Khôlles MPSI1 2020-2021 Semestre 1

POULLOT Germain

Septembre 2020 - Janvier 2021

Résumé

Attention ! Les khôlles présentées ici n'ont bien évidement pas vocation à remplacer les excellents exercices vus en cours. Si vous avez du temps et cherchez des exercices en plus, alors vous pouvez lire ces sujets. Les corrections sont disponibles dans la deuxième partie. Parfois, un exercice est entièrement corrigé, parfois partiellement, et parfois encore, vous serez juste redirigés vers le cours, une vidéo ou un site. Certaines khôlles sont longues, d'autres très courtes ; certaines faciles, d'autres particulièrement ardues : apprendre à détecter ce que vous savez faire et ce qui est difficile est aussi un bon exercice !

Si vous avez une question quelconque ou une remarque, vous pouvez me contacter : germain.poullot@polytechnique.edu (n'oubliez pas de signer votre mail, s'il-vous-plaît).

Les khôlles des autres classes et des autres années sont disponibles sur ma page web : https://webusers.imj-prg.fr/germain.poullot/Kholles

Bonne chance !

Table des matières

1 Sujets de Khôlles

1.1 Programme 1 : Raisonnements, Ensembles

1.1.1 Khôlle 1 : Logique

Exercise 1.1 (Question de cours)**.** Démontrez qu'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercise 1.2 (Problème principal)**.** Soient E un ensemble, et $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de parties de E indexées par un ensemble I. Montrez que :

$$\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{X\in P(I)}\left(\bigcup_{i\in X} A_i \cup \bigcup_{i\in I\setminus X} B_i\right)$$

Exercise 1.3 (Question subsidiaire)**.** Partagez un carré en 4 carrés, puis en 6 carrés, 7, 8, 9, 10 et 11. Montrez qu'on peut partager un carré en $n (\geq 6)$ carrés.

Solution ici : Section 2.1.

1.1.2 Khôlle 2 : Logique

Exercise 1.4 (Question de cours)**.** Prouvez la proposition (par contraposée) :
P : Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

Exercise 1.5 (Problème principal)**.** Démontrer que tout nombre naturel est divisible par un nombre premier.

Exercise 1.6 (Question subsidiaire)**.** Soit $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrez que : $\forall n \neq 1, H_n \notin \mathbb{N}$. (<u>Indice :</u> On pourra écrire H_n comme un quotient et s'intéresser à la parité du numérateur et du dénominateur.)

Solution ici : Section 2.2.

1.1.3 Khôlle 3 : Ensembles

Exercise 1.7 (Question de cours)**.** Factorisez $a^n - b^n$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$).

Exercise 1.8 (Problème principal)**.** On appelle *différence symétrique* l'opération suivante, notée Δ, entre deux ensembles A et B : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Montrez que la différence symétrique est commutative et associative. **Dessiner !** Dispose-t-elle d'un élément neutre ? D'inverses pour certains éléments ? (Est-ce que la différence symétrique se distribue sur l'union ? l'intersection ?)

Exercise 1.9 (Question subsidiaire)**.** Soit E un ensemble. On définit la *fonction indicatrice* de $A \subset E$, notée 1_A, par $\forall x \in E, 1_A(x) = 1$ si $x \in A$, $= 0$ sinon.

Soient $A, B \subset E$. Exprimez, en fonction de 1_A et 1_B : $1_{\overline{A}}$, $1_{A\cup B}$, $1_{A\cap B}$, $1_{A\setminus B}$ et $1_{A \Delta B}$.

Démontrez que $1_A = 1_B$ si et seulement si $A = B$.

Démontrez ainsi que : $\cap$ et distributif sur Δ ; que Δ est associatif, etc.

Solution ici : Section 2.3.

1.2 Programme 2 : Calculs algébriques, Systèmes linéaires

1.2.1 Khôlle 4 : Système et polynôme, Somme polynomiale

Exercise 1.10 (Question de cours)**.** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall n,m \in \mathbb{N},\ f(m+n) = f(m) + f(n)$. Prolongements éventuels à $\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{Q}$.

Exercise 1.11 (Problème principal)**.** Soient $a,b,c \in [0,1]^3$. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2. Déterminez $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\quad \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$$

Exercise 1.12 (Question subsidiaire)**.** Trouver $\sum_k k^4$ grâce à un polynôme P de degré 5 tel que $P(X+1) - P(X) = X^4$. Puis calculez la limite de :

$$u_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \left(5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4\right) \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = -1$$

Solution ici : Section 2.4.

1.2.2 Khôlle 5 : Système et polynômes, Sommation d'Abel

Exercise 1.13 (Question de cours)**.** Calculez et comparez :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} j\ ,\quad \sum_{1 \leq i<j \leq n} j\ ,\quad \sum_{1 \leq i<j \leq n} i\ ,\quad \sum_{1 \leq i<j \leq n} ij \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{i}{i+j}$$

Exercise 1.14 (Problème principal)**.** Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$. En combien de points faut-il évaluer un polynôme de degré n pour le déterminer entièrement ?

Exercise 1.15 (Question subsidiaire)**.** [Sommation d'Abel] Soient deux familles de nombres complexes $(a_k)_k$ et $(B_k)_k$. On définit $A_n = \sum_{j=0}^n a_j$ et $b_j = B_{n+1} - B_n$. Montrez que : $\sum_{j=0}^n a_j B_j = A_n B_n - \sum_{j=0}^{n-1} A_j b_j$. En déterminer $\sum_{k=0}^n k 2^k$.

Solution ici : Section 2.5.

1.2.3 Khôlle 6 : Ensemble milieu, Coefficients binomiaux

Exercise 1.16 (Question de cours)**.** Énoncez et démontrez la formule du binôme de Newton (attention à a et b qui doivent commuter !).

Exercise 1.17 (Problème principal)**.** [Ensemble milieu] Dans le plan, on se donne n points $A_1,\dots,A_n$. Existe-t-il n points $M_1,\dots,M_n$ tels que A_i soit le milieu de $[M_i, M_{i+1}]$ $(1 \leq i \leq n-1)$, et A_n soit le milieu de $[M_n, M_1]$?

Exercise 1.18 (Question subsidiaire)**.** [Formule de Chu-Vandermonde] Soient $p \leq q \leq m$. En développant de deux manière différentes $(1+x)^m$, montrez que :

$$\binom{m}{q} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{m-p}{q-k}$$

Solution ici : Section 2.6.

1.3 Programme 3 : Complexes, Calculs algébriques

1.3.1 Khôlle 7 : Distance entre $\mathbb{U}$ et 2

Exercise 1.19 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, ainsi que ses corollaires.

Exercise 1.20 (Problème principal)**.** Montrez que (et que pensez-vous de la réciproque ?) :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}, (|z_1| = |z_2| = 1 \text{ et } |2 + z_1 z_2| = 1) \Rightarrow z_1 z_2 = -1$$

Exercise 1.21 (Question subsidiaire)**.** Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\cos x) < \cos(\sin x)$.

Solution ici : Section 2.7.

1.3.2 Khôlle 8 : Sommations trigonométriques

Exercise 1.22 (Question de cours)**.** Calculez $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercise 1.23 (Problème principal)**.** Calculez $A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercise 1.24 (Question subsidiaire)**.** Soit $\lambda \neq i$. Montrez que $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\left|\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}\right| = 1$.

Solution ici : Section 2.8.

1.3.3 Khôlle 9 : Identité de la médiane

Exercise 1.25 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les complexes.

Exercise 1.26 (Problème principal)**.** [Identité de la médiane] Montrez que $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$. Interprétez géométriquement. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = zz'$, montrez que $|z| + |z'| = \left|u + \frac{z+z'}{2}\right| + \left|u - \frac{z+z'}{2}\right|$

Exercise 1.27 (Question subsidiaire)**.** Montrez que

$$\sum_{\varepsilon_i \in \{-1,+1\}} \cos(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 \dots \cos a_n$$

En déduire la valeur de $\sum_{\varepsilon_i \in \{-1,+1\}} \sin(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n)$.

Solution ici : Section 2.9.

1.4 Programme 4 : Analyse, Complexe 2

1.4.1 Khôlle 10 : Sommation trigonométrique

Exercise 1.28 (Question de cours)**.** Donnez et démontrer les formules de dérivation pour $x \mapsto \log_a x$ et $x \mapsto a^x$. Comme vous connaissez les graphes de $x \mapsto a^x$, donnez ceux de $x \mapsto \log_a x$.

Exercise 1.29 (Problème principal)**.** Montrez que

$$\sum_{\varepsilon_i \in \{-1;+1\}} \cos(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n$$

En déduire la valeur de $\sum_{\varepsilon_i \in \{-1;+1\}} \sin(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n)$.

Exercise 1.30 (Question subsidiaire)**.** On définit la suite $(z_n)_n$ par récurrence : $z_0; z_1 \in \mathbb{C}$ fixés et $z_{n+1} - z_n = \alpha(z_n - z_{n-1})$. Déterminez une CNS sur $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $(z_n)_n$ soit périodique.

Solution ici : Section 2.10.

1.4.2 Khôlle 11 : Alignement complexe

Exercise 1.31 (Question de cours)**.** Soit f et g deux fonctions monotones. Parlez-moi de leur somme, leur produit et leur composée. Tracez en même temps $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ et $g : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$.

Exercise 1.32 (Problème principal)**.** Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$. Déterminez les solutions de $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$.

Exercise 1.33 (Question subsidiaire)**.** Trouvez les nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^4 sont alignés.

Solution ici : Section 2.11.

1.4.3 Khôlle 12 : Théorème de Napoléon

Exercise 1.34 (Question de cours)**.** Donnez et démontrer la formule de dérivation de la réciproque. Tracez les $x \mapsto \ln\left(x^k + 1\right)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercise 1.35 (Problème principal)**.** [Théorème de Napoléon] Soit un triangle ABC quelconque. Soient A', B' et C' trois points tels que CBA', ACB' et BAC' soient équilatéraux (extérieurs à ABC). Soient D, E et F les centres de CBA', ACB' et BAC'. Montrez que DEF est un triangle équilatéral. Montrez que le centre de DEF est aussi celui de ABC. Faire de même en construisant les triangles équilatéraux intérieurs (noté $AB\tilde{C}$, $BC\tilde{A}$ et $CA\tilde{B}$ de centres $\tilde{D}$, $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$), puis comparer les aires de DEF et de $\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}$.

Exercise 1.36 (Question subsidiaire)**.** Calculez $\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$.

Solution ici : Section 2.12.

1.5 Programme 5 : Analyse, Trigonométrie réciproque

1.5.1 Khôlle 13 : Équation hyperbolique générale

Exercise 1.37 (Question de cours)**.** Tracez $\arccos \cos(x)$ et $\arcsin \sin(x)$ puis $\arctan \circ \tan$ et $\tan \circ \arctan$.

Exercise 1.38 (Problème principal)**.** Résoudre en fonction de a, b et c des réels, l'équation $a \cosh x + b \sinh x = c$.

Exercise 1.39 (Question subsidiaire)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifiez $\sinh^2 x \cos^2 x + \cosh^2 x \sin^2 x$.

Solution ici : Section 2.13.

1.5.2 Khôlle 14 : Variables gudermaniennes, Équation logarithmique

Exercise 1.40 (Question de cours)**.** Montrez que $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Procéder de même pour montrez que $\arctan(e^x) - \arctan(\tanh \frac{x}{2})$ est une constante ($= \frac{\pi}{4}$).

Exercise 1.41 (Problème principal)**.** On suppose que $x = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$.

Montrez que $\tanh \frac{x}{2} = \tan \frac{y}{2}$; $\tanh x = \sin y$ et $\cosh x = \frac{1}{\cos y}$.

Exercise 1.42 (Question subsidiaire)**.** Résoudre : $\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0$.

Exercise 1.43 (Question subsidiaire)**.** Déterminez : $\max\{\sqrt[n]{n} ; n \in \mathbb{N}\}$.

Solution ici : Section 2.14.

1.5.3 Khôlle 15 : Discriminant de degré 3, Équation exponentielle

Exercise 1.44 (Question de cours)**.** Tracez sur le même graphe les fonctions arccos, arcsin et arctan.

Exercise 1.45 (Problème principal)**.** Faites l'étude d'une fonction polynomiale de degré 3 de la forme $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$.

Déterminez graphiquement et numériquement $Q(x) := P(x - \frac{b}{3a})$ (on doit retrouver les polynômes de la forme $X^3 + pX + q$, qui sont "centrés".)

Construisez un discriminant pour les polynômes $X^3 + pX + q$.

Exercise 1.46 (Question subsidiaire)**.** Résoudre $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ (on doit trouver $\frac{3}{2}$).

Solution ici : Section 2.15.

1.6 Programme 6 : Application, Relations binaires

1.6.1 Khôlle 16 : Relation de pré-ordre

Exercise 1.47 (Question de cours)**.** Si $f \circ g$ (qu'on suppose défini) est surjective, que peut-on dire ? Et si $f \circ g$ est injective ? bijective ?

Exercise 1.48 (Problème principal)**.** Une relation R est un *pré-ordre* si elle est réflexive et transitive.

Soit R un pré-ordre et T la relation : $xTy \iff (xRy \wedge yRx)$. Montrez que T est une relation d'équivalence.

Soit X et Y deux classes d'équivalence modulo T. On définit la relation XSY par $\exists x \in X, \exists y \in Y, xRy$. Montrez que $XSY \iff \forall x \in X, \forall y \in Y, xRy$. Montrez que S est une relation d'ordre sur l'ensemble des classes d'équivalences modulo T.

Exercise 1.49 (Question subsidiaire)**.** Montrez que la relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est un pré-ordre, précisez la relation d'équivalence et la relation d'ordre qui s'en déduisent.

Solution ici : Section 2.16.

1.6.2 Khôlle 17 : Injectivité et surjectivité fonctionnelle

Exercise 1.50 (Question de cours)**.** Démontrez que l'exponentielle est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$ mais pas injective.

Exercise 1.51 (Problème principal)**.** Soient X, E, F trois ensembles. Soit $f : E \to F$. Montrez que f est injective si et seulement si : $\forall g, h : X \to E,\ f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$. Énoncer une propriété équivalente pour la surjectivité.

Exercise 1.52 (Question subsidiaire)**.** Soit $f : E \to F$. Montrez que f est bijective si et seulement si $\forall A \in P(E),\ \overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

Solution ici : Section 2.17.

1.6.3 Khôlle 18 : Relation sur $\mathbb{R}^2$, Filtre sur $P(E)$

Exercise 1.53 (Question de cours)**.** Démontrez l'équivalence entre être bijectif, avoir une réciproque et être injectif et surjectif.

Exercise 1.54 (Problème principal)**.** Soit E un ensemble et "filtre" $\mathcal{F} \subset P(E)$ tel que $\forall X, Y \in \mathcal{F}, \exists Z \in \mathcal{F}, Z \subset (X \cap Y)$. On définit sur $P(E)$ la relation $A \sim B \iff \exists X \in \mathcal{F}, A \cap X = B \cap X$. Montrez que c'est une relation d'équivalence. Donnez les classes de $\emptyset$ et de E. Est-ce que $\mapsto$ est surjective ? Que se passe-t-il si $\mathcal{F}$ possède 2 éléments disjoints ? Montrez que $\mapsto$ n'est pas injective ?

Exercise 1.55 (Question subsidiaire)**.** Soit la relation sur $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \preceq (x', y') \iff x \leq x'$ et $y \leq y'$. Montrez que $\preceq$ est une relation d'ordre partielle sur $\mathbb{R}^2$. Le cercle unité a-t-il des majorants ? Une borne supérieure ? Donnez une CNS pour qu'un sous-ensemble du plan ait une borne supérieure.

Solution ici : Section 2.18.

1.7 Programme 7 : Primitives, Applications, Relations

1.7.1 Khôlle 19 : Images directes et réciproques

Exercise 1.56 (Question de cours)**.** Déterminez une primitive de $x \mapsto \sin \ln x$.

Exercise 1.57 (Problème principal)**.** Soit $f : E \to E$.

Montrez que f est injective si et seulement si $\hat{f} \circ f = \mathrm{Id}_{P(E)}$.

Montrez que f est surjective si et seulement si $f \circ \hat{f} = \mathrm{Id}_{P(E)}$.

Montrez que f est injective si et seulement si $\forall X, Y, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Exercise 1.58 (Question subsidiaire)**.** Soit $f : E \to F$. Montrez que f est bijective si et seulement si $\forall A \in P(E), \overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

Solution ici : Section 2.19.

1.7.2 Khôlle 20 : Théorème de Cantor-Berstein

Exercise 1.59 (Question de cours)**.** Déterminez une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$.

Exercise 1.60 (Problème principal)**.** [Théorème de Cantor-Berstein]. Soient E et F deux ensembles munies d'injections $f : E \to F$ et $g : F \to E$. On veut montrez qu'il existe une bijection entre E et F. Démontrez le théorème pour E **ou** F fini(s). On note $g^{-1}(x)$ l'antécédant de x par g (idem pour $f^{-1}(y)$). On regarde : x, $g^{-1}(x)$, $f^{-1}(g^{-1}(x))$, $g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x)))$,... On note A la partie de E contenant tous les x pour lesquels cette suite est finie et a son dernier élément dans E. On pose $h : E \to F$, montrez que c'est une bijection :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ g^{-1}(x) \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Exercise 1.61 (Question subsidiaire)**.** Étudiez les relations suivantes : $xRy \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$ sur $\mathbb{R}$; $xSy \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N},\ y = px^q$ sur $\mathbb{R} \setminus]-1;1[$.

Soit, sur $\mathbb{R}$: $xTy \Leftrightarrow xe^y = ye^x$. Montrez que T est une relation d'équivalence et dénombrez ses classes d'équivalence.

Solution ici : Section 2.20.

1.7.3 Khôlle 21 : Point fixe d'une application croissante

Exercise 1.62 (Question de cours)**.** Déterminez une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x^2)}$.

Exercise 1.63 (Problème principal)**.** Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné dont toute partie admet des bornes inférieure et supérieure. Soit $f : E \to E$ croissante. Soit $X = \{x \in E, x \leq f(x)\}$, montrez que $X \neq \emptyset$. Montrez que $f(X) \subset X$. Soit $a = \sup X$, montrez que $a \in X$ et $f(a) = a$. Donnez un exemple.

Exercise 1.64 (Question subsidiaire)**.** Soit $f : E \to E$. On note $f^n = f \circ \dots \circ f$, et $f^0 = \mathrm{Id}_E$. Pour $A \subset E$, on pose $A_n = f^n(A)$ et $B = \bigcup_n A_n$. Montrez que B est la plus petite partie de E (pour l'inclusion) stable par f et contenant A.

Solution ici : Section 2.21.

1.8 Programme 8 : Intégration, Équations différentielles

1.8.1 Khôlle 22 : Calcul d'intégrales & primitives

Exercise 1.65 (Question de cours)**.** Parlez-moi des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène : $y' + a(x)y = 0$ avec $a : I \to \mathbb{R}$.

Exercise 1.66 (Problème principal)**.** On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x$.

Calculez $I_0 (= \pi/4)$ et $I_1 (= \ln 2/2)$ puis trouvez une récurrence d'ordre 2 pour I_n. En déduire I_n et sa limite.

En déduire la limite de $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ (c'est $\ln 2$) et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ (c'est $\frac{\pi}{4}$).

Exercise 1.67 (Question subsidiaire)**.** [Règle de Biot] Observer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\mathrm{d}t$, puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t (= \frac{\pi}{8}\ln 2)$.

Solution ici : Section 2.22.

1.8.2 Khôlle 23 : Calcul d'intégrales & primitives

Exercise 1.68 (Question de cours)**.** Parlez-moi des problèmes de Cauchy.

Exercise 1.69 (Problème principal)**.** Déterminez $I_{p,q}(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^p(t-\beta)^q\mathrm{d}t \quad = \frac{(-1)^q(\beta-\alpha)^{p+q+1}}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}$.

Exercise 1.70 (Question subsidiaire)**.** Soit $\varphi(t) = \frac{\sinh t}{t}$ ($t \neq 0$), $\varphi(0) = 1$. Soit $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\mathrm{d}t$. Montrez que f est bien définie, donnez sa parité. Montrez qu'elle est dérivable et calculez sa dérivée. Dressez son tableau de variations.

Solution ici : Section 2.23.

1.8.3 Khôlle 24 : Calcul d'intégrales & primitives

Exercise 1.71 (Question de cours)**.** Parlez-moi des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Exercise 1.72 (Problème principal)**.** Soit f une fonction définie sur $[0, a]$ ($a \in \mathbb{R}_+$) continue strictement croissante, dérivable et dont la dérivée et continue avec $f(0) = 0$. On note f^{-1} sa réciproque.

