma(i))_i$ pour $\sigma \in S_n$.



Identité $= (1\ 2)$ $= (2\ 3)$ $= (3\ 4)$

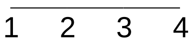
On peut utiliser les éléments de S_n pour effectuer une action sur le schéma de gauche, par une suite de transpositions $(i\ i+1)$.

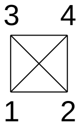
Remarque : $(1\ 2)$ et $(3\ 4)$ commutent, et leurs actions aussi.

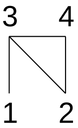
Permutoèdres

Le permutoèdre P_n est le polytope dont les sommets sont $(\sigma(i))_i$ pour $\sigma \in S_n$.

On peut encoder l'associaèdre en un chemin, et le permutoèdre en le graphe complet. Y a-t-il d'autres polytopes connus réalisables de cette manière ? Peut-on généraliser à un graphe quelconque ?







1 Associaèdre
- Familles de Catalan et mutations
- Détour par le permutoèdre

2 Associèdres de graphe

3 Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
- Réalisation par les sommets
- Autres points de vue

4 Édi ces
- Complexe nidi é
- Associaèdres d'édi ce

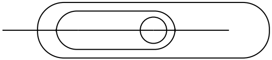
5 Transformations d'édi ces et d'associaèdres

Définition (Tube)

Un tube d'un graphe G est un sous-graphe induit connexe propre de G.

L'ensemble des tubes est un ensemble partiellement ordonné (POSET).

Si 2 tubes t_1 et t_2 s'intersectent, alors $t_1 \cup t_2$ est un tube (mais $t_1 \cap t_2$ pas nécessairement).



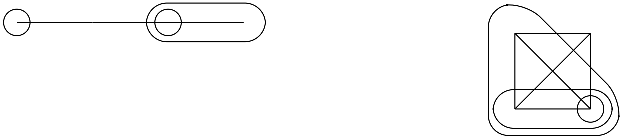
Compatibilité des tubes

Deux tubes t_1 et t_2 sont compatibles si :

- <u>OU</u> Ils sont nidi és (i.e. $t_1 \subsetneq t_2$ ou $t_2 \subsetneq t_1$)
- <u>OU</u> Ils sont disjoints ($t_1 \cap t_2 = \emptyset$) et non-adjacents ($t_1 \cup t_2$ n'est pas un tube)

Dé nition (Tubage)

Un tubage d'un graphe G est un ensemble de tubes 2 à 2 compatibles.



Quel est le treillis de faces de ce polytope ?

- Sommets' 3-tubages
- Arêtes' 2-tubages
- Faces' 1-tubages
- Polyèdre' 0-tubage

) Isomorphisme de POSET : treillis de faces ' treillis des tubages

L'ensemble des tubages forme un treillis pour l'inclusion[1].

Les tubages maximaux ont tous la même taille $|G| - 1$.

Les tubes sont les atomes du treillis des tubages.

Treillis des tubages

Le treillis (inverse) des tubages du chemin est le treillis de faces de l'associaèdre.
Le treillis (inverse) des tubages du graphe complet est le treillis de faces du permutaèdre.

1. Si on ajoute un élément maximal artificiel et un élément minimal correspondant à $\emptyset$.

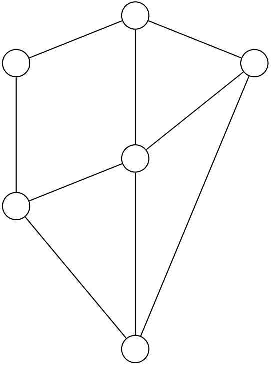
Associaèdres de graphe

L'associaèdre d'un graphe G est le polytope dont le treillis de faces est le treillis (inverse) des tubages du graphe G.

Outre l'associaèdre, on retrouve beaucoup de polytopes connus (permutaèdre, stellaèdre, cycloèdre,...).

Cf Carr & Devadoss 2004, PPPP19,...

Pour un graphe G donné, est-ce qu'il existe un associaèdre de graphe pour G ?
Comment en calculer un explicitement ?



1 Associaèdre
- Familles de Catalan et mutations
- Détour par le permutoèdre

2 Associèdres de graphe

3 Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
- Réalisation par les sommets
- Autres points de vue

4 Édi ces
- Complexe nidi é
- Associaèdres d'édi ce

5 Transformations d'édi ces et d'associaèdres

1 Associaèdre
Familles de Catalan et mutations
Détour par le permutoèdre
2 Associèdres de graphe
3 Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
Réalisation par les sommets
Autres points de vue
4 Édi ces
Complexe nidi é
Associaèdres d'édi ce
5 Transformations d'édi ces et d'associaèdres

Corollaire (Augmentation par singleton)

Soit G un graphe de sommets V. Soit T un tubage maximal d'un graphe G. La fonction φ_T est bijective :

$$\varphi_T : \begin{array}{ccc} T & \to & V \\ t & \mapsto & t \setminus \bigcup_{u \in T\,;\, u \subsetneq t} u \end{array}$$

Concrètement, dans un tubage maximal, chaque tube peut être identifié par le sommet qu'il est "le premier" à voir (dans ce tubage).