Montrez que, pour $x \in [0, a]$: $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf(x)$. **Faites un dessin !**

Soit u, v tels que $0 \leq u \leq a$ et $0 \leq v \leq f(a)$. Montrez que $uv \leq \int_0^u f + \int_0^v f^{-1}$

Exercise 1.73 (Question subsidiaire)**.** Montrez l'inégalité de Young : $\forall (p, q) \in]1, +\infty[, (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \Rightarrow uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.

Solution ici : Section 2.24.

1.9 Programme 9 : Suites, Équations différentielles

1.9.1 Khôlle 25 : Changement trigonométrique

Exercise 1.74 (Question de cours)**.** Montrez que si $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$ et $a < \ell$, alors $a < u_n$ à partir d'un certain rang.

Exercise 1.75 (Problème principal)**.** Soit g une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On pose $f : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Montrez que f est dérivable et que $f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$. Conclure en résolvant l'équation.

Exercise 1.76 (Question subsidiaire)**.** Intégrez l'équation suivante (sur tout intervalle ne contenant pas -1) : $(1+x)^2y'' + (1+x)y' - 2 = 0$

Solution ici : Section 2.25.

1.9.2 Khôlle 26 : Contrôle de la solution

Exercise 1.77 (Question de cours)**.** Montrez que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercise 1.78 (Problème principal)**.** Soit q une fonction C^1 tels que : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, q(x) > 0$ et $q'(x) > 0$. Montrez que les solutions de $y'' + q(x)y = 0$ sont bornées au voisinage de $+\infty$. (On pourra considérer $z : [A, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y^2(x) + \frac{y'(x)^2}{q(x)}$).

Exercise 1.79 (Question subsidiaire)**.** Avec $u = x' + iy'$, résolvez (avec conditions de Cauchy en 0) :

$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases}$$

Solution ici : Section 2.26.

1.9.3 Khôlle 27 : Équation intégrale

Exercise 1.80 (Question de cours)**.** Énoncez et démontrez l'équivalence des 3 définitions de la borne inférieure de $A \subset \mathbb{R}$.

Exercise 1.81 (Problème principal)**.** Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$. Montrez qu'il existe au plus une application $g \in C^2(\mathbb{R})$ telle que (puis appliquez avec $f = \cos$) :

$$\forall x, g(x) = \int_0^x (x-t)g(t)\mathrm{d}t + f(x)$$

Exercise 1.82 (Question subsidiaire)**.** On considère l'équation $y' = y + x^2y^2$ pour laquelle on admet le théorème suivant : pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple (I, f) appelé *solution maximale* tel que f soit solution de l'équation sur I avec $f(x_0) = y_0$ et f n'admet pas de prolongement (qui reste solution) à un intervalle qui contient strictement I.

Donner l'expression des solutions maximales de cette équation.

Solution ici : Section 2.27.

1.10 Programme 10 : Suites

1.10.1 Khôlle 28 : Suites de Cauchy

Exercise 1.83 (Question de cours)**.** Montrez que si $u_n \not\to \ell$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et φ une extractrice tels que $\forall n, |u_{\varphi(n)} - \ell| \geq \varepsilon$.

Exercise 1.84 (Problème principal)**.** Montrez qu'une suite de Cauchy converge et qu'une suite convergente et de Cauchy (dans $\mathbb{R}$).

Exercise 1.85 (Question subsidiaire)**.** Calculez $\inf_{\alpha \in]0;\pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} |\sin n\alpha|)$.

Solution ici : Section 2.28.

1.10.2 Khôlle 29 : Problèmes de moyennes

Exercise 1.86 (Question de cours)**.** Montrez que si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$, montrez que $u_n \to \ell$.

Exercise 1.87 (Problème principal)**.** Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, on considère les suites définies par $u_0 = x$ et $v_0 = y$ puis :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n} \end{aligned}$$

Montrez que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. On appelle $M(x;y)$ cette limite (moyenne arithmético-géométrique). Montrez que M est symétrique, homogène de degré 1 ($M(tx;ty) = tM(x;y)$) et que le cas d'égalité de $\min(x;y) \leq \sqrt{xy} \leq M(x;y) \leq \frac{x+y}{2} \leq \max(x;y)$ est seulement $x = y$.

Pour la culture, on peut montrer que $\frac{\pi/2}{M(x;y)} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{x^2 \cos^2 t + y \sin^2 t}}$.

Exercise 1.88 (Question subsidiaire)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a, b \in A, a < x < b$ et $\forall a, b \in A, \frac{a+b}{2} \in A$. Montrez que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution ici : Section 2.29.

1.10.3 Khôlle 30 : Preuve que la distance est lipschitzienne

Exercise 1.89 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez le théorème de la limite monotone.

Exercise 1.90 (Problème principal)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non-vide. Montrez que la fonction $d_A : x \mapsto \inf\{|x - a|, a \in A\}$ est bien définie puis : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|$.

Exercise 1.91 (Question subsidiaire)**.** Soit deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ qui tendent vers $+\infty$ avec $\lim_{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Donnez des exemples pour $(u_n)_n$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$. Montrez que pour tout $x \geq u_{n_0}$, il existe un rang p tel que $|u_p - x| \leq \varepsilon$. Montrez que $\{u_p - v_m, (p, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ En déduire que, par exemple, $\{u_n - E(u_n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0;1]$.

Solution ici : Section 2.30.

1.11 Programme 11 : Suites, Arithmétique

1.11.1 Khôlle 31 : Densité par différence de suites

Exercise 1.92 (Question de cours)**.** Parlez-moi de l'algorithme d'Euclide.

Exercise 1.93 (Problème principal)**.** Soit deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ qui tendent vers $+\infty$ avec $\lim_{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Donnez des exemples pour $(u_n)_n$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$. Montrez que pour tout $x \geq u_{n_0}$, il existe un rang p tel que $|u_p - x| \leq \varepsilon$. Montrez que $\{u_p - v_m ; (p, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que, par exemple, $\{u_n - E(u_n) ; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0; 1]$.

Exercise 1.94 (Question subsidiaire)**.** On va montrer l'irrationalité de e. Montrez que $\forall n, e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$, puis $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Raisonner alors par l'absurde.

Solution ici : Section 2.31.

1.11.2 Khôlle 32 : Variation de la constante pour les suites

Exercise 1.95 (Question de cours)**.** Qu'est-ce que la proposition de Bézout ?

Exercise 1.96 (Problème principal)**.** On considère $(u_n)_n$ qui vérifie $u_{n+1} - (n+1)u_n = 2^n(n+1)!$ (et u_0 fixé). Montrez que $(v_n)_n$ vérifiant $v_{n+1} - (n+1)v_n = 0$ et $v_0 = C$ vaut $v_n = Cn!$. Trouvez une condition sur $C(n)$ telle que $u_n = C(n)n!$ et résoudre.

Procédez de même pour $u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 3^{n^2}$.

Exercise 1.97 (Question subsidiaire)**.** [Théorème de Beatty] On note $A(x) = \{\lfloor nx \rfloor ; n \in \mathbb{N}^*\}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrez que $(A(x); A(y))$ est un partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ et $x; y \notin \mathbb{Q}$.

Solution ici : Section 2.32.

1.11.3 Khôlle 33 : Césaro multiplicatif

Exercise 1.98 (Question de cours)**.** C'est quoi écrire un entier en base b ?

Exercise 1.99 (Problème principal)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs. Montrez que si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ converge vers ℓ, alors $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_n$ converge aussi vers ℓ. Étudiez la réciproque.

Appliquez avec les suites $(u_n)_n \in \left\{ \left(\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}\right)_n ; \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)_n ; \left(\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}\right)_n \right\}$.

Exercise 1.100 (Question subsidiaire)**.** Trouvez un exemple de suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ divergente telle que $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, (u_{kn})_n$ est convergente.

Solution ici : Section 2.33.

1.12 Programme 12 : Arithmétique des entiers

1.12.1 Khôlle 34 : Super-triangles de Héron

Exercise 1.101 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la décomposition en produit de facteurs premiers.

Exercise 1.102 (Problème principal)**.** [Super-triangles de Héron] On s'intéresse aux triangles dont les longueurs des côtés, le périmètre et l'aire sont des entiers. On impose en plus que l'aire et le périmètres soient égaux. Prouvez qu'il y a un nombre fini de tels triangles et énumérez-les.

On pourra utiliser (après l'avoir re-démontrée) la formule de Héron : si $s = \frac{1}{2}\times$ périmètre, alors aire$^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ où a, b et c sont les longueurs des côtés.

Exercise 1.103 (Question subsidiaire)**.** Complétez pour avoir les chiffres de 1 à 9 : $42 \times \_\_\_ = \_\_\_\_$.

Solution ici : Section 2.34.

1.12.2 Khôlle 35 : Triplets pythagoriciens

Exercise 1.104 (Question de cours)**.** Parlez-moi des valuations p-adiques et des pgcd, ppcm.

Exercise 1.105 (Problème principal)**.** [Triplets pythagoriciens] On cherche les triplets $(x;y;z) \in \mathbb{N}^3$ dit "pythagoriciens" : $x^2 + y^2 = z^2$. Montrez qu'on peut se ramener à $\text{pgcd}(x;y;z) = 1$ puis à x, y et z premier deux à deux. Montrez que parmi x, y et z, deux sont impairs et un pair puis que z est impair. Posez $y = 2Y$, $X = \frac{z+x}{2}$ et $Z = \frac{z-x}{2}$. En déduire que $\text{pgcd}(X;Z) = 1$ et que X et Z sont des carrés parfait. Conclure (l'ensemble des triplets pythagoriciens est $\{(d(u^2-v^2); 2duv; d(u^2+v^2))\ ;\ d;u;v \in \mathbb{N}\}$).

Exercise 1.106 (Question subsidiaire)**.** Pour un chiffre X, on note $\overline{XX}$ le nombre $10X + X$.

Soient 3 chiffres X, Y et Z vérifiant $\overline{XX} + \overline{YY} + \overline{ZZ} = \overline{XYZ}$. Trouvez Z.

Solution ici : Section 2.35.

1.12.3 Khôlle 36 : Identité de Sophie-Germain, Somme factorielle

Exercise 1.107 (Question de cours)**.** Parlez-moi du petit théorème de Fermat.

Exercise 1.108 (Problème principal)**.** [Identité de Sophie-Germain] On se donne l'identité de Sophie Germain : $A^4 + 4B^4 = (A^2 + 2AB + 2B^2)(A^2 - 2AB + 2B^2)$. Déterminez les nombres n tels que $n^4 + 4^n$ soit premier.

Exercise 1.109 (Question subsidiaire)**.** Trouvez les entiers m et n tels que $\sum_{k=1}^m k! = n^2$. Idem pour $\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} k! = n^2$, $\sum_{k=1}^m (-1)^k k! = n^2$, $\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} k! = n^2$ et $\sum_{k=1}^m (-1)^k k! = -n^2$

Solution ici : Section 2.36.

1.13 Programme 13 : Fonctions continues, Arithmétique

1.13.1 Khôlle 37 : $a^b = b^a$ arithmétiquement, Partie entière

Exercise 1.110 (Question de cours)**.** Parlez-moi du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercise 1.111 (Problème principal)**.** Utilisez l'arithmétique pour déterminer les couples $(a;b) \in \mathbb{N}^{*2}$ vérifiant $a^b = b^a$.

Exercise 1.112 (Question subsidiaire)**.** Étudiez en chaque point de $\mathbb{R}$ l'existence d'une limite à droite, à gauche, et la continuité de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ et $f(0) = 1$. Généralisez à $f_n : x \mapsto x^n \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Tracez f_1.

Solution ici : Section 2.37.

1.13.2 Khôlle 38 : Polynômes rationnels, Conjecture de Catalan

Exercise 1.113 (Question de cours)**.** Montrez qu'une fonction strictement monotone est injective, et qu'une fonction continue et injective est strictement monotone.

Exercise 1.114 (Problème principal)**.** Montrer que si α est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$ avec a, b et c impairs, alors α est irrationnel.

Que ce passe-t-il pour les racines rationnelles d'un polynôme de degré quelconque à coefficients rationnels ?

Exercise 1.115 (Question subsidiaire)**.** Montrez qu'il n'existe qu'un seul cube impair non nul qui est immédiatement suivi d'un carré (résoudre $x^2 - y^3 = 1$).

Exercise 1.116 (Question subsidiaire)**.** Trouvez f bijective de $[0;1]$ sur lui-même et discontinue en chacun de ses points.

Solution ici : Section 2.38.

1.13.3 Khôlle 39 : Problème de Joséphus, Valeurs intermédiaires

Exercise 1.117 (Question de cours)**.** Parlez-moi du théorème des bornes atteintes.

Exercise 1.118 (Problème principal)**.** [Problème de Joséphus] 41 personnes numérotées sont disposées en cercles. La première tue son voisin de gauche (le numéro 2, qui sort du cercle), son nouveau voisin de gauche (le numéro 3) tue son propre voisin gauche (le numéro 4), etc. Quand on a fait un tour du cercle, on recommence, jusqu'à ce qu'il n'y ait qu'un seul survivant. Si je veux survivre, à quelle place dois-je me mettre au début.

Exercise 1.119 (Question subsidiaire)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction possédant la propriété des valeurs intermédiaires et injective. Montrez que f est continue.

Même question pour g possédant la propriété des valeurs intermédiaires et telle que $\forall r \in \mathbb{Q}; X_r = g^{-1}(\{r\})$ est fermée (c'est-à-dire que toute suite convergente de points de X_r a sa limite dans X_r).

Solution ici : Section 2.39.

1.14 Programme 14 : Structures, Limites, Continuités

1.14.1 Khôlle 40 : Point commun de fonctions qui commutent

Exercise 1.120 (Question de cours)**.** Parlez-moi des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercise 1.121 (Problème principal)**.** Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues qui commutent. On veut montrer qu'il existe un point commun : $\exists x, f(x) = g(x)$.

a) Par l'absurde : montrez qu'en l'absence de point commun, on peut supposer $f > g$, puis qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x, f(x) \geq g(x) + \varepsilon$ puis $\forall x, f^n(x) \geq g^n(x) + n\varepsilon$ et concluez.

b) Par les points fixes : on pose X l'ensemble des points fixes de f, montrez qu'il n'est pas vide, qu'il admet un minimum x_m et un maximum x_M et concluez en comparant f et g en x_m et x_M.

Exercise 1.122 (Question subsidiaire)**.** Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. On suppose que f vérifie la propriété suivante : pour tous les points $c < d$ de l'intervalle, il existe e compris entre c et d tel que $f(e) = f(a)$ ou $f(e) = f(b)$. Montrer que f est constante.

Solution ici : Section 2.40.

1.14.2 Khôlle 41 : Fonction périodique déviée, Barreau de cloche

Exercise 1.123 (Question de cours)**.** Parlez-moi de l'image d'un sous-groupe.

Exercise 1.124 (Problème principal)**.** Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que g est périodique, que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ et que $f + g$ est croissante. Montrez que g est constante.

Exercise 1.125 (Question subsidiaire)**.** Soit f une fonction continue avec $f(0) = f(1)$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in [0, 1 - 1/n]$ tel que : $f(c_n) = f(c_n + 1/n)$. En considérant $g_\alpha : x \mapsto \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right)$, montrez qu'on ne peut pas remplacer le $1/n$ précédent par un α arbitraire.

Solution ici : Section 2.41.

1.14.3 Khôlle 42 : Lemme du Soleil Levant, Dérivabilité différenciée

Exercise 1.126 (Question de cours)**.** Parlez-moi de l'intersection/réunion de groupes.

Exercise 1.127 (Problème principal)**.** [Lemme du soleil levant] Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit X l'ensemble des points "invisibles à droite", c'est-à-dire l'ensemble des $x \in]a, b[$ tels qu'il existe $y \in]x, b]$ tel que $g(x) < g(y)$. Montrez que X est une réunion dénombrable d'intervalle $(]a_n, b_n[)_n$. Montrez que : $\forall n, a_n \neq a \Rightarrow g(a_n) = g(b_n)$ et $a_n = a \Rightarrow g(a) \leq g(b_n)$.

Exercise 1.128 (Question subsidiaire)**.** Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et telle que $f(x) \to 0$ et $\frac{f(2x) - f(x)}{x} \to 0$ quand $x \to 0$. En étudiant $g : x \to \frac{f(2x) - f(x)}{x}$, montrez que $\frac{f(x)}{x} \to 0$ quand $x \to 0$.

Solution ici : Section 2.42.

1.15 Programme 15 : Structures, Dérivabilité

1.15.1 Khôlle 43 : Automorphismes intérieurs, Action de groupe

Exercise 1.129 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la formule de Leibnitz.

Exercise 1.130 (Problème principal)**.** Soit G un groupe. Soit $\sim$ la relation sur G définit par : $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G,\ y = gxg^{-1}$. Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence. Montrez que cette relation est trivial pour un groupe commutatif. Soit $\varphi_g : G \to G$ l'application $x \mapsto gxg^{-1}$. Justifier l'appellation *automorphisme* "intérieur". Montrez que $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$ et $\varphi_{e_G} = \mathrm{Id}_G$, donc $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$. En déduire que $\varphi : g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme de groupe, de G vers $\mathrm{Aut}(G)$ (groupe des automorphismes de G). Pour $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$, montrez que $\psi \circ \varphi_g \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(g)}$ et en déduire que $\mathrm{Im}\,\varphi$ est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$. Montrez que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est le centre de G (l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres).

Exercise 1.131 (Question subsidiaire)**.** Soit G un groupe, X un ensemble et $\varphi : G \times X \to X$ avec $\forall x,\ \varphi(e, x) = x$ et $\forall g, h, x,\ \varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(g \star h, x)$. On note $\forall x, y, x \sim y \Leftrightarrow \exists g, y = \varphi(g, x)$. Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Solution ici : Section 2.43.

1.15.2 Khôlle 44 : Morphisme de corps, Loi exponentielle

Exercise 1.132 (Question de cours)**.** Parlez-moi des accroissements finis.

Exercise 1.133 (Problème principal)**.** Montrez que le noyau d'un morphisme d'anneau est un idéal ($I \subset k$ est un idéal ssi $(I, +)$ est un groupe et $\forall \lambda \in k, \forall x \in I, \lambda x \in I$). Montrez que les seuls idéaux d'un corps sont l'idéal nul et le corps lui-même. En déduire qu'un morphisme de corps (non nul) est injectif, puis que si $\varphi : k \to K$ est un tel morphisme, alors k est isomorphe à un sous-corps de K.

Exercise 1.134 (Question subsidiaire)**.** Sur $\mathbb{R}^2$, on définit une loi $\star$ par : $\forall((x, y), (x', y')) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2, (x, y) \star (x', y') = \left(x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}\right)$ Montrez que $\left(\mathbb{R}^2, \star\right)$ est un groupe non abélien. Trouvez les application f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ soit un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$.

Solution ici : Section 2.44.

1.15.3 Khôlle 45 : 2-recouvrement de groupe, Loi avant l'addition

Exercise 1.135 (Question de cours)**.** Parlez-moi du théorème de Rolle.

Exercise 1.136 (Problème principal)**.** Soit H un sous-groupe de G tel qu'il existe $g \in G$ tel que : $G = H \cup gH$ et $H \cap gH = \emptyset$. Montrez que H est distingué dans G (c'est-à-dire que $\forall x \in G,\ xHx^{-1} \subset H$).

Exercise 1.137 (Question subsidiaire)**.** On sait que $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 5$ et $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$. On dit que la multiplication est l'opération itérée de l'addition, et que la puissance est l'opération itérée de la multiplication. Définissez et étudiez l'opération dont l'addition est l'opération itérée.

Solution ici : Section 2.45.

1.16 Programme 16 : Dérivation

1.16.1 Khôlle 46 : Théorème de Darboux

Exercise 1.138 (Question de cours)**.** Parlez-moi du lien entre dérivée et sens de variation.

Exercise 1.139 (Problème principal)**.** [Théorème de Darboux] Soit f dérivable (pas forcément C^1).

Montrez que l'image d'un intervalle par f' est un intervalle.

(Utilisation de la méthode) Soit $I = [a; b]$ et f dérivable telle que $f(a)f'(b) \leq 0$ et $f(b)f'(a) \leq 0$. Montrez que f' s'annule.

Exercise 1.140 (Question subsidiaire)**.** Soit $f \in C^1$ telle que $f(f(x)) = \frac{x}{2} + 3$ pour tout x. Montrez que f' est constante puis déterminer f (on remarquera que $f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{f(x)}{2} + 3$).

Solution ici : Section 2.46.

1.16.2 Khôlle 47 : Dénombrement via Leibnitz

Exercise 1.141 (Question de cours)**.** Parlez-moi du théorème de la limite de la dérivée.

Exercise 1.142 (Problème principal)**.** Montrez que la dérivée n-ième de $f : x \mapsto x^n(1-x)^n$ existe et est : $x \mapsto n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 (1-x)^{n-k} x^k$.

En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. (regarder le terme en x^{2n} dans le développement de $x^n(1-x)^n$).

Exercise 1.143 (Question subsidiaire)**.** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ pour un certain $a \neq 0$. Montrer qu'il existe un point distinct de O de la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par l'origine.

Solution ici : Section 2.47.

1.16.3 Khôlle 48 : Accroissements finis d'ordre supérieur

Exercise 1.144 (Question de cours)**.** Parlez-moi du théorème des accroissements finis.

Exercise 1.145 (Problème principal)**.** Soit f une fonction s'annulant n fois, en $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ et n fois dérivable sur $[x_1; x_n]$. Soit $a \in [x_1; x_n]$. Montrez qu'il existe $\xi \in]x_1; x_n[$ tel que :

$$f(a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (a - x_k)$$

Exercise 1.146 (Question subsidiaire)**.** Soit $f \in C^1([a; b]; \mathbb{R})$ telle que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup_{x \in [a;b]} f'(x)$. Montrez que f est affine.

Solution ici : Section 2.48.

1.17 Programme 17 : Développements limités, Analyse

1.17.1 Khôlle 49 : Méthode d'Euler (mi-point, ordre 2)

Exercise 1.147 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.148 (Problème principal)**.** Soit f de classe C^2 et x fixé. Déterminez la limite quand $h \to 0$ de $\frac{f(x-h)+f(x+h)-2f(x)}{h^2}$.

En déduire une méthode pour approximer la solution d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre 2 (en vous inspirant de la méthode d'Euler).

Exercise 1.149 (Question subsidiaire)**.** Étudiez la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

Solution ici : Section 2.49.

1.17.2 Khôlle 50 : Développement d'un raccord de fonctions

Exercise 1.150 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.151 (Problème principal)**.** Soit f la fonction définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ \cosh\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f a-t-elle un développement limité en 0, si oui lequel (ordre n) ?

Exercise 1.152 (Question subsidiaire)**.** Soir f continue croissante $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\frac{f(x)}{x} \to k < 1$ quand $x \to +\infty$. Étudiez la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Solution ici : Section 2.50.

1.17.3 Khôlle 51 : Suite récurrence issue d'un développement limité

Exercise 1.153 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.154 (Problème principal)**.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue avec : $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ au voisinage de 0 ($a > 0$, $\alpha > 1$).

Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez que si u_0 est suffisamment petit, alors $(u_n)_n$ est décroissante et converge vers 0.

Soit $\beta > 0$, on pose $x_n = \frac{1}{u_{n+1}^\beta} - \frac{1}{u_n^\beta}$. Trouvez un équivalent de $(x_n)_n$. En choisissant β et en utilisant le théorème de Césaro, trouver un équivalent de $(u_n)_n$.

Exercise 1.155 (Question subsidiaire)**.** Appliquez l'exercice précédent avec $f = \sin$.

Solution ici : Section 2.51.

1.18 Programme 18 : Développements limités, Analyse

1.18.1 Khôlle 52 : Règle de Worthington

Exercise 1.156 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.157 (Problème principal)**.** [Règle de Worthington] Montrez que le développement de $\tan^{-1}$ à l'ordre 6 est $\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + O(x^7)$.

Montrez que le développement de $f : x \mapsto \frac{3x}{1+2\sqrt{1+x^2}}$ à l'ordre 6 est $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{36}x^5 + O(x^7)$.

Application : Prenons un triangle rectangle dont le plus petit angle est A. Soit a le côté opposé à A, b le côté adjacent et c l'hypoténuse. Montrez que $A \simeq \frac{3a}{b+2c}$.

Exercise 1.158 (Question subsidiaire)**.** Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, qu'on notera u_n. Montrez que $u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, puis que $u_n \sim \ln n$. Trouvez un équivalent de $v_n = u_n - \ln n$ puis montrez qu'il existe des nombres a, b tels que $u_n = a \ln n + b\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Solution ici : Section 2.52.

1.18.2 Khôlle 53 : Approximant de Padé, Combinatoire

Exercise 1.159 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.160 (Problème principal)**.** Déterminez $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la partie principale du développement de $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit du plus grand degré possible.

Exercise 1.161 (Question subsidiaire)**.** Calculez le développement limité à l'ordre n en 0 de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$. Soit a_k le k-ème coefficient. Montrer que a_k est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $p + 2q = k$.

Solution ici : Section 2.53.

1.18.3 Khôlle 54 : Équation différentielle

Exercise 1.162 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.163 (Problème principal)**.** Soit $(E) : 2xy'' - y' + x^2 y = 0$. On suppose qu'il existe une fonction f solution de (E) possédant un développement limité à tout ordre. Trouvez f. En déduire le changement de variable adéquat et résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_-$ puis $\mathbb{R}_+$ et enfin $\mathbb{R}$.

Exercise 1.164 (Question subsidiaire)**.** [Fonction W de Lambert] Développer la fonction W de Lambert au voisinage de 0. La fonction W de Lambert est l'unique solution $W(x)$ de l'équation $x = we^w$ d'inconnue $w \geq -1$ et de paramètre $x \geq -1/e$. On commencera d'abord par en trouver un équivalent, puis une équation différentielle que satisfait W.

Solution ici : Section 2.54.

1.19 Programme 19 : Matrices, Polynômes

1.19.1 Khôlle 55 : Matrices vampires

Exercise 1.165 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.166 (Problème principal)**.** [Matrices vampires] Commencer par calculer $\begin{pmatrix}3&4\\6&8\end{pmatrix}^2$. Prouver que $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M(⟦0;9⟧)$ vérifie $M^2=\begin{pmatrix}\overline{aa}&\overline{bb}\\\overline{cc}&\overline{dd}\end{pmatrix}$ si et seulement si $ad-bc=0$ et $a+d=11$. Étudier la réciproque. Comment faire de même avec des entrées à 2 chiffres ?

Exercise 1.167 (Question subsidiaire)**.** [Lemme de Thom] Soit $\mathcal{F}$ une famille de polynômes réels stable par dérivation et $(\varepsilon_P)_{P\in\mathcal{F}}\in\{0;-1\}^{\mathcal{F}}$. Soit $E_P=\{x\in\mathbb{R};P(x)$ est du signe de $\varepsilon_P\}$. Montrez que $E_{\mathcal{F}}=\bigcap_{P\in\mathcal{F}}E_P$ est un intervalle.

Solution ici : Section 2.55.

1.19.2 Khôlle 56 : Relation de mutation des algèbres amassées

Exercise 1.168 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.169 (Problème principal)**.** [Relation amassée] Soit $B=[b_{ij}]_{i;j}\in M_{m;n}(\mathbb{Z})$ avec $m\geq n$ une matrice antisymétrique étendue (i.e. $[b_{ij}]_{1\leq i;j\leq n}$ est antisymétrique). On définit $\mu_k(B)\in M_{m;n}(\mathbb{Z})$ pour $k\leq n$ par coordonnées b'_{ij} :

$$\forall i\in⟦1;m⟧;j\in⟦1;n⟧;\ b'_{ij}=\begin{cases}b_{ij}+b_{ik}b_{kj} & \text{si } b_{ik}>0 \text{ et } b_{kj}>0\\ b_{ij}-b_{ik}b_{kj} & \text{si } b_{ik}<0 \text{ et } b_{kj}<0\\ -b_{ij} & \text{si } i=k \text{ ou } j=k\,;\quad b_{ij}\ \text{sinon}\end{cases}$$

Montrez que $\mu_k(B)$ est une matrice antisymétrique étendue. Montrez que $\mu_k(\mu_k(B))=B$. Montrez que si $b_{kl}=0$ (et $b_{lk}=0$), alors μ_k et μ_l commutent.

Exercise 1.170 (Question subsidiaire)**.** Soit d fixé et deux familles de $d+1$ complexes $(f_i)_i$ et $(h_j)_j$. On pose $f(X)=\sum_i f_iX^i$ et $h(X)=\sum_j h_jX^j$. Montrez que ($\binom{b}{a}$ sont pris nuls si $a>b$) : $\forall i;f_i=\sum_{j=0}^{d}\binom{i}{j}h_j\iff f(X)=h(X+1)$. En déduire l'expression des h_j en fonction des f_i quand $\forall i;f_i=\sum_{j=0}^{d}\binom{i}{j}h_j$.

Solution ici : Section 2.56.

1.19.3 Khôlle 57 : Forme intégrale et morphismes d'évaluation

Exercise 1.171 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.172 (Problème principal)**.** Soient $a;b;c\in[0;1]^3$. Montrez l'existence de $\alpha;\beta;\gamma\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall P\in\mathbb{R}_2[X];\int_0^1P=\alpha P(a)+\beta P(b)+\gamma P(c)$. Déterminez explicitement ces réels en fonction de $a;b;c$.

Exercise 1.173 (Question subsidiaire)**.** Résolvons $P(\mathbb{U})\subseteq\mathbb{U}$. Commencez par trouver des solutions évidentes, puis une structure sur l'ensemble des solutions. Résolvez en supposant que toute solution (de degré >0) s'annule en 0. Enfin, montrez que $P(0)=0$ en s'intéressant à $X^nP(X)\overline{P}(\frac{1}{X})$. Résolvez $P(\mathbb{U})=\mathbb{U}$.

Solution ici : Section 2.57.

1.20 Programme 20 : Polynôme 2

1.20.1 Khôlle 58 : Croisements de Ghys

Exercise 1.174 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.175 (Problème principal)**.** [Croisement de Ghys] Soit P un polynôme qui s'annule en 0. Montrez que si $val(P)$ est paire, alors P est du même signe à gauche et à droite de 0. Trouvez deux polynômes P et Q tels que $P < Q$ avant 0 et $P < Q$ après 0. Idem avec $P < Q$ avant et $P > Q$ après. Même question avec les 6 possibilités pour 3 polynômes. Pour 4 polynômes, montrez qu'il n'est pas possible que $P_4 < P_3 < P_2 < P_1$ avant 0 et $P_3 < P_1 < P_4 < P_2$ après.

Exercise 1.176 (Question subsidiaire)**.** Sachant que deux des racines complexes sont inverses l'une de l'autre, factoriser dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ le polynôme $Z^4 - 21Z + 8$.

Solution ici : Section 2.58.

1.20.2 Khôlle 59 : Système complexe et fonctions élémentaires

Exercise 1.177 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.178 (Problème principal)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xyz = 1 \\ |x| = |y| = |z| \end{cases}$$

Exercise 1.179 (Question subsidiaire)**.** Soit P un polynôme complexe de degré 4. Montrez que les racines de P sont les sommets d'un parallélogramme si et seulement si P' et P''' ont une racine commune.

Solution ici : Section 2.59.

1.20.3 Khôlle 60 : Irrationalité des sinus d'angle septième

Exercise 1.180 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.181 (Problème principal)**.** Trouvez un polynôme de degré 6 à coefficients entiers dont les $\sin\frac{k\pi}{7}$ sont racines pour $k \in \{-3; -2; -1; 1; 2; 3\}$ et en déduire que ces $\sin\frac{k\pi}{7}$ sont tous irrationnels ($\sin 0 = 0$ est rationnel par contre).

Exercise 1.182 (Question subsidiaire)**.** Soit $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Étudiez le polynôme $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \omega_n^k\right)$, en déduire les valeurs de $\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{2}{2-\omega_n^k}\right)$ et, pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque, de $\prod_{k=0}^{n-1}\left(\omega_n^{2k} - 2\omega_n^k\cos a + 1\right)$.

Solution ici : Section 2.60.

1.21 Programme 21 : Fractions rationnelles, Polynômes

1.21.1 Khôlle 61 : Primitive rationnelle impossible pour l'inverse

Exercise 1.183 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.184 (Problème principal)**.** Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle avec $P \wedge Q = 1$, telle que $F' = \frac{1}{X}$. Montrez que $X | Q$, puis que si $X^n | Q$, alors $X^n | Q'$. Concluez qu'une primitive de $\frac{1}{X}$ ne peut pas être une fraction rationnelle.

Exercise 1.185 (Question subsidiaire)**.** Posons $P = X^8 + X^7 \ \ X + 3$ de racines $x_1, \dots, x_8$. Comptez le nombre de termes dans la somme puis calculer :

$$\sum_{\substack{i,j,k \text{ distincts} \\ j<k}} \frac{x_i}{x_j x_k}$$

Solution ici : Section 2.61.

1.21.2 Khôlle 62 : Théorème de Lucas, Fractions rationnelles paires

Exercise 1.186 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.187 (Problème principal)**.** [Théorème de Lucas] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines $\ _1, \dots, \ _n$ de multiplicité $a_1, \dots, a_n$. Soient $(A_i)_i$ les points d'affixe $(\ _i)_i$. En décomposant $\frac{P'}{P}$ en éléments simples, montrez que si $\ $ est racine de P' mais pas de P, alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ \ \ _k} = 0$. En déduire que B, d'affixe $\ $, est un barycentre (à poids positifs) des $(A_i)_i$.

Que ce passe-t-il géométriquement quand on itère ce processus ?

Exercise 1.188 (Question subsidiaire)**.** Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. Montrez que F est paires si et seulement si P et Q sont pairs.

Trouvez un critère pour F impaires.

Solution ici : Section 2.62.

1.21.3 Khôlle 63 : Expressions simples pour des sommes horribles

Exercise 1.189 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.190 (Problème principal)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples non-nulles $x_1, \dots, x_n$. Décomposez en éléments simples la fraction $\frac{1}{XP}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = \frac{1}{P(0)}$.

Exercise 1.191 (Question subsidiaire)**.** Soit n fixé. Écrire sous forme d'une seule fraction rationnelle ($\mathbb{U}_n$ est le groupe des racines n-ième de l'unité) :

$$F = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega X}{\omega^2 X^2 + \omega X + 1}$$

Solution ici : Section 2.63.

1.22 Programme 23 : Espaces vectoriels

1.22.1 Khôlle 64 : Permutoèdre

Exercise 1.192 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.193 (Problème principal)**.** Pour une permutation $\sigma \in S_n$, on pose le vecteur $\varphi(\sigma) \in \mathbb{R}^n$ défini par ses coordonnées : $\varphi(\sigma)_i = \sigma(i)$. On note $t_j = (j\ n)$ la transposition qui échange j et n (si $j = n$, c'est l'identité). Montrez que la famille $(\varphi(t_j))_{1 \leq j \leq n}$ est libre ($n \neq 3$).

Montrez que les points $(\varphi(\sigma) - \varphi(id))_{\sigma \in S_n}$ sont dans un même hyperplan. En déduire la dimension de l'espace engendré par $(\varphi(\sigma) - \varphi(id))_{\sigma \in S_n}$.

Exercise 1.194 (Question subsidiaire)**.** Soient f et g deux formes linéaires $E \to \mathbb{K}$. Montrez que : $f \cdot g = 0 \Leftrightarrow g = 0$ ou $f = 0$.

Solution ici : Section 2.64.

1.22.2 Khôlle 65 : Sous-espace déterminé par intersection et somme

Exercise 1.195 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.196 (Problème principal)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant $A \cap B = A \cap C$, $A+B = A+C$ et $B \subset C$. Montrer que $B = C$.

Exercise 1.197 (Question subsidiaire)**.** Soit $F = \left\{ f \in E\ ;\ \int_0^1 f = 0 \right\}$ pour $E = C^0([0;1])$. Montrez que F est un sous-espace et donnez-en un supplémentaire.

Solution ici : Section 2.65.

1.22.3 Khôlle 66 : Familles libres et familles liées

Exercise 1.198 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.199 (Problème principal)**.** Étudiez la liberté des familles suivantes :

- $((2; i; 4; -i); (i; -1; -i; 1); (0; 3; -i; 1))$
- $(f_a; f_b; f_c)$ où $f_u : x \mapsto \sin(x+u)$ $(a; b; c \in \mathbb{R})$.
- $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $f_n : x \mapsto nx + n^2 + 1$.

Exercise 1.200 (Question subsidiaire)**.** Soit F un sous-espace de E, et $v; w \in E$. Montrez que :

$$F + \mathbb{K}.v = F + \mathbb{K}.w \Leftrightarrow \exists u \in F; \exists \alpha; \beta \in \mathbb{K};\ \alpha\beta \neq 0 \text{ et } u + \alpha v + \beta w = 0$$

Solution ici : Section 2.66.

1.23 Programme 24 : Espaces à dimension finie

1.23.1 Khôlle 67 : Impossible partition d'un espace en sous-espaces

Exercise 1.201 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.202 (Problème principal)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps **infini** et **commutatif**. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Montrez que E ne peut pas s'écrire comme une réunion d'un nombre fini de sous-espaces strictes.

Exercise 1.203 (Question subsidiaire)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x, \exists p_x, f^{p_x}(x) = \vec{0}$. Montrez que f est nilpotente.

Solution ici : Section 2.67.

1.23.2 Khôlle 68 : Centre du groupe des applications linéaires

Exercise 1.204 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.205 (Problème principal)**.** [Centre de $\mathcal{L}(E)$] Soit E un espace vectoriel (quelconque) et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x \in E, f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. Montrez que f est une homothétie.

On suppose que E est de dimension finie. Montrez que l'ensemble des applications linéaires qui commutent avec toutes les autres est exactement l'ensemble des homothéties.

Exercise 1.206 (Question subsidiaire)**.** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrez que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est de dimension finie et la donner. Montrez que la famille des $(\varphi_k)_k$ est une base de E^* avec : $\varphi_k : P \mapsto P^{(k)}(0)$.

Solution ici : Section 2.68.

1.23.3 Khôlle 69 : Matroïde d'une configuration de vecteurs

Exercise 1.207 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.208 (Problème principal)**.** [Matroïdes] On se donne n vecteurs : $(v_i)_{i \in [1;n]} \in \mathbb{R}^d$. On construit $I = \{E \subset [1;n], (v_i)_{i \in E} \text{ est libre}\}$. Montrez que I est un matroïde, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} \emptyset \in I \\ \forall X \in I, \quad Y \subset X \Rightarrow Y \in I \\ \forall X, Y \in I, \quad |X| < |Y| \Rightarrow \exists e \in Y \setminus X, \ X \cup \{e\} \in I \end{cases}$$

Exercise 1.209 (Question subsidiaire)**.** Soient E un espace vectoriel et $F = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de rang s. On suppose qu'il existe une sous-famille $G \subset F$ de r vecteurs de rang s'. Montrez que $s' \geq r + s - n$.

Solution ici : Section 2.69.

1.24 Programme 25 : Dénombrement, Probabilité

1.24.1 Khôlle 70 : Théorème de Singmaster, Paradoxe des 2 enfants

Exercise 1.210 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.211 (Problème principal)**.** [Théorème de Singmaster] Pour $k \neq 1$, soit $N(k) = \#\left\{(n, r) ; k = \binom{n}{r}\right\}$. Montrez que $N(k) = O(\log k)$.

Exercise 1.212 (Question subsidiaire)**.** Vous croisez un ami mathématicien. Vous savez qu'il a exactement 2 enfants et lui demandez "As-tu un garçon ?". Il répond "Oui.". Quelle est la probabilité que son autre enfant soit un garçon ?

Vous croisez maintenant un second ami (qui a aussi exactement 2 enfants) et, taquin, vous lui demandez "As-tu un garçon né un mardi ?". Il répond "Oui.". Quelle est la probabilité que l'autre enfant de votre ami soit un garçon ?

Solution ici : Section 2.70.

1.24.2 Khôlle 71 : Plateaux d'échecs, Jeu de tennis

Exercise 1.213 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.214 (Problème principal)**.** Combien y a-t-il de plateaux d'échecs possibles ? (La promotion de pièce est interdite.)

Exercise 1.215 (Question subsidiaire)**.** Federer joue contre Nadal. Indépendamment à chaque point, Federer a une probabilité p de gagner. Il y a actuellement égalité à 40-40, quelle est la probabilité que Federer gagne le jeu ?

Solution ici : Section 2.71.

1.24.3 Khôlle 72 : Nombre en base quelconque, Sophisme

Exercise 1.216 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.217 (Problème principal)**.** Soit $B = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$. On définit l'écriture en base B d'un nombre par une suite $(a_1, \dots, a_n)$ avec $\forall i, 0 \leq a_i < b_i$: $\overline{a_1 a_2 \dots a_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\prod_{i<j} b_j\right)$.

Montrez que le nombre de nombres qu'on peut exprimer avec cette écriture ne dépend pas de l'ordre des (b_i) dans B, mais que l'écriture en dépend. Montrer que cette écriture induit une bijection entre $\prod_i [\![0, b_i - 1]\!]$ et $[\![0, \prod_i b_i - 1]\!]$. Comment utiliser cette écriture pour fournir un algorithme d'énumération de $\prod_i [\![0, b_i - 1]\!]$?