Définition

Pour un tubage maximal T, on définit $f_T : V(G) \to \mathbb{R}_+$ par :

- Si $\{v\} \in T$, alors : $f_T(v) = 0$
- Sinon, soit $t_v = \min\{t \in T ; v \in t\}$: $\sum_{x \in t_v} f_T(x) = 3^{|t_v| - 2}$

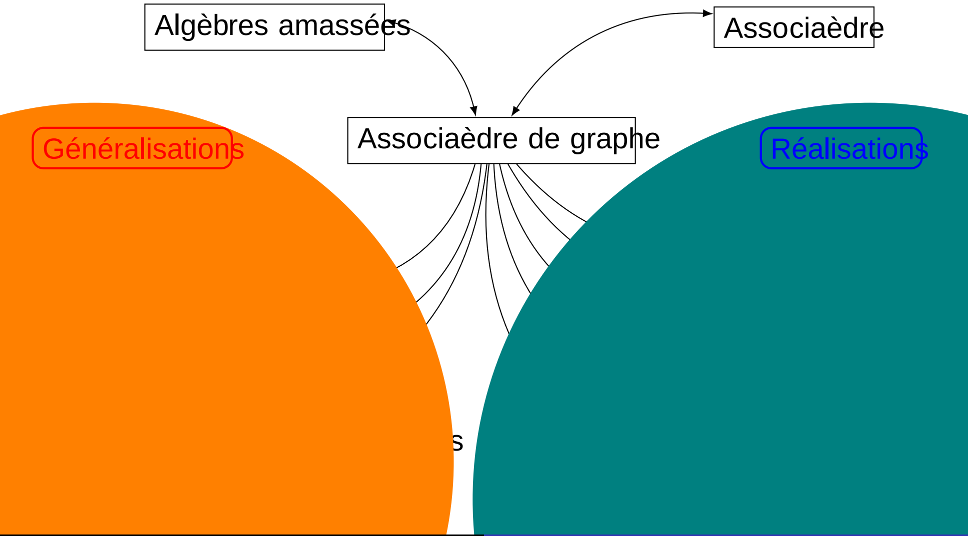
Réalisabilité de l'associaèdre de graphe

Soit G un graphe avec V ses sommets et T_{max} l'ensemble de ses tubages maximaux. Alors un associaèdre de G est :

$$\mathrm{Conv}\left\{ (f_T(v))_{v \in V(G)} \; ; \; T \in T_{max} \right\}$$

1 Associaèdre
Familles de Catalan et mutations
Détour par le permutoèdre
2 Associèdres de graphe
3 Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
Réalisation par les sommets
Autres points de vue
4 Édi ces
Complexe nidi é
Associaèdres d'édi ce
5 Transformations d'édi ces et d'associaèdres

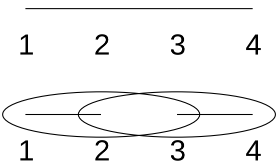
Le procédé de Carr & Devadoss va beaucoup plus loin.


Algèbres amassées
Associaèdre
Associaèdre de graphe
Généralisations
Réalisations

1 Associaèdre
  Familles de Catalan et mutations
  Détour par le permutoèdre
2 Associèdres de graphe
3 Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
  Réalisation par les sommets
  Autres points de vue
4 Édi ces
  Complexe nidi é
  Associaèdres d'édi ce
5 Transformations d'édi ces et d'associaèdres

Lorsqu'on dispose d'un associaèdre de graphe, on pourrait par exemple vouloir "tirer une facette".

Cela revient à éliminer un tube dans le POSET des tubes.



1 Associaèdre
- Familles de Catalan et mutations
- Détour par le permutoèdre

2 Associèdres de graphe

3 Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
- Réalisation par les sommets
- Autres points de vue

4 Édi ces
- Complexe nidi é
- Associaèdres d'édi ce

5 Transformations d'édi ces et d'associaèdres

Définition (Édifices)

Un édifice[a] sur S est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de S respectant :

- Singletons et connexion : $\forall s \in S,\ \{s\} \in \mathcal{B}$ et $S \in \mathcal{B}$
- Stabilité par réunion : $\forall A, B \in \mathcal{B},\ A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}$

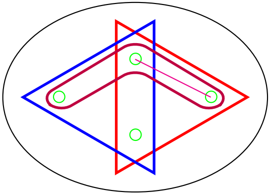
On appellera blocs les éléments d'un édifice et blocs inséparables les éléments nécessaires pour l'engendrer par réunions non-disjointes.

a. building set en anglais

Ce POSET correspond au POSET des (hyper)tubes d'un hypergraphe.

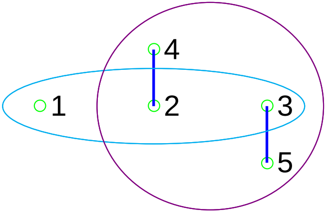
Cf Feichtner 2005, Postnikov 2009, Manneville & Pilaud 2015,...