Exercise 1.218 (Question subsidiaire)**.** [Sophisme du procureur] En 1998, Sally Clark (Royaume-Uni) fut accusée d'avoir tué ses deux enfants (de 11 et 8 semaines). Le pédiatre Roy Meadow, appelé à témoin, déclara que la probabilité que les deux enfants aient été tous deux victimes de mort subite était d'une chance sur 73 millions. Sally Clark fut déclarée coupable sur la base de cet argument, puis libérée de prison 3 ans plus tard suite à l'intervention de la Royal Statistical Society : quel a été leur argument ?

Solution ici : Section 2.72.

1.25 Programme 26 : Probabilités, Markov et Tchebychev

1.25.1 Khôlle 73 : Tchebychev optimal, Inégalité de Chernoff

Exercise 1.219 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.220 (Problème principal)**.** [Tchebychev optimal] Soient $(X_i)_{i\in[1;d]}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon une loi de Rademacher : $\mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_i = 1)$. Pour $S \subset [1;d]$, soit $Y_S = \prod_{i\in S} X_i$ et $Y_\emptyset = 1$. Montrez que les Y_S sont **deux à deux** indépendantes. Pour $Z = \sum_{S\subset[1;d]} Y_S$, montrez que l'inégalité de Tchebychev est une égalité ($a = 2^d$).

Exercise 1.221 (Question subsidiaire)**.** [Inégalité de Chernoff] Soit X une variable aléatoire et $t > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{tX})$ soit finie. Montrez que $\forall a \geq 0, \mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta}\mathbb{E}(e^{tX})$ et $\mathbb{P}(X \leq -a) \leq e^{-ta}\mathbb{E}(e^{-tX})$. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes identiquement distribuées qui suivent $\mathcal{B}(p)$. Pour $S = \sum_i X_i$, montrez que, $\forall k \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(S \geq knp) \leq \frac{1}{e^{np}}\left(\frac{e}{k}\right)^{knp}$.

Solution ici : Section 2.73.

1.25.2 Khôlle 74 : Somme via Tchebychev, Inégalité de Hoeffding

Exercise 1.222 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.223 (Problème principal)**.** Rappelez les propriétés d'une variable aléatoire qui suit une $\mathcal{B}(4n, 1/2)$. Montrez que $\sum_{k=n+1}^{3n-1}\binom{4n}{k} \geq \frac{n-1}{n}2^{4n}$.

Exercise 1.224 (Question subsidiaire)**.** [Inégalité de Hoeffding] On admet le lemme de Hoeffding : si Y est une variable aléatoire bornée entre $-M$ et M, alors $\forall t > 0, \mathbb{E}\left(e^{tY}\right) \leq e^{t^2M^2/2}$. Soit $(X_i)_i$ des variables aléatoires indépendantes, bornées entre $-M$ et M et $\mathbb{E}(X_i) = 0$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. En appliquant l'inégalité de Markov à $\mathbb{P}\left(e^{tS_n} \geq e^{t\varepsilon}\right)$, montrez que $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-\frac{\varepsilon^2}{2nM^2}}$.

Solution ici : Section 2.74.

1.25.3 Khôlle 75 : Inégalité de Cantelli, Collectionneur de coupons

Exercise 1.225 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.226 (Problème principal)**.** [Inégalité de Cantelli] Soit Y une variable aléatoire avec $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{V}(Y) = \sigma^2$. Soit $\lambda, u \in \mathbb{R}_+$. Montrez que $\mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \mathbb{P}\left((Y+u)^2 \geq (\lambda+u)^2\right)$. En déduire que $\forall u > 0, \mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2+u^2}{(\lambda+u)^2}$. Prouvez que, $\forall \lambda > 0, \mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\lambda^2}$ et que, $\forall \lambda < 0, \mathbb{P}(Y \geq \lambda) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\lambda^2}$.

Exercise 1.227 (Question subsidiaire)**.** Vous et un adversaire jouez à un jeu (vidéo) : à chaque manche, vous avez une probabilité p_1 de gagner, et votre adversaire une probabilité p_2 (indépendante de vous). Le premier qui gagne une manche remporte la mise. Quelle est la probabilité que vous gagniez ? Quelle est la probabilité que vous fassiez égalité ? Que ce passe-t-il lorsque les deux joueurs sont aussi bons l'un que l'autre au jeu ($p_1 = p_2$) ?

Solution ici : Section 2.75.

1.26 Programme 27 : Matrices

1.26.1 Khôlle 76 : Carrés magiques, L'autre produit

Exercise 1.228 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.229 (Problème principal)**.** [Carrés magiques] Soit MG_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que les sommes sur toutes les lignes, les colonnes et les deux diagonales sont égales. Montrez que MG_n est un espace vectoriel. Calculez la dimension de MG_n, en utilisant $\varphi : MG_n \to \mathcal{M}_{n-2,n-1} \times \mathbb{R}^{n-2}$, l'application qui a M associe $(M_1, m_{1,n}, m_{n-1,1}, m_{n-1,3}, \dots, m_{n-1,n-2})$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} & & M_1 & & & \begin{matrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n-2,n} \end{matrix} \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n-1} & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exercise 1.230 (Question subsidiaire)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez BA $(= I_2)$.

Solution ici : Section 2.76.

1.26.2 Khôlle 77 : Équation duale, Matrices vampires

Exercise 1.231 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.232 (Problème principal)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Montrez que $Ax = b$ a une solution si et seulement si : $\forall y \in \mathbb{R}^m, \ y^T A = 0^T \Rightarrow y^T b = 0$.

Exercise 1.233 (Question subsidiaire)**.** [Matrices vampires] Calculer $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^2$. Prouver que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\llbracket 0, 9 \rrbracket)$ vérifie $M^2 = \begin{pmatrix} \overline{aa} & \overline{bb} \\ \overline{cc} & \overline{dd} \end{pmatrix}$ ssi $ad - bc = 0$ et $a + d = 11$. Étudier la réciproque. Comment faire avec des entrées à 2 chiffres ?

Solution ici : Section 2.77.

1.26.3 Khôlle 78 : Groupe d'Heisenberg, Hyperplan matriciel

Exercise 1.234 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.235 (Problème principal)**.** [Groupe d'Heisenberg] Pour un anneau A, on construit $H_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a, b, c \in A \right\}$. On notera $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par (a, b, c). En supposant $(A, +)$ commutatif, montrez que $H_3(A)$ est un groupe multiplicatif avec $(a, b, c) \cdot (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c' + ab')$, puis déterminez $(a, b, c)^{-1}$ et $(a, b, c)^n$. Pour $x, y \in H_3(A)$, calculez $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. En déduire le centre $Z(H_3(A)) = \{x \in H_3(A) ; \forall y \in H_3(A), xy = yx\}$, et le groupe dérivé $DG(H_3(A)) = \langle [x, y] ; x, y \in H_3(A) \rangle$. À quelle condition $H_3(A)$ est-il abélien ? Montrez que $H_3(\mathbb{Z})$ est engendré par $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Exercise 1.236 (Question subsidiaire)**.** Pour $n \geq 2$, montrez que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ intersecte $GL_n(\mathbb{K})$.

Solution ici : Section 2.78.

1.27 Programme 28 : Matrices

1.27.1 Khôlle 79 : Lemme de Whitehead, Matrice de rang 1

Exercise 1.237 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.238 (Problème principal)**.** [Lemme de Steinberg-Whitehead] On note $e_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ la matrice de transvection et $E_n = \langle e_{i,j}(\lambda)\rangle_{i\neq j,\ \lambda\in\mathbb{K}} \subsetneq GL_n$. Montrez que : $e_{i,j}(\lambda)e_{i,j}(\mu) = e_{i,j}(\lambda+\mu)$, puis $[e_{i,j}(\lambda), e_{j,\ell}(\mu)] = e_{i,\ell}(\lambda\mu)$ si $i \neq \ell$ et $[e_{i,j}(\lambda), e_{k,\ell}(\mu)] = I_n$ pour $i \neq \ell$ et $j \neq k$. En déduire que $DG(E_n) = E_n$.

Soit $a \in \mathbb{K}^*$, montrez que $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ s'écrit comme produit de 4 transvections. Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $B \in GL_n$, montrez qu'on peut écrire avec n^2 transvections $\left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$, puis que $\left(\begin{array}{c|c} B & 0_n \\ \hline 0_n & B^{-1} \end{array}\right) \in E_{2n}$. Montrez que $M \mapsto \left(\begin{array}{c|c} M & 0_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ est un morphisme de groupe. Montrez que $DG(GL_n)$ est isomorphe à un sous-groupe de E_{2n}.

Exercise 1.239 (Question subsidiaire)**.** Soit E de dimension finie et de base $\mathcal{B}$. Soit $u \in E$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Donnez la matrice de $f : x \mapsto \varphi(x)u$ dans $\mathcal{B}$.

Solution ici : Section 2.79.

1.27.2 Khôlle 80 : Hyperplan de matrice stable par multiplication

Exercise 1.240 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.241 (Problème principal)**.** Montrez que $\varphi : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$, défini par $A \mapsto (\varphi_A : M \mapsto tr(AM))$ est un isomorphisme. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n$, en déduire que $\exists A \in \mathcal{M}_n,\ H = \text{Ker } \varphi_A$. On suppose que H est stable par multiplication. Montrez que si $B \in H$, alors BA est colinéaire à A. Montrez que Im A est non nul. On construit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{C}$ une base dont le premier vecteur est dans Im A, avec $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Pour $B \in H$, donnez la première colonne de $P^{-1}BP$. Montrez que $M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n$. En déduire enfin que $n = 2$ et $H \simeq T_2$.

Exercise 1.242 (Question subsidiaire)**.** On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouvez les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $A - \lambda I_4 \notin GL_4$ et résoudre alors $AX = \lambda X$. En déduire $P \in GL_4(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale.

Solution ici : Section 2.80.

1.27.3 Khôlle 81 : Lemme de Schur, Centre du groupe linéaire

Exercise 1.243 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.244 (Problème principal)**.** [Lemme de Schur] Soit G un sous-groupe de GL_n. Pour $B \in G$, on note $i(B) : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n,\ M \mapsto BMB^{-1}$. Montrez que $i : B \mapsto i(B)$ est un morphisme de groupe de $G \to \text{Aut}(\mathcal{M}_n)$. Montrez que i est injectif si et seulement si G ne contient pas d'autre homothétie que l'identité. Soit $\mathcal{M}_n^G = \{M\ ;\ \forall B \in G,\ i(B)(M) = M\}$. Montrez que pour $M \in \mathcal{M}_n^G$, Ker M et Im M sont stables par G ($x \in V, B \in G \Rightarrow Bx \in V$). Si E n'a pas de sous-espace non trivial stable par G, montrez que $\mathcal{M}_n^G \subset \{0_n\} \cup GL_n$ et donnez $\dim \mathcal{M}_n^G$.

Exercise 1.245 (Question subsidiaire)**.** Déterminez le centre de $GL_n(\mathbb{K})$.

Solution ici : Section 2.81.

1.28 Programme 29 : Intégration

1.28.1 Khôlle 82 : Problème d'optimisation, Norme L^∞

Exercise 1.246 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.247 (Problème principal)**.** Soit $E = \{f \in C^1([0;1]) \ ; \ f(0) = 0; f(1) = 1\}$. Montrez que pour tout $f \in E$, on a $\int_0^1 e^{-t}(f'(t) - f(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{e}$, puis $\int_0^1 |f' - f| \geq \frac{1}{e}$, et discutez le cas d'égalité. Soit $f_n : x \mapsto n(2x - nx^2)e^{x-1}$ si $x \in [0;1/n[$ et e^{x-1} si $x \in [1/n;1]$. Montrez que $f_n \in E$. Montrez que $I_n = \int_0^1 |f_n' - f_n|$ vérifie $I_n = \frac{2}{e}\int_0^1 (1-x)e^{x/n}\mathrm{d}x$, et $I_n - \frac{1}{e} \leq \frac{1}{e}\left(e^{1/n} - 1\right)$. Conclure.

Exercise 1.248 (Question subsidiaire)**.** [Norme L^∞] Soit $f \in C^0([a;b])$ positive. Montrez que $\left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \to \sup f$. Pour g continue et strictement positive sur $[a;b]$, montrez que $v_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ converge et donnez sa limite.

Solution ici : Section 2.82.

1.28.2 Khôlle 83 : Changement de variable, Minoration de $|f''|$

Exercise 1.249 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.250 (Problème principal)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $p, t, i : [-a;a] \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues par morceaux avec p et t paires, i impaire. Simplifiez :

$$\int_{-a}^{a} \frac{p(x)}{1 + t(x)^{i(x)}}\,\mathrm{d}x$$

En déduire la valeur de $\int_{-e}^{e} \frac{x^4}{1+\pi^{x^7}}\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-e}^{e} \frac{x^4}{1+(\cos x)^{\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

Exercise 1.251 (Question subsidiaire)**.** Soit $f \in C^2([0;1];\mathbb{R})$ avec $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrez qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Solution ici : Section 2.83.

1.28.3 Khôlle 84 : Majoration polynômiale, Riemann-Lebesgue

Exercise 1.252 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.253 (Problème principal)**.** Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un polynôme P de degré impair vérifiant : $\forall n, x, \ |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$. Montrez que f est la fonction nulle. Que se passe-t-il si P est pair ?

Exercise 1.254 (Question subsidiaire)**.** [Lemme de Riemann-Lebesgue] Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$ et $u_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$. Montrez que $u_n \to 0$. Montrez que cette propriété est conservée quand f est continue par morceaux.

Solution ici : Section 2.84.

1.29 Programme 30 : Déterminant

1.29.1 Khôlle 85 : Coordonnées de Plücker

Exercise 1.255 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.256 (Problème principal)**.** [Coordonnées de Plücker] Pour $M \in M_{2,k}(\mathbb{R})$, on définit la coordonnée $p_{i,j}$ de Plücker : $p_{i,j} = \begin{vmatrix} m_{1i} & m_{1j} \\ m_{2i} & m_{2j} \end{vmatrix}$ ($p_{i,i} = m_{1i}$). Montrez que ces coordonnées introduisent une injection des plans de $\mathbb{R}^k$ dans les droites de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

Exercise 1.257 (Question subsidiaire)**.** Pour $i < j < k < l$, montrez que : $p_{i,k}p_{j,l} + p_{i,l}p_{j,k} = p_{i,j}p_{j,k}$. En déduire que ce n'est pas une bijection.

Solution ici : Section 2.85.

1.29.2 Khôlle 86 : Hyperplan affin, Démonstration de Zagier

Exercise 1.258 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.259 (Problème principal)**.** Soit $n+1$ "rayons" $\mathbf{r}_0, \ldots, \mathbf{r}_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $(\mathbf{r}_0, \ldots, \mathbf{r}_{n-1})$ soit libre et $\mathbf{r}_n \neq \mathbf{0}$. On choisit des "hauteurs" $h_0, \ldots, h_{n-1} \in \mathbb{R}_+$ et on construit l'hyperplan affine $H_{\mathbf{r}}$ qui passe par les points $h_0\mathbf{r}_0, \ldots, h_{n-1}\mathbf{r}_{n-1}$. Déterminez h_n tel que le point $h_n\mathbf{r}_n$ soit dans $H_{\mathbf{r}}$.

Exercise 1.260 (Question subsidiaire)**.** [Zagier] Soit $p \equiv 1\ [4]$ un nombre premier. Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 ;\ x^2 + 4yz = p\}$. En supposant que $\#S$ est impair, montrez que $f : (x,y,z) \mapsto (x,z,y)$ a au moins un point fixe, puis que p est la somme de deux carrés. Comptez les points fixes de $g : S \to S$ et concluez :

$$g : (x,y,z) \mapsto \begin{cases} (x+2z, z, y-x-z) & \text{si } x < y-z \\ (2y-x, y, x-y+z) & \text{si } y-z < x < 2y \\ (x-2y, x-y+z, y) & \text{si } x > 2y \end{cases}$$

Solution ici : Section 2.86.

1.29.3 Khôlle 87 : Sous-espaces stricts, Transformée de Hankel

Exercise 1.261 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.262 (Problème principal)**.** Montrez que $\mathbb{Q}^2$ est réunion dénombrable de sous-espaces vectoriels stricts de $\mathbb{Q}^2$ (comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel). Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, trouver 2 espaces vectoriels de dimension infinie qui sont réunions dénombrables de sous-espaces stricts. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrez que E n'est pas réunion dénombrable de sous-espaces vectoriels stricts (posez $x_\lambda = 1e_1 + \lambda e_2 + \lambda^2 e_3 + \cdots + \lambda^{n-1}e_n$ pour $(e_i)_i$ une base de E).

Exercise 1.263 (Question subsidiaire)**.** [Déterminants de Hankel] Soit $(b_n)_n$ une suite de réels. On construit sa transformée de Hankel $(h_n)_n$ par : $h_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n+1} & \cdots & b_{2n} \end{vmatrix}$.

Montrez que $(b_n)_n = 0 \iff (h_n)_n = 0$. Montrez que $(b_n)_n$ vérifie une relation de récurrence ssi sa $(h_n)_n$ est nulle à partir d'un certain rang. Montrez que $(h_n)_n$ est invariante par la transformation d'Euler, c'est-à-dire que la transformée de Hankel de $(c_n)_n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$ est $(h_n)_n$ (on utilisera $B = \left[\binom{j-1}{i-1}\right]_{i,j}$).

Solution ici : Section 2.87.

1.30 Programme 31 : Séries

1.30.1 Khôlle 88 : Série et permutation

Exercise 1.264 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.265 (Problème principal)**.** Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Montrez que la série de terme général $\frac{1}{n\sigma(n)}$ converge. Étudiez les séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha\sigma(n)^\beta}$ (avec $\alpha+\beta>1$ et $\alpha,\beta>0$). Étudiez la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercise 1.266 (Question subsidiaire)**.** Soient $a,b\in\mathbb{R}$. Montrez que : $\sum_{n\geq 0}\frac{a^nb^n}{(n!)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

Solution ici : Section 2.88.

1.30.2 Khôlle 89 : Escargot de Gardner, Suite de Sylvester

Exercise 1.267 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.268 (Problème principal)**.** [Escargot de Gardner] Un escargot est posé à l'extrémité d'une corde parfaitement élastique de $100m$. L'escargot souhaite arriver à l'autre bout de la corde. Il se meut à la vitesse d'$1m/h$. Au début de chaque heure, un géant tire sur la corde et celle-ci s'allonge de façon élastique. À chaque fois la corde s'allonge de $100m$ de façon homogène. Est-ce que l'escargot parviendra à son but ? Quel est l'équivalent de la série ?

Exercise 1.269 (Question subsidiaire)**.** [Suite de Sylvester] Soit la suite $(s_n)_n$ avec $s_0=2$ et $s_n=1+\prod_{k=0}^{n-1}s_k$. Montrez que $s_n\to+\infty$. Montrez que la série de terme général $1/s_n$ converge et calculez sa somme. Montrez que la somme des k premiers termes de la suite $(1/s_n)_n$ constitue la meilleure approximation possible par défaut de 1 à l'aide de k fractions égyptiennes (fraction positive avec un numérateur qui vaut 1) puis que pour représenter tout nombre dans $]1805/1806;1[$, une somme de fractions égyptiennes doit avoir au moins cinq termes.

Solution ici : Section 2.89.

1.30.3 Khôlle 90 : Série de Bernoulli, Suites croissantes

Exercise 1.270 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.271 (Problème principal)**.** [Série de Bernoulli] On définit les polynômes de Bernoulli : $B_0=1$, $B_p'=pB_{p-1}$ et $\int_0^1 B_p=0$ ($p\neq 0$). Calculez $f(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}B_k(x)\frac{t^k}{k!}$. On admettra que, **ici, et si la sommation converge**, la dérivée et l'intégrale peuvent être échangées avec la sommation sans problème.

Exercise 1.272 (Question subsidiaire)**.** Soit S l'ensemble des suites croissantes d'entiers $(q_i)_i$ avec $q_1\geq 2$. Pour $\mathbf{q}\in S$, soit $\Phi(\mathbf{q})=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{q_1q_2\dots q_k}$. Montrez que $\Phi(\mathbf{q})$ converge, que $\Phi:S\to]0;1]$, que Φ est strictement décroissante (l'ordre sur S est l'ordre lexicographique) et que c'est une bijection. Montrez que $\Phi^{-1}(\mathbb{Q}\cap]0;1])$ est l'ensemble des suites croissantes stationnaires.

Solution ici : Section 2.90.

1.31 Programme 32 : Espaces euclidiens

1.31.1 Khôlle 91 : Inégalité duale, Famille très obtuse

Exercise 1.273 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.274 (Problème principal)**.** Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. Prouvez que $(x+2y+3z)^2 \leq 14$ et étudiez les cas d'égalité. On suppose maintenant que $x^2+2y^2+3z^2 \leq 1$. Prouvez que $(x+y+z)^2 \leq 11/6$. Généraliez.

Exercise 1.275 (Question subsidiaire)**.** On pose $\widehat{u,v} = \arccos\left(\frac{(u|v)}{\|u\|\,\|v\|}\right)$. Si $\dim E \geq 3$, montrez qu'il n'existe pas $u_1, u_2, u_3 \in E$ tels que $\forall i \neq j, \widehat{u_i, u_j} > \frac{2\pi}{3}$.

Solution ici : Section 2.91.

1.31.2 Khôlle 92 : Déformation du produit, Hyperplan médiateur

Exercise 1.276 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.277 (Problème principal)**.** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euclidien. Soit $P \in \mathcal{L}(E)$ de norme ≤ 1 ($\forall x, \|Px\| \leq \|x\|$), auto-adjoint ($\forall x, y, \langle x, Py\rangle = \langle Px, y\rangle$). Pour $\lambda \in [0,1]$, montrez que $(x|y)_{P,\lambda} = \langle x | (id_E - \lambda P)y\rangle$ est un produit scalaire.

Exercise 1.278 (Question subsidiaire)**.** Soit $u, v \in E$, un espace euclidien, tels que $\|u\| = \|v\|$. Soit $H = \{x \in E \; ; \; \|u - x\| = \|v - x\|\}$. Faites un dessin dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Montrez que $H = \{u - v\}^\perp$, en déduire $\dim H$. Montrez que v est l'image de u par la symétrie orthogonale vis-à-vis de H.

Solution ici : Section 2.92.

1.31.3 Khôlle 93 : Fonction de Leibnitz, Produit issu de matrice

Exercise 1.279 (Question de cours)**.** Cf Programme de Khôlles.

Exercise 1.280 (Problème principal)**.** [Fonction scalaire de Leibnitz] Soit E euclidien. Soient $(a_i)_i \in \mathbb{R}^n$ de somme non nulle et $(A_i)_i \in E^n$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \sum_i a_i MA_i^2 = \sum_i a_i \|M - A_i\|^2$. On construit G, barycentre de $\{(A_i, a_i)\}_i$, défini par $\sum_i a_i \vec{GA_i} = \vec{0}$. En déduire que $f(M) = f(G) + \left(\sum_i a_i\right) MG^2$. Soient A, B deux points du plan et a, b deux réels. Quel est le lieu des points M du plan qui vérifient $aAM^2 + bBM^2 = k$ où k est une constante ?

Exercise 1.281 (Question subsidiaire)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$. Montrez que φ est un produit scalaire si et seulement si $tr(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.

Solution ici : Section 2.93.

2 Solutions

2.1 Khôlle 1 : Logique

Exercise 2.1 (Question de cours)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Supposons que $f = i + p$ avec i une fonction impaire et p une fonction paire. Alors, soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= i(x) + p(x) \\ f(-x) &= -i(x) + p(x) \end{aligned}$$

Donc, en résolvant le système, on trouve : $i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ et $p(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$. On a bien prouvé que **si** f s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, **alors** cette écriture est unique.

Reste à vérifier que $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ est bien paire (ce qui est le cas), que $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ est bien impaire (ce qui est le cas) et que $\forall x,\ f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ (ce qui est le cas).

Ainsi, on a bien démontré (par analyse-synthèse) que toute fonction réelle à variable réelle s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercise 2.2 (Problème principal)**.** Soit $j \in I$ et $X \subset I$. On va montrer que $(A_j \cap B_j) \subset \left(\bigcup_{i \in X} A_i \cup \bigcup_{i \notin X} B_i\right)$.

— Si $j \in X$, alors on a : $(A_j \cap B_j) \subset A_j \subset \left(\bigcup_{i \in X} A_i \cup \bigcup_{i \notin X} B_i\right)$.

— Si $j \notin X$, alors on a : $(A_j \cap B_j) \subset B_j \subset \left(\bigcup_{i \in X} A_i \cup \bigcup_{i \notin X} B_i\right)$.

Finalement, on a bien :

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \subset \bigcap_{X \subset I} \left(\bigcup_{i \in X} A_i \cup \bigcup_{i \notin X} B_i \right)$$

Étudions l'inclusion réciproque. Pour $X = \emptyset$ puis $X = I$, on obtient :

$$\bigcap_{X \subset I} \left(\bigcup_{i \in X} A_i \cup \bigcup_{i \notin X} B_i \right) \subset \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in I} A_j \right) = \bigcup_{i,j \in I} (A_i \cap B_j)$$

Or si $i \neq j$, on peut construire $X \in \mathcal{P}(I)$ tel que $i \notin X$ et $j \in X$. Si $x \in (A_i \cap B_j)$ et $x \notin A_k$ (pour $k \neq i$), $x \notin B_k$ (pour $k \neq j$), alors $x \notin \bigcup_{k \in X} A_k \cup \bigcup_{k \notin X} B_k$. Ainsi, on obtient bien :

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \supset \bigcap_{X \subset I} \left(\bigcup_{i \in X} A_i \cup \bigcup_{i \notin X} B_i \right)$$

On a finalement l'égalité souhaitée.

Exercise 2.3 (Question subsidiaire)**.** La division en 4 carrés se fait par les médiatrices des côtés (il faut montrer que ce sont des carrés tout de même). La division en 6 est plus astucieuse. Il faut prendre la division en 9 carrés (on divise chacun des côtés en 3), et réunir les 4 carrés en haut à gauche. Ensuite, on peut passer d'une division en n carrés à une division en $n+3$ carrés en divisant un des carrés présents en 4 (ce qui ajoute $4-1=3$ carrés). Un rédaction propre de la récurrence est attendue.

Pour compter le nombre manières de découper un carré en n, il faut partir des 1 découpages en 4 et des 4 découpages en 6 et on peut alors compter le nombre de manières de découper un carrée en n carrés par :

$$u_n = (n-3)u_{n-3} + 4(n-6)u_{n-6}$$

Attention, on compte ici les processus de séparation, pas les figures obtenues (ce deuxième calcul étant bien plus ardu).

Retour à la Khôlle : Section 1.1.1.

2.2 Khôlle 2 : Logique

Exercise 2.4 (Question de cours)**.** Montrons la contraposée : si n est impair, alors n^2-1 est divisible par 8. Soit n impair, il s'écrit alors $n = 4k+r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1;3\}$. De fait : $n^2-1 = 16k^2+8kr+r^2-1$. Reste à regarder que $3^2-1=8$ et $1^2-1=0$ sont des multiples de 8, ce qui est évident.

Exercise 2.5 (Problème principal)**.** Raisonnons par récurrence **forte** pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ ; \exists p$ premier$;\ p|n$.

Pour n premier, c'est évident : $n|n$. En particulier, l'initialisation est validée avec $n=2$.

Fixons n et supposons que notre hypothèse soit vérifiée pour tout $k<n$. Si n n'est divisible par aucun $k \in [2;n-1]$, alors n est premier, donc $n|n$ garanti que n est bien divisible par un nombre premier. Sinon, il existe $k \in [2;n-1]$ tel que $k|n$, or, par hypothèse de récurrence, il existe p premier tel que $p|k$. Par transitivité (de la divisibilité) : $p|n$.

Finalement, on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ; \exists p$ premier$;\ p|n$.

Exercise 2.6 (Question subsidiaire)**.** On écrit sous forme réduite $H_2 = \frac{3}{2}$. Le numérateur est impair et le dénominateur est pair. On va montrer par récurrence (forte) que H_n s'écrit sous forme réduite $H_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec p_n impair et q_n pair.

$\star$ Supposons que n soit pair et que notre hypothèse soit vérifiée pour $n-1$. Alors $H_n = \frac{np_{n-1}+q_{n-1}}{nq_{n-1}}$. Alors H_n s'écrit sous forme réduite $\frac{p_n}{q_n}$ avec p_n impair et q_n pair car la facteur 2 du dénominateur nq_{n-1} ne se simplifie pas avec le numérateur $np_{n-1}+q_{n-1}$.

$\star$ Supposons que $n = 2k-1$ soit impair et que notre hypothèse soit vérifiée pour $n-1$. Alors :

$$H_n = \sum_{j=1} \frac{1}{2j} + \sum_{j=1} \frac{1}{2j-1} = \frac{1}{2}H_k + \frac{P}{Q}$$

où la deuxième fraction est sous forme réduite avec Q impair (car on somme des fractions de dénominateur impair) et P le nombre qui convient (peu importe sa valeur exacte).

Ensuite, $H_k = \frac{p_k}{q_k}$ avec p_k impair et q_k pair par hypothèse de récurrence. Finalement :

$$H_n = \frac{Qp_k + 2Pq_k}{2Qq_k}$$

De la même manière que précédemment, en réduisant la fraction, on trouve bien $H_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec p_n impair et q_n pair car $Qp_k + 2Pq_k$ est impair et $2Qq_k$ est pair.

Ainsi, on a montré par récurrence que H_n ne peut jamais être un entier pour $n \geq 2$ car son dénominateur est pair alors que son numérateur est impair.

Retour à la Khôlle : Section 1.1.2.

2.3 Khôlle 3 : Ensembles

Exercise 2.7 (Question de cours)**.**

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Démonstration avec $\sum$:

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\
&= a^n b^0 - a^0 b^n
\end{aligned}$$

Attention au changement d'indice en passant à la deuxième ligne !

Exercise 2.8 (Problème principal)**.** Le calcul est très casse-pied, mais vous pouvez faire un dessin !

Le justifier proprement est formateur, et je ne vous mâcherai pas le travail en le faisant ici. Il s'agit de vérifier que $A\Delta B = B\Delta A$ (commutativité), puis $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ (associativité), puis $A\Delta\emptyset = A$ (élément neutre : $\emptyset$), et enfin $A\Delta A = \emptyset$ (inverse : $A^{-1} = A$).

Ici, il faut trouver que :

$$\begin{aligned}
A\Delta(B \cup C) &= (A\Delta B) \cup (A\Delta C) \\
A\Delta(B \cap C) &\neq (A\Delta B) \cap (A\Delta C) \\
A \cup (B\Delta C) &\neq (A \cup B)\Delta(A \cup C) \\
A \cap (B\Delta C) &= (A \cap B)\Delta(A \cap C)
\end{aligned}$$

Exercise 2.9 (Question subsidiaire)**.** On a :

- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
- $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
- $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.
- $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$.
- $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

Si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, alors si $x \in A$, on a $\mathbb{1}_A(x) = 1$, donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$, donc $x \in B$, on a : $A \subset B$. Par symétrie, on a $A = B$. La réciproque est évidente.

On montre que les fonctions indicatrices de $A \cap (B\Delta C)$ et de $(A\Delta B) \cap (A\Delta C)$ pour en montrer l'égalité. Or on a (on utilise $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$) :

$$\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C} = \mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C-2(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C)$$

Ainsi, $\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)} = \mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}$, ce qui montre la distributivité de $\cap$ sur Δ.

De même :

$$\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_C\mathbb{1}_B + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$$

On obtient une formule symétrique, on en déduit que Δ est associative.

Retour à la Khôlle : Section 1.1.3.

2.4 Khôlle 4 : Système et polynôme, Somme polynomiale

Exercise 2.10 (Question de cours)**.** Toutes les fonctions de la forme $f : n \mapsto \lambda n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ fonctionnent.

Réciproquement, si f respectent $\forall n, m,\ f(n+m) = f(n) + f(m)$, alors appelons $\lambda := f(1)$. On a $f(n+1) = f(n) + \lambda$, donc par récurrence (immédiate, mais il faut la rédiger proprement) : $f(n) = \lambda n + f(0)$. Or $f(m) = f(m+0) = f(m) + f(0)$, donc $f(0) = 0$.

Par analyse-synthèse, on a montré que $\forall n, m,\ f(n+m) = f(n)+f(m)$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n,\ f(n) = \lambda n$.

Pour étendre à $\mathbb{Z}$, on remarque que si une fonction f respecte l'hypothèse souhaitée, alors $f(n) + f(-n) = f(n-n) = f(0) = 0$. De fait, les seules fonctions candidates sont celles qui vérifient $f(n) = f(1)n$ pour $n \geq 0$ et $f(-n) = -f(n)$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = f(1)n$. La réciproque est vraie.

Pour étendre à $\mathbb{Z}$, on remarque que si une fonction f respecte l'hypothèse souhaitée, alors $n f\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1)$. De fait, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1)$, puis $f\left(\frac{p}{n}\right) = f\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{n}\right) = p f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{p}{n}f(1)$. Ainsi, les seules fonctions candidates sont celles qui vérifient $f(r) = \lambda r$. La réciproque est vraie.

Exercise 2.11 (Problème principal)**.** On pose $P(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$, on obtient $\int_0^1 P = \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{2}p_1 + p_0$. D'un autre côté : $\alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c) =$

$(\ a^2 + \ b^2 + \ c^2)p_2 + (\ a + \ b + \ c)p_1 + (\ + \ + \ )p_0$. Ainsi, on a $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = \ P(a) + \ P(b) + \ P(c)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \ + \ + \ = 1 \\ \ a + \ b + \ c = \frac{1}{2} \\ \ a^2 + \ b^2 + \ c^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

On a un système de 3 équations à 3 inconnues (qui sont ,   et), sa résolution, si on parvient à l'existence d'une solution, prouvera l'existence d'un triplet tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = \ P(a) + \ P(b) + \ P(c)$. Or ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \ + \ + \ = 1 \\ \ (b - a) + \ (c - a) = \frac{1}{2} - a \\ \ (b^2 - a^2) + \ (c^2 - a^2) = \frac{1}{3} - a^2 \end{cases}$$

Puis à :

$$\begin{cases} \ + \ + \ = 1 \\ \ (b - a) + \ (c - a) = \frac{1}{2} - a \\ \ (c - a)(c - b) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(b + a) + ba \end{cases}$$

Ainsi, si a, b et c sont différents, alors on a une unique solution au système :

$$\begin{cases} \ = \frac{2 + 6bc - 3c - 3b}{6(a - b)(a - c)} \\ \ = \frac{2 + 6ca - 3a - 3c}{6(b - c)(b - a)} \\ \ = \frac{2 + 6ba - 3a - 3b}{6(c - b)(c - a)} \end{cases}$$

N.B. : Si $c = a$ (ou $b = c$ ou $a = b$), on se retrouve avec 2 équations pour 3 inconnues, donc on a une infinité de solutions, une infinité de candidats $(\ ;\ )$ valides pour $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = \ P(a) + \ P(b)$, dont on a l'expression explicite.

Exercise 2.12 (Question subsidiaire)**.** On trouve $P = \frac{1}{30}X(X - 1)(6X^3 - 9X^2 + X + 1)$, donc $\sum_k k^4 = P(n + 1) - P(1) =: Q(n)$ avec $Q = \frac{1}{30}X(X + 1)(6X^3 + 9X^2 + X - 1)$.

Dès lors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n^5}\left(\sum_{k,h=1} 5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4\right) \\ &= \frac{1}{n^5}\left(5\sum_{k,h} h^4 - 18\sum_{k,h} h^2k^2 + 5\sum_{k,h} k^4\right) \\ &= \frac{1}{n^5}\left(5nQ(n) - 18\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2 + 5nQ(n)\right) \\ &= \frac{1}{n^5}\left(2 \times 5 \times 6 \times \frac{1}{30}n^6 - 18 \times 2^2 \times \frac{1}{6^2}n^6 + n^5\left(\frac{15}{3} - \frac{12}{2}\right) + O(n^4)\right) \\ &\to 1 \end{aligned}$$

Retour à la Khôlle : Section 1.2.1.

2.5 Khôlle 5 : Système et polynômes, Sommation d'Abel

Exercise 2.13 (Question de cours)**. a)** On a :

$$\sum_{1\le i,j\le n} j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = n\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

b) Puis :

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n} j &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j = \sum_{j=2}^{n} j(j-1) = \sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j\\ &= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right) - \left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)\\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}\end{aligned}$$

c) Ensuite :

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n} i &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n} i = \sum_{j=1}^{n-1} i(n-i+1) = (n+1)\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2\\ &= (n+1)\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\ &= \frac{(n-1)n(n+4)}{6}\end{aligned}$$

d) De surcroît : $\sum_{1\le i<j\le n} ij = \sum_{1\le j<i\le n} ij$. D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n} ij &= \frac{1}{2}\left(\sum_{1\le i,j\le n} ij - \sum_{i=1}^{n} i^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3}\right)\\ &= \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2/3)}{8}\end{aligned}$$

e) Enfin, pour la dernière somme, on peut prendre deux copies de la même somme et échanger les noms des variables muettes i et j :

$$
\begin{aligned}
2\sum_{1\le i,j\le n}\frac{i}{i+j} &= \sum_{1\le i,j\le n}\frac{i}{i+j}+\sum_{1\le i,j\le n}\frac{j}{j+i}\\
&= \sum_{1\le i,j\le n}\frac{i+j}{i+j}\\
&= \sum_{1\le i,j\le n}1 = n^2
\end{aligned}
$$

Donc : $\sum_{1\le i,j\le n}\frac{i}{i+j}=\frac{n^2}{2}$.

Exercise 2.14 (Problème principal)**.** Écrivons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on peut alors écrire les conditions données :

$$
\left\{
\begin{aligned}
-a+b-c+d &= 1\\
a+b+c+d &= 0\\
8a+4b+2c+d &= 1
\end{aligned}
\right.
$$

On a un variable auxiliaire. On trouve par pivot :

$$
\left\{
\begin{aligned}
b &= -a-1/2\\
c &= -2a+1/2\\
d &= 2a
\end{aligned}
\right.
$$

Finalement, l'ensemble des polynômes P tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$ est $\{aX^3 - (a+\frac{1}{2})X^2 - (2a-\frac{1}{2})X + 2a ; a \in \mathbb{R}\}$.

Exercise 2.15 (Question subsidiaire)**.** Convenons de poser $A_{-1} = 0$. Alors :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_kB_k &= \sum_{k=0}^{n}(A_k - A_{k-1})B_k\\
&= \sum_{k=0}^{n}A_kB_k - \sum_{k=0}^{n}A_{k-1}B_k\\
&= \sum_{k=0}^{n}A_kB_k - \sum_{k=0}^{n-1}A_kB_{k+1}\\
&= A_nB_n + \sum_{k=0}^{n-1}A_k(B_k - B_{k+1})\\
&= A_nB_n - \sum_{k=0}^{n-1}A_kb_k
\end{aligned}
$$

Il s'agit en fait de l'intégration par partie pour les sommes et non pour les intégrales. Avec des outils plus puissant de théorie de la mesure, les deux formules sont en fait deux facettes d'une même formule plus générale.

Avec $a_k = 2^k$ et $B_k = k$, on a $A_n = 2^{n+1} - 1$ et $b_n = 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k = (2^{n+1}-1)n - \sum_{k=0}^{n-1}(2^{k+1}-1) = n2^{n+1} - n - 2(2^n-1)+n = 2^{n+1}(n-1)+2$$

Retour à la Khôlle : Section 1.2.2.

2.6 Khôlle 6 : Ensemble milieu, Coefficients binomiaux

Exercise 2.16 (Question de cours)**. Cf cours !** Attention à bien précisé que a et b doivent commuter (dans les matrices, par exemple, le binôme de Nexton n'est pas toujours vrai). Soient ainsi $n \in \mathbb{N}$ et a, b deux éléments (d'un même anneau) qui commentent, on a : $(a+b)^1 = a^1b^0 + a^0b^1$. Supposons qu'on ait $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$, alors :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a(a+b)^n + b(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1}\\ &= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^jb^{(n+1)-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{(n+1)-k}\\ &= a^{n+1}b^0 + a^0b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^kb^{(n+1)-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{(n+1)-k}\end{aligned}$$

Par récurrence, on a bien prouvé la formule du binôme de Newton.

Exercise 2.17 (Problème principal)**.** On nomme a_k les affixes des A_k et m_k celles de M_k. On peut écrire le système correspondant $m_n + m_1 = 2a_n$ et $m_k + m_{k+1} = 2a_k$. Donc $z_{k+1} = -z_k + 2a_k$ puis $z_n = 2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-1-j}a_j$. En utilisant la dernière égalité, on a donc : $2\sum_k(-1)^{n-k}a_k = (1-(-1)^n)z_1$.

On a donc deux possibilités, soit n est impair, et alors on trouve une valeur explicite pour z_1, et ainsi pour tous les autres z_k.

Si n est pair, il faut que $\sum_k(-1)^ka_k = 0$. Si c'est le cas, on obtient un système à $n-1$ équations qu'on a déjà résolu. On a une infinité de solutions. On notera que dans ce cas, le système de points A_k est centré en 0.