$S = \{1; 2; 3; 4\}$



$B = \{\text{singletons}\} \cup \{\{1; 2\}; \{1; 2; 3\}; \{1; 3; 4\}; \{1; 2; 4\}\} \cup \{S\}$

$S = \{1; 2; 3; 4; 5\}$



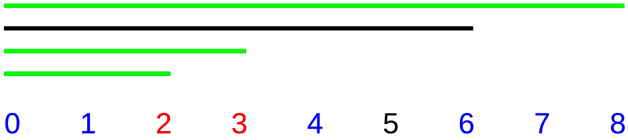
$B = \{\text{singletons}\} \cup \{\{2; 4\}; \{3; 5\}; \{1; 2; 3\}; \{2; 3; 4; 5\}; \{1; 2; 3; 4\}; \{1; 2; 3; 5\}\} \cup \{S\}$

Dé nition (Ensemble nidi é)

Un ensemble nidi é $\mathcal{N}$ d'un édi ce B est une partie de B telle que :

- Nidi cation : $\forall N_1, N_2 \in \mathcal{N},\ N_1 \subset N_2$ ou $N_2 \subset N_1$ ou $N_1 \cap N_2 = \emptyset$
- Non recouvrement : $\forall k \geq 2, \forall N_1, \dots, N_k \in \mathcal{N},\ \forall i \neq j,\ N_i \cap N_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i=1}^{k} N_i \notin B$.
- Connexion : $S \in \mathcal{N}$ (hypothèse en discussion)

Les ensembles nidi és correspondent aux "tubages" d'un hypergraphe.
L'ensemble des ensembles nidi és forme un complexe simplicial abstrait, appelé complexe nidi é.

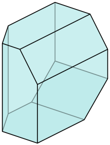

0 1 2 3 4 5 6 7 8

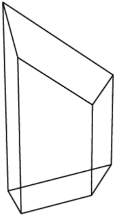
1 Associaèdre
   Familles de Catalan et mutations
   Détour par le permutoèdre
2 Associèdres de graphe
3 Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
   Réalisation par les sommets
   Autres points de vue
4 Édi ces
   Complexe nidi é
   Associaèdres d'édi ce
5 Transformations d'édi ces et d'associaèdres

Associaèdres d'édifice

Associaèdres d'édifice

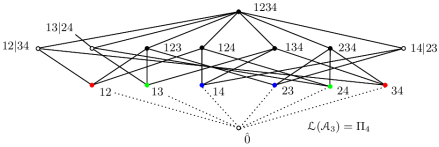
L'*associaèdre d'un édifice B* est le polytope qui réalise son complexe nidifié.





On retrouve d'autres polytopes connus (Pitman-Stanley,...), et des liens algébriques profonds (compactification merveilleuse de De Concini-Procesi,...).

Cf Zelevinsky 2005, Feichtner 2005, Postnikov 2009,...



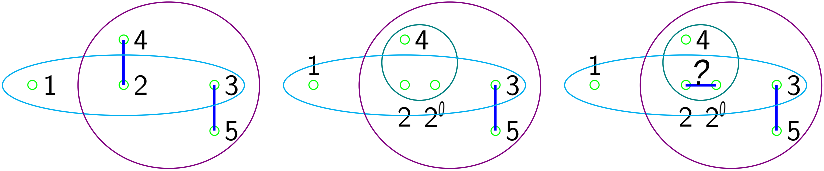
Séminaire DGeCo

1. Associaèdre
   - Familles de Catalan et mutations
   - Détour par le permutoèdre
2. Associèdres de graphe
3. Théorème de réalisation de Carr et Devadoss
   - Réalisation par les sommets
   - Autres points de vue
4. Édifices
   - Complexe nidifié
   - Associaèdres d'édifice
5. Transformations d'édifices et d'associaèdres

Transformations d'édifices

On a vu que retirer une arête d'un graphe donne un édifice. L'associaèdre de cet édifice s'obtient à partir de l'associaèdre du graphe en "tirant" une facette (en retirant l'inégalité associée).

Y a-t-il d'autres opérations naturelles sur les édifices qui se transcrivent bien sur l'associaèdre d'édifice ?

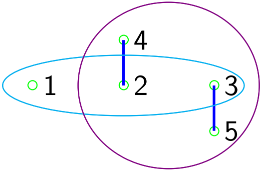


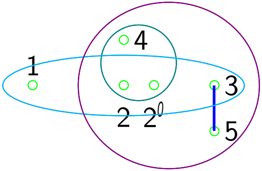
Dédoublement

Rassemblement
Composition

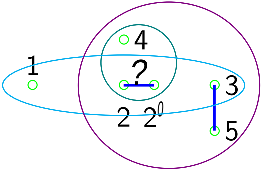
Transformation de l'associaèdre d'édifice

Associaèdre d'origine	Opération d'édifice	Nouvel associaèdre
$P; F$	Dédoublement	$\text{wedge}_F(P)$
P	Rassemblement	$\text{prism}(P)$
$P; F; Q$	Composition	$P \triangleleft_F Q$?
$P; Q$	Produit	$P \quad Q$
$P; Q$	Produit couvert	*Work in progress...*





Dédoublement



Rassemblement
Composition

Merci pour votre attention !