Exercise 2.18 (Question subsidiaire)**.** Regardons le coefficient de x^q dans $(1+$

$x)^m$. D'après la formule du binôme de Newton, c'est $\binom{m}{q}$. On a en outre :

$$\begin{aligned}
(1+x)^m &= (1+x)^p(1+x)^{m-p} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{m-p} \binom{m-p}{j} x^j\right) \\
&= \sum_{k,j} \binom{p}{k}\binom{m-p}{j} x^{k+j} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k} \binom{p}{k}\binom{m-p}{i-k}\right) x^i
\end{aligned}$$

Dès lors, on peut regarder le coefficient sur x^q (attention à bien saisir sur quel ensemble d'indice varie k) :

$$\binom{m}{q} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{m-p}{q-k}$$

Retour à la Khôlle : Section 1.2.3.

2.7 Khôlle 7 : Distance entre $\mathbb{U}$ et 2

Exercise 2.19 (Question de cours)**.**

Exercise 2.20 (Problème principal)**.** Supposons l'assertion de gauche vérifiée par z_1 et z_2 fixés. On utilise alors l'inégalité triangulaire pour avoir : $|2+z_1z_2| \geq |2| - |z_1||z_2| = 1$. On est donc dans le cas d'égalité : 2 et z_1z_2 sont alignés, c'est-à-dire $z_1z_2 \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que $z_2 = \frac{\lambda}{z_2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On obtient immédiatement que $|2 + \lambda| = 1$ d'où $\lambda \in \{-3; -1\}$. La première possibilité est hors de propos car elle contredit $|z_1| = |z_2|$.

La réciproque est fausse, on pourra prendre par exemple $z_1 = 2$ et $z_2 = -\frac{1}{2}$. Par contre, elle est vrai en supposant $z_1; z_2 \in \mathbb{U}$.

Exercise 2.21 (Question subsidiaire)**.** Plusieurs pistes sont possibles. La plus efficace consiste à poser la fonction $f : x \mapsto \sin\cos x - \cos\sin x$, puis d'en étudier le signe (c'est un réflexe à acquérir face à ce genre de problème). Une étude de signe commence toujours par la résolution de l'équation $f(x) = 0$, dont la résolution peut être rédigée comme il suit.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. On a alors : $\cos(\frac{\pi}{2} - \cos x) - \cos\sin x = 0$

De fait : $\frac{\pi}{2} - \cos x = \pm\sin x$

Il s'ensuit que : $\cos x \pm \sin x = \frac{\pi}{2}$

On remarque ici une forme en $a\cos\theta + b\sin\theta$, donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta + \varphi)$. En appliquant ce résultat, on a : $\cos x \pm \sin x = \sqrt{2}\cos(x + \varphi_\pm)$ pour un certain $\varphi_\pm$ (qu'il n'est pas utile de calculer et qui est différent pour le + et pour le du , attention à l'abus de notation).

Dès lors : $\cos(x + \varphi) = \frac{}{2\sqrt{2}}$. Or une simple vérification donne : $> 3 > 2\sqrt{2}$, donc $\cos(x + \varphi) > 1$.

Cela est impossible, ainsi, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires garantit que f garde un signe fixe. Calculons $f(0)$ pour le déterminer (en utilisant à nouveau que $\sin < 1$) :

$$f(0) = \sin 1 \quad \cos 0 = \sin 1 \quad 1 < 0$$

Finalement, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$, ce qui se traduit par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin\cos x < \cos\sin x$$

Retour à la Khôlle : Section 1.3.1.

2.8 Khôlle 8 : Sommations trigonométriques

Exercise 2.22 (Question de cours)**.** On a : $C_n = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right)$ et $S_n = \Im\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right)$. Or :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik} = \frac{1 \quad e^{i(n+1)}}{1 \quad e^{i}} = \frac{2i\sin\frac{(n+1)}{2} e^{i\frac{(n+1)}{2}}}{2i\sin\frac{}{2} e^{i\frac{}{2}}} = \frac{\sin\frac{(n+1)}{2}}{\sin\frac{}{2}} e^{i\frac{n}{2}}$$

Il s'ensuit :

$$C_n = \frac{\sin\frac{(n+1)}{2}}{\sin\frac{}{2}} \cos\frac{n}{2}$$

$$S_n = \frac{\sin\frac{(n+1)}{2}}{\sin\frac{}{2}} \sin\frac{n}{2}$$

Outre la méthode classique, prenons le temps de présenter une réflexion uniquement avec de la trigonométrie :

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{}{2} C_n &= \sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{}{2}\cos(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\sin\left((k + 1/2)\right) \quad \sin\left((k \quad 1/2)\right)\right] \\ &= \sin\left((n + 1/2)\right) \quad \sin\frac{}{2} \\ &= 2\sin\frac{(n+1)}{2}\cos\frac{n}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$:

$$C_n = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\cos(k\theta) = 1$, donc $C_n = n+1$ (le nombre de terme dans la somme).

(Je vous laisse chercher pour S_n...)

Exercise 2.23 (Problème principal)**.** On remarque que, pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} A_n + B_n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta) + \cos^2(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \\ A_n - B_n &= \sin^2(k\theta) - \cos^2(k\theta) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{\sin\theta} \end{aligned}$$

La seconde égalité provient de l'exercice précédent.

On en déduit donc :

$$\begin{cases} A_n &= \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{\sin\theta}\right) \\ B_n &= \frac{1}{2}\left(n+1-\frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{\sin\theta}\right) \end{cases}$$

Pour finir, si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors on a rapidement :

$$\begin{aligned} A_n &= n+1 \\ B_n &= 0 \end{aligned}$$

Exercise 2.24 (Question subsidiaire)**.** Si $\theta \in \mathbb{R}$, alors en passant simplement en forme trigonométrique (angle de moitié), on trouve bien que $\left|\frac{1+i\theta}{1-i\theta}\right| = 1$

Réciproquement, si $|1+i\theta| = |1-i\theta|$, alors : $|i\theta - (-1)| = |i\theta - 1|$, donc $i\theta \in i\mathbb{R}$ ($i\theta$ est sur la médiatrice du segment $[-1;1]$). Finalement $\theta \in \mathbb{R}$.

Retour à la Khôlle : Section 1.3.2.

2.9 Khôlle 9 : Identité de la médiane

Exercise 2.25 (Question de cours)**.** Regardons, pour t réel, $P(t) = (z_1 + tz_2)\overline{(z_1+tz_2)} = |z_1+tz_2|^2 \geq 0$. On a :

$$P(t) = |z_1|^2 + t(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) + |z_2|^2t^2 = |z_1|^2 + 2t\Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2t^2$$

Donc $P(t)$ est un polynôme réel de degré 2 à signe constant (positif) : son discriminant est négatif.

$$\Delta = 4\left(\Re(z_1\overline{z_2})^2 - |z_1|^2|z_2|^2\right) \leq 0$$

On trouve bien $\Re(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1z_2|$.

Le cas d'égalité équivaut à l'annulation du déterminant. Appelons $\lambda = \frac{1}{|z_1|}\Re(z_1\overline{z_2})$. On a dans ce cas : $P(\lambda) = 0$, c'est-à-dire $|z_1 + \lambda z_2|^2 = 0$, puis $z_1 + \lambda z_2 = 0$, ce qui revient au fait que les points d'affixe z_1 et z_2 sont colinéaires (car $\lambda \in \mathbb{R}$).

Exercise 2.26 (Problème principal)**.** On a :

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')}+(z-z')\overline{(z-z')} = 2z\overline{z}+z'\overline{z'} = 2(|z|^2+|z'|^2)$$

Ensuite, en utilisant le précédent résultat et $u^2 = zz'$:

$$\begin{aligned}
&\left(\left|u+\frac{z+z'}{2}\right| + \left|u-\frac{z+z'}{2}\right|\right)^2 \\
=&\left|u+\frac{z+z'}{2}\right|^2 + \left|u-\frac{z+z'}{2}\right|^2 + 2\left|u^2 - \frac{z^2+z'^2+2zz'}{4}\right| \\
=&2|u|^2 + \frac{|z+z'|^2}{2} + \frac{|z-z'|^2}{2} \\
=&2|zz'| + \frac{1}{2}(|z-z'|^2+|z+z'|^2) \\
=&(|z|+|z'|)^2
\end{aligned}$$

Exercise 2.27 (Question subsidiaire)**.** On peut le montrer par récurrence. L'écriture exponentielle est la plus efficace. Soit $S_n = \sum e^{i\sum_i^n \pm a_i}$. Il y a 2^n termes dans la somme, et on a :

$$S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2\cos a_1$$
$$S_{n+1} = \sum e^{i\sum_i^{n+1} \pm a_i} = e^{ia_n}S_n + e^{-ia_n}S_n = 2\cos a_n S_n$$

Par récurrence, on montre bien que : $S_n = 2^n \prod_i^n \cos a_i$

On a ensuite les parties réelles et imaginaires :

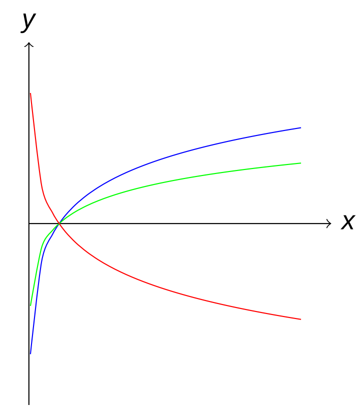
$$\sum \cos\left(\sum_i \pm a_i\right) = \Re(S_n) = 2^n \prod_i \cos a_i$$
$$\sum \sin\left(\sum_i \pm a_i\right) = \Im(S_n) = 0$$

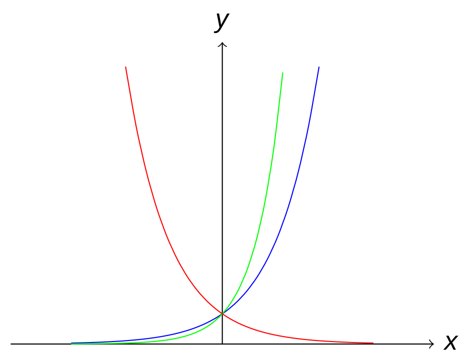
Retour à la Khôlle : Section 1.3.3.

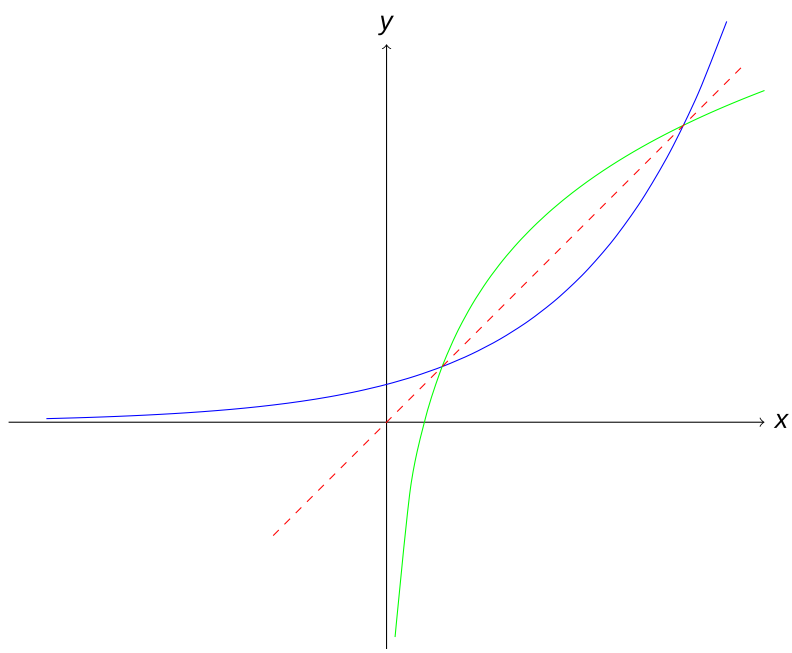
2.10 Khôlle 10 : Sommation trigonométrique

Exercise 2.28 (Question de cours)**.** On a pour $a, x > 0$: $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, donc $(x \mapsto \log_a x)' = \left(x \mapsto \frac{1}{x\ln a}\right)$. Soit par la formule de la composée vis-à-vis de $x \mapsto \exp(x\ln a)$, soit par la formule de la dérivée de la réciproque vis-à-vis de $x \mapsto \log_a x$, on a pour $a, x > 0$: $(x \mapsto a^x)' = (x \mapsto (\ln a)a^x)$.

Pour le tracé, on peut remarquer que les $x \mapsto \log_a x$ sont des plus simples à tracer, et que les $x \mapsto a^x$ sont leurs symétriques par rapport à la droite $y = x$.







Exercise 2.29 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.27.

Exercise 2.30 (Question subsidiaire)**.** On oublie les cas triviaux : $z_0 = z_1$.

On a forcément $\alpha \neq 1$ car sinon la suite est arithmétique de raison $z_1 - z_0$, donc pas périodique.

On montre ensuite par récurrence que $z_n - z_0 = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}(z_1 - z_0)$. Ainsi, si la suite est périodique, alors il existe un rang $n_0 \geq 2$ tel que $z_{n_0} = z_0$, d'où $\alpha^{n_0} = 1$, c'est-à-dire $\alpha \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_n (\neq \mathbb{U})$.

Réciproquement, si $\alpha \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_n$, alors $(z_n)_n$ est bien périodique car $z_{n+n_0} - z_n = \frac{1-\alpha^{n_0}}{1-\alpha}(z_{n+1} - z_n) = 0$.

On pourra s'intéresser au cas où $(z_n)_n$ est seulement ultimement périodique $(\exists N, p, \forall n \geq N, z_{n+p} = z_n)$.

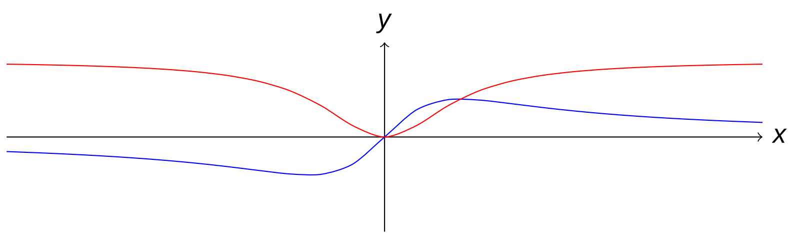
Retour à la Khôlle : Section 1.4.1.

2.11 Khôlle 11 : Alignement complexe

Exercise 2.31 (Question de cours)**.** Voici ce qu'on peut dire en première approche :

- La somme de deux fonctions de même monotonie est de cette monotonie (et si l'une au moins est stricte, la somme est stricte).
- Le produit de deux fonctions de même monotonie et **positives** est de cette monotonie (stricte si l'une au moins est stricte).
- La composée de deux fonctions monotones, lorsqu'elle existe, est croissante si les deux fonctions sont de même monotonie, décroissante sinon.

Je vous laisse deviner qui est f et qui g !



Exercise 2.32 (Problème principal)**.** Le membre de droite vaut $e^{2i\theta}$ (passer en forme trigonométrique). De fait, l'équation équivaut à l'existence de $k \in \{0, 1, 2\}$ tel que $\frac{1+iz}{1-iz} = \omega_k$ avec $\omega_k = e^{i\left(\frac{2\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$. L'ensemble des solution de l'équation est ainsi $S = \{\frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k+1)}; k \in \{0, 1, 2\}\}$. On peux calculer explicitement que :

$$\frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k + 1)} = \tan\left(\frac{\theta}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)$$

On constate d'ailleurs que les trois solutions sont réelles. On peut relier cela avec l'exercice 120 et se rendre compte que $\left|\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right| = 1$.

Exercise 2.33 (Question subsidiaire)**.** On regarde le nombre $\frac{z^4-z^2}{z^2-z} = z^2 + z$. Les points d'affixes z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement si ce nombre est réel. On cherche donc les solutions des équations $z^2 + z - \lambda = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En résolvant : $z = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4\lambda})$. Donc les points d'affixe z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement $z \in (\mathbb{R} \cup \{\lambda ; \Re(\lambda) = -1/2\})$. **À dessiner dans le plan complexe !**

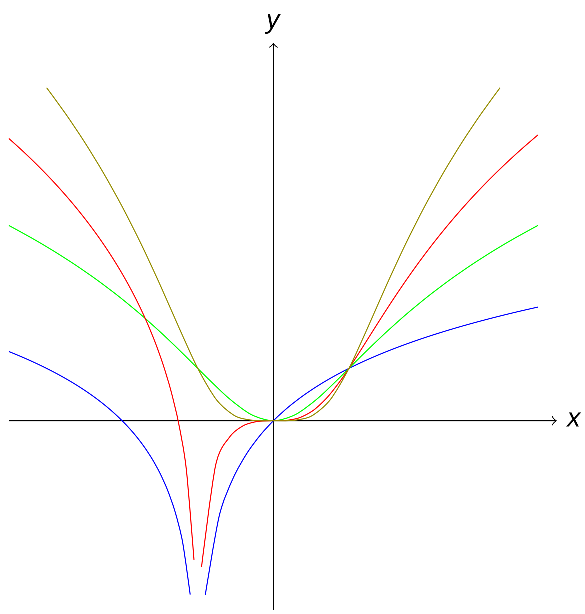
Retour à la Khôlle : Section 1.4.2.

2.12 Khôlle 12 : Théorème de Napoléon

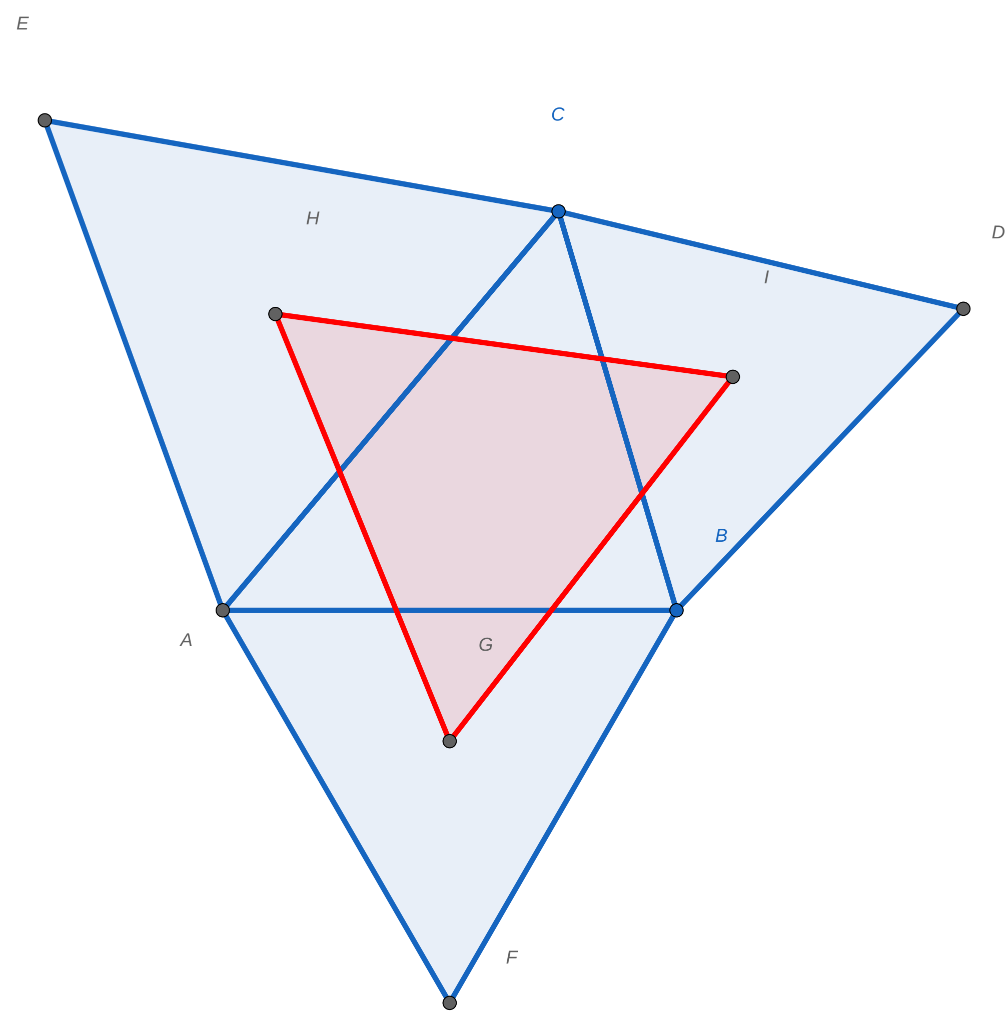
Exercise 2.34 (Question de cours)**.** On connaît la formule de dérivation de la composée : $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$. On peut utiliser cette formule sur $f \circ f^{-1} = (x \mapsto x)$ et on obtient :

$$\forall x, \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

On trace les $x \mapsto \ln\left|x^k + 1\right|$ pour $k = 1, \dots, 4$. Pour les k impairs, il y a un "trou" en $x = -1$, et localement aux alentours de 0, les fonctions ressemblent aux $x \mapsto x^k$. Les branches qui partent à l'infini ressemblent à $x \mapsto k \ln|x|$.



Exercise 2.35 (Problème principal)**.** On notera avec des minuscules les affixes des points correspondant en majuscule.



Comme D est le centre du triangle équilatéral CBA', B est l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $+\frac{2\pi}{3}$., donc (avec $j^3 = 1$ usuel) : $(d - b) = j(d - c)$. De même $(e - c) = j(e - a)$ et $(f - a) = j(f - b)$. Ainsi : $(1 - j)d = b - jc$, $(1 - j)e = c - ja$ et $(1 - j)f = a - jb$.

On veut montrez que F est l'image de E par la rotation d'angle $+\frac{\pi}{3}$ de centre D. Or $+\frac{\pi}{3}$ est l'angle de $-j^2$, avec $1 + j + j^2 = 0$ (en particulier $1 + j = -j^2$)

et $j - j^2 j = 1$:

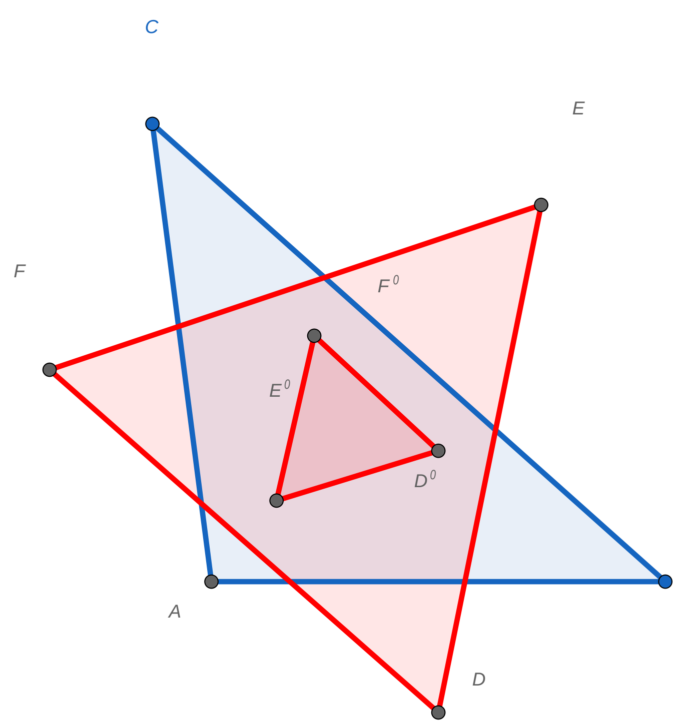
$$\begin{aligned} -j^2 \frac{e-d}{f-d} &= -j^2 \frac{c - ja - (b - jc)}{a - jb - (b - jc)} \\ &= -j^2 \frac{-ja - b + (1+j)c}{a - (1+j)b + jc} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, DEF est bien équilatéral. Quitte à échanger $a \leftrightarrow b$, $b \leftrightarrow c$ et $c \leftrightarrow a$ dans les expressions de d, e et f, on obtient immédiatement que $\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}$ est aussi équilatéral.

Le centre de DEF est le point d'affixe : $\omega = \frac{d+e+f}{3}$. On a :

$$(1-j)\omega = \frac{(b-jc)+(c-ja)+(a-jb)}{3} = (1-j)\frac{a+b+c}{3}$$

Ainsi, les centres de ABC, DEF et $\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}$ sont identiques.



Pour ce qui est du calcul des aires, on utilise la formule (bien connue) : $A_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}|b-a|^2$ (et idem pour les autres triangles équilatéraux). On peut retrouver cette formule en regardant les hauteurs. Dès lors :

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{\sqrt{3}}(\mathcal{A}_{DEF} - \mathcal{A}_{\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}}) &= (e-d)\overline{(d-e)} - (\tilde{d}-\tilde{e})\overline{(\tilde{e}-\tilde{d})} \\
&= \frac{(b-jc-c+ja)(\overline{b}-j^2\overline{c}-\overline{c}+j^2\overline{a})}{(1-j)(1-j^2)} - \frac{(c-jb-a+jc)(\overline{c}-j^2\overline{b}-\overline{a}+j^2\overline{c})}{(1-j)(1-j^2)} \\
&= 3((b-c)+j(a-c))(\overline{(b-c)}+j^2\overline{(a-c)}) - 3((c-a)+j(c-b))(\overline{(c-a)}+j^2\overline{(c-b)}) \\
&= 3(-j+j^2)(b-c)\overline{(a-c)} + 3(j-j^2)(a-c)\overline{(b-c)} \\
&= 2 \times 3\sqrt{3}\,\Re((b-c)\overline{(a-c)}) \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\overline{\mathcal{A}}_{ABC}
\end{aligned}
$$

Finalement, la différence des aires des deux triangles équilatéraux est exactement l'aire algébrique du triangle de départ.

Exercise 2.36 (Question subsidiaire)**.** On pose $S_0 = \sum \binom{3n}{3k}$, $S_1 = \sum \binom{3n}{3k+1}$ et $S_2 = \sum \binom{3n}{3k+2}$. On a (avec $j^3 = 1$) :

$$
\begin{aligned}
1.S_0 + j.S_1 + j^2.S_2 &= \sum j^k \binom{3n}{k} \\
&= (1+j)^{3n} \\
&= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} \\
&= (-1)^n
\end{aligned}
$$

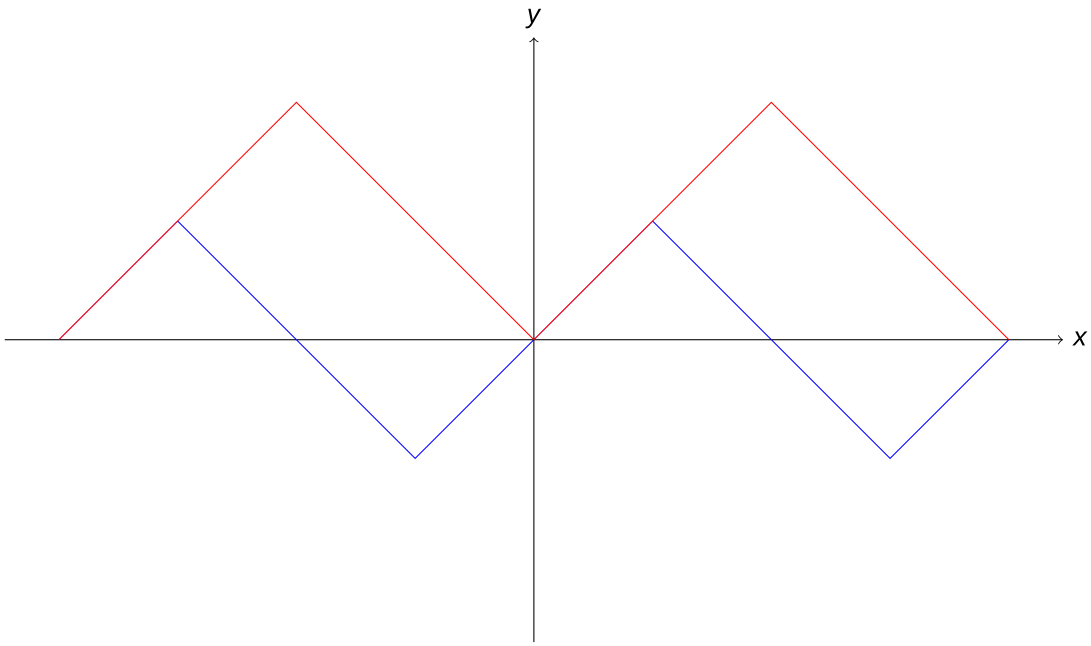
De plus, $\overline{j} = j^2$, donc $0 = \Im(1.S_0 + j.S_1 + j^2.S_2) = \Im(j)(S_1 - S_2)$, et on en déduit $S_1 = S_2$ (qui sont des réels). Puis $(-1)^n = \Re(1.S_0 + j.S_1 + j^2.S_2) = S_0 - \frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 = S_0 - S_1$. Enfin, $S_0 + S_1 + S_2 = \sum \binom{3n}{k} = 2^{3n} (= S_0 + 2S_1)$.

Ainsi : $S_1 = S_2 = \frac{1}{3}\left(2^{3n} - (-1)^n\right)$ et $S_0 = \frac{1}{3}\left(2^{3n} + 2(-1)^n\right)$. On pourra prendre le temps de vérifier que ces nombres sont bien entiers.

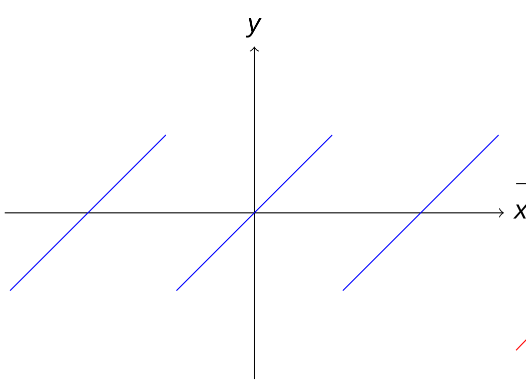
Retour à la Khôlle : Section 1.4.3.

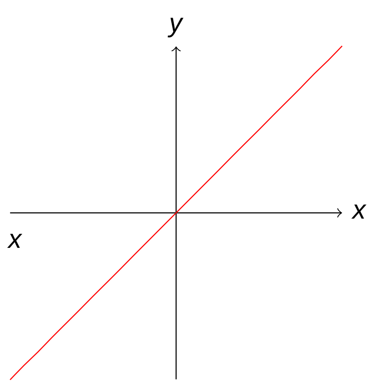
2.13 Khôlle 13 : Équation hyperbolique générale

Exercise 2.37 (Question de cours)**. Cf cours !** En bleu on a $\arcsin \circ \sin$ et en rouge on a $\arccos \circ \cos$.

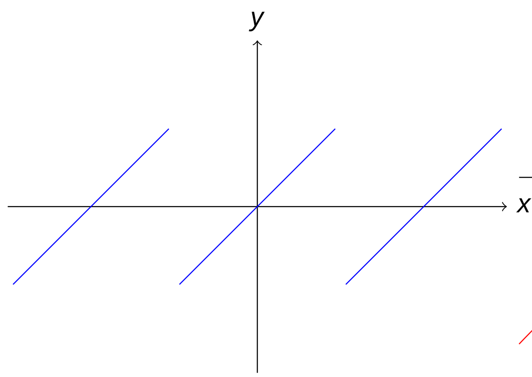


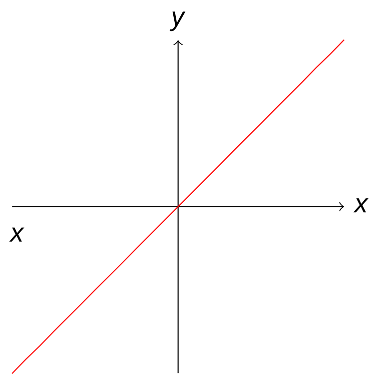
Ensuite, on remarque que la fonction arctan   tan est définie sur $\mathbb{R}n \ \frac{}{2} + \ \mathbb{Z}$ et coïncide avec la fonction identité, alors que la fonction tan   arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec l'identité.





On remarque que la fonction arctan   tan est définie sur $\mathbb{R}n \ \frac{}{2} + \ \mathbb{Z}$ et coïncide avec la fonction identité, alors que la fonction tan   arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec l'identité.





Exercise 2.38 (Problème principal)**.** On peut transformer cette équation en un polynôme du second degré en la variable e^x :

$$(a+b)e^{2x} - 2ce^x + (a-b) = 0$$

En posant $X = e^x$, on a $\Delta = 4c^2 - 4(a^2 - b^2) = 4\left(c^2 + b^2 - a^2\right)$.

Ensuite, selon la valeur de Δ, on obtient (ou non) des solutions pour l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$. Seules les solutions strictement positives nous intéressent.

Beaucoup de disjonctions de cas sont à faire.

Exercise 2.39 (Question subsidiaire)**.** Utilisez $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et $\sinh^2 - \cosh^2 = -1$:

$$\begin{aligned}
\sinh^2\cos^2 + \cosh^2\sin^2 &= \sinh^2\cos^2 + (1+\sinh^2)\sin^2 \\
&= \sinh^2(\cos^2 + \sin^2) + \sin^2 \\
&= \sinh^2 + \sin^2
\end{aligned}$$

Retour à la Khôlle : Section 1.5.1.

2.14 Khôlle 14 : Variables gudermaniennes, Équation logarithmique

Exercise 2.40 (Question de cours)**.** On dérive par composition, d'abord sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$. On pose $f : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Ainsi, f est constante sur les intervalles où elle est définie, et en testant pour $x = -1$ et $x = 1$, on obtient l'égalité voulue.

On procède de même avec la fonction $g : x \mapsto \arctan(e^x) - \arctan(\tanh\frac{x}{2})$. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable par composition. On a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x \frac{1}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}\frac{1}{1+\tanh^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1/2}{\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1/2}{\frac{1}{4}(2e^x+2e^{-x})} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, g est constante sur $\mathbb{R}$, et on a d'ailleurs $g(0) = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.

Exercise 2.41 (Problème principal)**.** On a $e^x = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right) = \frac{1+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{y}{2}}$, donc en inversant : $\tan\frac{y}{2} = \frac{e^x-1}{e^x+1} = \tanh\frac{x}{2}$. Ensuite, on peut montrer que :

$$\tanh x = \frac{2\tanh\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{y}{2}}{1-\tan^2\frac{y}{2}} = \sin y$$

Finalement, $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$. En remarquant que si $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right) > 0$ (ce qui est le cas car on a passé cette expression au logarithme), alors $\cos y > 0$, on conclut.

Exercise 2.42 (Question subsidiaire)**.** Attention, l'expression n'est définie que pour $x \notin \{\frac{1}{100}; \frac{1}{10}; 1\}$. On a dans ce cas :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln 10}(\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10)) &= \frac{\ln 10x \ln 100x + 2\ln x \ln 100x + 3\ln x \ln 10x}{(\ln x)(\ln 10x)(\ln 100x)} \\ &= \frac{6(\ln x)^2 + (3+4+3)\ln 10(\ln x) + 2(\ln 10)^2}{(\ln x)(\ln x + \ln 10)(\ln x + 2\ln 10)} \end{aligned}$$

On cherche les racines d'un trinôme avec $a = 6$, $b = 10\ln 10$ et $c = 2\ln^2 10$. On a (avec $b' = b/2$) $\Delta' = 13\ln^2 10 > 0$ et donc $\ln x \in \{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}\ln 10; \frac{-5+\sqrt{13}}{6}\ln 10\}$. Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$S := \{10^{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}}; 10^{\frac{-5+\sqrt{13}}{6}}\}$$

Exercise 2.43 (Question subsidiaire)**.** On regarde les variations de la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{\ln x}{x}}$. La fonction est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et on a :

$$(\ln f)'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Donc f est croissante sur $]0; e]$ puis décroissante sur $]e; +\infty[$. On en déduit que le maximum de $\sqrt[n]{n}$ est atteint pour $n = 2$ ou pour $n = 3$. Reste à savoir si $\sqrt{2}$ est plus grand que $\sqrt[3]{3}$ ou le contraire. Or on a :

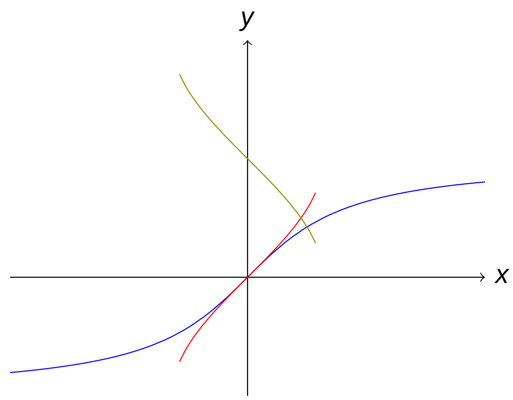
$$(\sqrt{2})^6 = 8 < 9 = (\sqrt[3]{3})^6$$

Ainsi : $\max\{\sqrt[n]{n}; n \in \mathbb{N}\} = \sqrt[3]{3}$.

Retour à la Khôlle : Section 1.5.2.

2.15 Khôlle 15 : Discriminant de degré 3, Équation exponentielle

Exercise 2.44 (Question de cours)**. Cf cours !** Je vous laisse reconnaître les courbes.



Exercise 2.45 (Problème principal)**.** On cherche ici à construire un nombre qui se calcule à partir de p et q et dont un simple regard sur le signe nous donnerait le nombre de racines réelles du polynôme $P = X^3 + pX + q$. On remarque tout d'abord que :

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) \cdot \lim_{x \to -\infty} P(x) < 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires/théorème de bijection, la fonction polynomiale P (qui est continue) s'annule sur $\mathbb{R}$. Donc P a 1 ou 3 racines sur $\mathbb{R}$. **Faites un dessin !**

En dérivant, on a : $P' = 3X^2 + p$, donc la fonction polynomiale P atteint ses extrêma en $\alpha := -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ et $\beta := +\sqrt{\frac{-p}{3}}$, **qui sont réels à la condition** $p \leq 0$. On regarde alors les valeurs prises par P en ces abscisses, et surtout leur produit :

$$\begin{aligned} P(\alpha)P(\beta) &= (q - \sqrt{-p/3}(p + \sqrt{-p/3}^2))(q + \sqrt{-p/3}(p + \sqrt{-p/3}^2)) \\ &= q^2 - \sqrt{-p/3}^2 (\frac{2}{3}p)^2 \\ &= \frac{1}{27}\Delta_3 \end{aligned}$$

Où on a fixé le discriminant du polynôme de degré 3, $X^3 + px + q$:

$$\Delta_3 = 27q^2 + 4p^3$$

Ainsi, le simple calcul de ce nombre nous permet d'étudier le signe de $P(\ )P(\ )$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P admet une racine entre ces extrêma si ledit produit est négatif. La réciproque se montre simplement en établissant le tableau de variation de la fonction polynomiale P.

Attention cependant, ici, c'est lorsque qu'on a $\Delta_3 < 0$ que le polynôme a 3 racines réelles ! Inversement, lorsque $\Delta_3 > 0$, il n'y a qu'une seule racine réelle, et pour $\Delta_3 = 0$, il y a une racine simple et une double (mais on ne peut dire laquelle est laquelle sans pousser plus loin l'analyse).

Remark. La condition "$p < 0$" est bien induite par "$\Delta_3 < 0$", il n'est donc pas nécessaire de la vérifier en plus.

Exercise 2.46 (Question subsidiaire)**.** Plusieurs approches possibles. Par exemple on peut raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned}
& 2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{3}{2}2^{2x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}3^{x} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{4}{3}\right)^{x} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{\ln 8 - \ln 3\sqrt{3}}{\ln 4 - \ln 3} \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que $\frac{3}{2}$ est solution (parce que cela revient à écrire la décomposition de 12 en bases 2 et 3), puis montrer que l'équation n'a qu'une seule solution.

Retour à la Khôlle : Section 1.5.3.

2.16 Khôlle 16 : Relation de pré-ordre

Exercise 2.47 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.48 (Problème principal)**.** T hérite de la réflexivité et de la transitivité de R. Pour ce qui est de la symétrie, elle vient de la commutativité de $\wedge$.

Soient X et Y tels que XSY. Soient $x \in X$ et $y \in Y$. Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ tels que x_0Ry_0. Alors, on sait que xTx_0, donc $xRx_0 \wedge x_0Rx$. Par transitivité, on a en particulier xRy_0. Pareillement : $yRy_0 \wedge y_0Ry$ et en particulier y_0Ry. Ainsi, par transitivité, xRy.

S est réflexif (trivial) ; anti-symétrique car si $XSY \wedge YSX$, alors $\forall x, y \in X \times Y, xRy \wedge yRx$ (i.e. xTY), donc $X = Y$ (comme classes d'équivalence modulo T) ; et transitive (héritage de R). C'est bien une relation d'ordre.

Exercise 2.49 (Question subsidiaire)**.** La relation $R = |$ est bien un pré-ordre sur $\mathbb{Z}$ (attention, c'est un ordre sur $\mathbb{N}$ mais pas sur $\mathbb{Z}$).

On obtient $xTy \Leftrightarrow x = \pm y \Leftrightarrow |x| = |y|$ et donc les classes d'équivalence $C(x) = \{-x, x\}$ (pour $x \in \mathbb{Z}$).

On obtient $C(x)SC(y)$ qui est bien une relation d'ordre car on a levé l'ambiguïté qui empêchait $|$ d'être anti-symétrique. On peut voir en fait que les classes d'équivalences de T sont paramétrées de manière unique par les entiers naturels. Formellement, on a la bijection $\psi : X \mapsto \max_{x \in X} x$ dont la réciproque est $\varphi : x \mapsto C(x)$. φ est croissante pour les relations $|$ et S. Inversement, on peut dire que $XSY \Leftrightarrow \psi(X) | \psi(Y)$.

On aurait pu procéder de même avec la divisibilité dans les polynômes, les matrices, où avec plein d'autres pré-ordres.

Retour à la Khôlle : Section 1.6.1.

2.17 Khôlle 17 : Injectivité et surjectivité fonctionnelle

Exercise 2.50 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.51 (Problème principal)**.** Supposons f injective et soient $g, h : X \to E$ tels que $f \circ g = f \circ h$, alors soit $x \in X$. On a $f(g(x)) = f(h(x))$, donc, par injectivité de f, g(x)=h(x). Ainsi, $g = h$.

Réciproquement, supposons que f ne soit pas injective. Soit alors $a, b \in E$ tel que $f(a) = f(b)$. Soit $X = \{0\}$ et $g : X \to E$, $g(0) = a$ et $h : X \to E$, $h(0) = b$. On a $f \circ g = f \circ h$ mais $g \neq h$.

Pour la surjectivité, on peut énoncer la propriété suivante : f est surjective si et seulement si $\forall g, h : F \to X, \; g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.

Démontrons cela. Tout d'abord si f est surjective, alors soient $g, h : F \to X$ tels que $g \circ f = h \circ f$. Soit $y \in F$ et soit, par surjectivité, $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a alors $g(y) = g(f(x)) = h(f(x)) = h(y)$, donc $g = h$.

Réciproquement, si f n'est pas surjective, soit $z \in F$ qui n'a pas d'antécédent dans E par f. Soit $X = \{0, 1\}$ et $g : F \to X$ défini par $g(z) = 1$ et $g(y) = 0$ pour $y \neq z$. Soit $h : F \to X$ défini par $h(y) = 0$ (tout le temps). On a $g \circ f = h \circ f$ mais $g \neq h$.

Exercise 2.52 (Question subsidiaire)**.** Supposons f bijective. Soit $A \in P(E)$. Soit $y \in f(\overline{A})$, alors soit $x \in \overline{A}$ tel que $f(x) = y$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = y = f(x)$, donc par injectivité $x' = x$, ce qui n'est pas possible car $x' \in A$ et $x \notin A$. de fait, $y \notin f(A)$, d'où $y \in \overline{f(A)}$ puis $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Inversement, soit $y \in \overline{f(A)}$. Par surjectivité de f, soit $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Si $x \in A$, alors $y = f(x) \in f(A)$, ce qui n'est pas. Donc $x \notin A$, puis $y \in f(\overline{A})$. On a prouvé l'autre inclusion et ainsi : $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Montrons maintenant la réciproque. Supposons que pour tout $A \in P(E)$, on ait $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Supposons qu'on ait $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$, posons $A = \{x\}$, alors $y \in \overline{A}$, donc $f(y) \inf(\overline{A}) = \overline{f(A)} = F \setminus \{f(x)\}$, or $f(y) = f(x)$. Cette contradiction montre que f est injective.

Inversement, appliquons la propriété avec $A = \emptyset$: $f(\bar{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)}$. Le membre de gauche est $f(E)$, et comme $f(\emptyset) = \emptyset$, le membre de droite et F. Ainsi, $f(E) = F$: f est surjective.

Retour à la Khôlle : Section 1.6.2.

2.18 Khôlle 18 : Relation sur $\mathbb{R}^2$, Filtre sur $P(E)$

Exercise 2.53 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.54 (Problème principal)**.** La relation est évidemment réflexive et symétrique. Montrons la transitivité. Soient $A, B, C \in P(E)$ tels que $A \quad B$ et $B \quad C$. Soient alors $X \in \quad$ tel que $A \cap X = B \cap X$ et $Y \in \quad$ tel que $Y \cap B = Y \cap C$. Prenons $Z \in \quad$ tel que $Z \quad (X \cap Y)$. Alors :

$$Z \cap A = Z \cap X \cap A = Z \cap X \cap B = Z \cap B = Z \cap Y \cap B = Z \cap Y \cap C = Z \cap C$$

On obtient que $A \quad C$. Il s'ensuit que est transitive : c'est un relation d'équivalence.

La classe d'équivalence de $\emptyset$ est composée des parties qui sont disjointes d'au moins un élément du filtre :

$$A \quad \emptyset \iff \exists X \in \quad , A \cap X = \emptyset \cap X = \emptyset$$

La classe d'équivalence de E est composée des parties qui contiennent au moins un élément du filtre :

$$A \quad E \iff \exists X \in \quad , A \cap X = E \cap X = X$$

Dès lors, $\quad \mapsto \quad$ n'est pas surjective car il n'est pas possible de trouver tel que $E \quad \emptyset$ et $\{x\} \not\quad \emptyset$ pour $x \in E$ quelconque.

S'il existe deux éléments disjoints X et Y dans le filtre , alors le filtre contient $\emptyset$ car il faut qu'il existe $Z \in \quad , Z \quad (X \cap Y) = \emptyset$. Or si contient $\emptyset$, alors n'importe quel $A \in P(E)$ vérifie $A \quad E$, donc n'a qu'une seule classe d'équivalence. Ainsi, tous les qui contiennent $\emptyset$ donnent la même relation : $\quad \mapsto \quad$ n'est pas injective.

Exercise 2.55 (Question subsidiaire)**.** La relation est évidemment réflexive et antisymétrique. Pour la transitivité, il suffit de l'écrire.

Le cercle unité contient les points $(0, 1)$ et $(1, 0)$, donc tout majorant doit avoir ses deux coordonnées supérieures à 1. Inversement, si $(x, y) \in \{(a, b) \ ; \ a \quad 1, b \quad 1\}$, alors soit (z, t) dans le cercle unité. On a en particulier $z \quad 1 \quad x$ et $t \quad 1 \quad y$. Ainsi, $\{(a, b) \ ; \ a \quad 1, b \quad 1\}$ est bien l'ensemble des majorants du cercle unité. Comme cet ensemble est disjoint du cercle unité, ce dernier n'a pas de borne supérieur.

Pour d'un sous-ensemble D du plan ait une borne supérieure, il faut et il suffit qu'il ait un point "en haut à droite", c'est-à-dire que le point $(\max_{(x,y)\in D} x, \max_{(x,y)\in D} y)$ soit dans D. La démonstration en est évidente.

Retour à la Khôlle : Section 1.6.3.

2.19 Khôlle 19 : Images directes et réciproques

Exercise 2.56 (Question de cours)**.** On effectue une intégration par parties avec $u(x) = \sin\ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}\cos\ln x$ et $v(x) = x$, $v'(x) = 1$:

$$\int \sin\ln x \,\mathrm{d}x = x\sin\ln x - \int \cos\ln x$$

Ensuite, on effectue une seconde intégration par partie avec le même v mais cette fois $u(x) = \cos\ln x$, $u'(x) = -\frac{1}{x}\sin\ln x$:

$$\int \sin\ln x \,\mathrm{d}x = x\sin\ln x - x\cos\ln x + \int \sin\ln x$$

Finalement, on conclut :

$$\int \sin\ln x \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x)$$

Exercise 2.57 (Problème principal)**.** C'est un exercice assez long, on ne s'attend pas à ce qu'il soit traité en entier !

<u>f injective $\Leftrightarrow \hat{f} \circ f = Id_{P(E)}$:</u>

Tout d'abord, on peut montrer que, pour n'importe quelle fonction f, $\forall X \subset E, X \subset \hat{f}(f(X))$.

- $\Leftarrow$ Attention, même si on connaît le théorème "$g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective", cela permet seulement de déduire que $\hat{f} \circ f = P(E)$ induit f injective **de** $P(E)$ **dans** $P(E)$ **!** La question est de prouver que f est injective de E dans E.

  Pour ce faire, on regarde $f(x) = f(y)$, on a alors $f(\{x\}) = f(\{y\})$, puis $x \in \hat{f}(f(\{x\})) = \hat{f}(f(\{y\})) = Id_{P(E)}(\{y\}) = \{y\}$, donc $x = y$. f est bien injective.

- $\Rightarrow$ Soit $X \subset E$. Supposons (par l'absurde) qu'il existe $y \notin X$ tel que $y \in \hat{f}(f(X))$, alors $f(y) \in f(X)$, donc $\exists x \in X, f(y) = f(x)$. Or $y \neq x$ par hypothèse ($y \notin X$ et $x \in X$), ce qui contredit l'injectivité de f.

  Finalement, grâce à la remarque du début : $\forall X \subset E, \hat{f}(f(X)) = X$.

<u>f surjective $\iff f \circ \hat{f} = Id_E$:</u>
Tout d'abord, on peut montrer que, pour n'importe quelle fonction f, $\forall X \subset E, X \supset f(\hat{f}(X))$.

- $\Leftarrow$ Le théorème "$g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective" ne s'applique toujours pas car on obtient $f : P(E) \to P(E)$ surjective (et non $f : E \to E$ surjective).
  Soit $y \in E$, on sait que $f \circ \hat{f}(\{y\}) = \{y\}$, puis $y \in f(\hat{f}(\{y\}))$, c'est-à-dire que $\exists x \in \hat{f}(\{y\}) \subset E, f(x) = y$: f est bien surjective.
- $\Rightarrow$ Soit $y \in X$. Comme f est surjective, soit x un antécédant de y par f. Par définition, $y \in X$ induit $x \in \hat{f}(X)$. Dès lors, $y = f(x) \in f(\hat{f}(X))$, donc $X \subset f(\hat{f}(X))$.
  Avec la remarque de début de paragraphe, on obtient $\forall X \subset E, f(\hat{f}(X)) = X$.

<u>f injective $\iff \forall X, Y, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$:</u>
Tout d'abord, on peut montrer que, pour n'importe quelle fonction f, $\forall X, Y \subset E, f(X \cap Y) \subset (f(X) \cap f(Y))$.

- $\Leftarrow$ Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y) =: z$. On pose $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$. On a $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) = \{z\} \neq \emptyset$, donc $X \cap Y \neq \emptyset$, et ainsi $x = y$. f est injective.
- $\Rightarrow$ Soit $y \in f(X) \cap f(Y)$. Soient $x \in X$ et $x' \in Y$ tels que $f(x) = y = f(x')$. Comme f est injective, on a $x = x'$, puis $x \in X \cap Y$ et ainsi $y \in f(X \cap Y)$.
  Avec la remarque de début de paragraphe, on a montré que $\forall X, Y \subset E, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Exercise 2.58 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.52.

Retour à la Khôlle : Section 1.7.1.

2.20 Khôlle 20 : Théorème de Cantor-Berstein

Exercise 2.59 (Question de cours)**.** On écrit le polynôme $x \mapsto x^2 + x + 1$ sous forme canonique :

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ sont de la forme $x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercise 2.60 (Problème principal)**.** Si E ou F est fini, alors l'autre l'est aussi car si E s'injecte dans F fini, alors E a moins d'éléments que F (cela se montre grâce à la partition $E = \bigcup_{y \in F} \hat{f}(y)$ où $\hat{f}(y)$ contient au plus 1 élément car f est injective). Ensuite, si $E \hookrightarrow F$ et $F \hookrightarrow E$, on en déduit que E et

F ont le même nombre d'éléments, disons n. Quitte à numéroter les éléments de $E = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ et de $F = (f_1; f_2; \dots; f_n)$, on peut introduire la bijection $e_i \mapsto f_i$ de réciproque $f_i \mapsto e_i$.

Passons à la partie plus corsée... Il faut tout d'abord remarquer qu'avec les définitions de l'énoncé, f^{-1} et g^{-1} sont bien définies et vérifient $f(f^{-1}(y)) = y$, $f^{-1}(f(x)) = x$ (idem pour g). Par contre, la première égalité n'est définie que pour certains $y \in F$, pas pour tous : $f^{-1} : f(E) \to E$.

La notion de "la suite est finie" signifie qu'à un certain rang, il n'est pas possible de définir le rang suivant (i.e. f^{-1} ou g^{-1} du terme courant n'est pas défini).

<u>h injective :</u> Supposons que $h(x) = h(y)$.

Si $x; y \in A$, alors $h(x) = f(x) = f(y) = h(y)$, donc $x = y$ par injectivité de f.

Si $x; y \notin A$, alors $h(x) = g^{-1}(x) = g^{-1}(y) = h(y)$, donc $x = y$ par injectivité de g^{-1} (car si z avait 2 antécédants par g^{-1}, alors il aurait aurait 2 images par g, ce qui n'est pas possible).

Si $x \in A$ et $y \notin A$, alors $h(x) = f(x) = g^{-1}(y) = h(y)$, donc $x = f^{-1}(g^{-1}(y))$, et on peut itérer avec g^{-1} et f^{-1} pour reconstruire la suite qui part de x et celle (décalée de deux rangs) qui par de y. Or la première est finie et la seconde non. Cette contradiction montre que le cas $x \in A$ et $y \notin A$ est en réalité impossible.

<u>h surjective :</u> Soit $y \in F$. On veut construire $z \in E$ tel que $h(z) = y$. Posons $x = g(y)$.

Si $x \notin A$, alors $h(x) = g^{-1}(x) = g^{-1}(g(y)) = y$, et on a trouvé notre antécédant : $z = x$.

Sinon, $x \in A$, et donc $z = f^{-1}(g^{-1}(x))$ aussi. De fait, $h(z) = f(f^{-1}(g^{-1}(x))) = g^{-1}(x) = y$, et là encore on a un antécédant.

Finalement, h est bien une bijection de E dans F.

On pourra essayer de voir qui est h lorsque $f = g = \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array}$, ou bien $f = \begin{array}{l} [0; \pi] \to [-1; 1] \\ x \mapsto \cos x \end{array}$ et $g = \begin{array}{l} [-1; 1] \to [0; \pi] \\ x \mapsto \frac{x+1}{2} \end{array}$.

Exercise 2.61 (Question subsidiaire)**.** On a $xRy \Leftrightarrow \sin^2 x = \sin^2 y$. La relation est donc bien réflexive, symétrique et transitive, c'est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de x est $C(x) = (x + \pi\mathbb{Z}) \cup ((\pi - x) + \pi\mathbb{Z})$. **Un dessin est le bienvenu !**

La relation S est réflexive, transitive et anti-symétrique : c'est une relation d'ordre. Pour prouver qu'elle est ant-symétrique, on regarde les fonctions $f_{p;q} : x \mapsto px^q$. Elles sont strictement croissantes sur $[1; +\infty[$ si et seulement si p ou $q > 1$. Par contraposée, si xSy et ySx et $x; y \geq 1$, alors $x = y$. On peut raisonner de même dans $]-\infty; -1]$. Pour combiner les deux, on se rend compte qu'il est impossible que xSy et ySx avec $x < -1$ et $y > 1$ car si ySx et $y \geq 0$, alors $x \geq 0$. Cette relation n'a ni minorant, ni majorant (même si on la restreint à

$]-\infty;-1]$ ou à $[1;+\infty[$, elle est partielle, et même pour tout élément x, on peut trouver un élément y tel que ni xSy, ni ySx. Comme $1/2 = 2 \times 1/4$ et $1/4 = (1/2)^2$, R n'est pas anti-symétrique sur $\mathbb{R}$.

La relation T est évidement réflexive et symétrique. Pour la transitivité, il suffit de l'écrire. Le cas de $0Tx$ doit être traité à part, et on a : $0Tx \Rightarrow x = 0$.

Ensuite, on trace la fonction $x \mapsto xe^{-x}$, et on se rend compte que la classe d'équivalence de x contient :

— 1 élément si $x \leq 0$ ou $x = 1$.

— 2 éléments si $x > 0$ et $x \neq 1$.

Retour à la Khôlle : Section 1.7.2.

2.21 Khôlle 21 : Point fixe d'une application croissante

Exercise 2.62 (Question de cours)**.** On remarque que $\ln x^2 = 2\ln x$, et la fonction $x \mapsto \frac{1/x}{\ln x}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$. Dès lors, les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x \ln x^2}$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\ln x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercise 2.63 (Problème principal)**.** On sait que E admet une borne inférieur. Une telle borne est un minimum (car elle appartient à E qui est l'ensemble considéré), nommons-la m. On a $f(m) \in E$, donc $f(m) \geq \inf E = m$, d'où $m \in X$ et $X \neq \emptyset$.

Si $x \in X$, alors $x \leq f(x)$. Comme f est croissante, on peut l'appliquer à cette inégalité et on obtient $f(x) \leq f(f(x))$, donc $f(x) \in X$.

Comme $X \neq \emptyset$ et que E est muni de bornes supérieures, a existe. Supposons $a \notin X$. Alors $f(a) < a$, et comme f est croissante, $f(f(a)) < f(a)$, donc $f(a) \notin X$, or $f(a) < a$, donc a n'est pas la borne supérieur de X. Ainsi, $a \in X$.

On sait que X est stable par f, donc en particulier $f(a) \in X$, d'où d'une part $a \leq f(a)$. Or d'autre part, a majore X, donc $f(a) \leq a$. Finalement, $f(a) = a$, et a est un point fixe.

On pourra prendre par exemple une application croissante dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeur dans celui-ci.

Exercise 2.64 (Question subsidiaire)**.** On a : $f(B) \subset \bigcup_n f(A_n) \subset \bigcup_n A_{n+1} \subset B$.

On a évidemment $A \subset B$, et on a vu que $f(B) \subset B$. Reste à montrer que si $A \subset C$ et $f(C) \subset C$, alors $B \subset C$. Or si $A \subset C$ et $f(C) \subset C$, alors $A_1 = f(A) \subset C$, et par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset C$, donc $B \subset C$.

Retour à la Khôlle : Section 1.7.3.

2.22 Khôlle 22 : Calcul d'intégrales & primitives

Exercise 2.65 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.66 (Problème principal)**.** $I_0 = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = [-\ln\cos(x)]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\ln 2$.

On remarque que $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\left(1+\tan^2(x)\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(x)\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$. On en déduit déjà que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $I_n \geq 0$, donc $0 \leq I_n = \frac{1}{n+1} - I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

La formule explicite est plus compliquée à obtenir. Le plus rapide est de regarder la somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \dots = I_0 - (-1)^n I_{2n}$$

Donc $I_{2n} = (-1)^n\left(\frac{\pi}{4} - v_n\right)$. On a de même $I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2}(\ln 2 - u_n)$ en calculant $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = I_1 - (-1)^n I_{2n+1}$.

Finalement, comme $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$.

Exercise 2.67 (Question subsidiaire)**.** On pose le changement de variables (bijectif) $u = \frac{\pi}{4} - t$ ($\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$) :

$$\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi/4}^{0} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\mathrm{d}u$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/4} [\ln(\sin t + \cos t) - \ln\cos t]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/4} \left[\ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) - \ln\cos t\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\ln 2\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{8}\ln 2
\end{aligned}$$

Retour à la Khôlle : Section 1.8.1.

2.23 Khôlle 23 : Calcul d'intégrales & primitives

Exercise 2.68 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.69 (Problème principal)**.** On se rappelle que $\int t^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]$.

On effectue le changement de variables $u = t \quad$ ($\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$) : $I_{p;q}(\ ; \ ) = \int_0 u^p(u \ (\quad))^q \mathrm{d}u = I_{p;q}(0; \quad)$. Donc, on se bornera à étudier $I_{p;q}(0;x)$.

Ensuite, en posant $u = xv$ ($\mathrm{d}u = x\mathrm{d}v$), on a $I_{p;q}(0;x) = x^{p+q+1}\int_0^1 v^p(v \quad 1)^q \mathrm{d}v = x^{p+q+1} I_{p;q}(0;1)$.

On va maintenant faire une IPP pour calculer $I_{p;q} = \int_0^1 t^p(t \quad 1)^q \mathrm{d}t$. On pose $u^0 = t^p$ et $v = (t \quad 1)^q$, on a $u = \frac{1}{p+1}t^{p+1}$ et $v^0 = q(t \quad 1)^{q \quad 1}$, donc :

$$
\begin{aligned}
I_{p;q} &= \left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}(t \quad 1)^q\right]_0^1 \quad \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(t \quad 1)^{q \quad 1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{q}{p+1} I_{p+1;q \quad 1} \\
&= (\quad 1)^q \left(\prod_{k=0}^{q \quad 1} \frac{q \quad k}{p+1+k}\right) I_{p+q;0} \\
&= (\quad 1)^q \frac{q!p!}{(p+q)!}\frac{1}{p+q+1} \\
&= \frac{(\quad 1)^q}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}
\end{aligned}
$$

Finalement, $I_{p;q}(\ ; \ ) = \frac{(\quad 1)^q(\quad)^{p+q+1}}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}$.

Remark. On a $I_{p;q} = (\quad 1)^q I_{q;p}$. On peut le vérifier en posant le changement de variable $u = 1 \quad t$.

Exercise 2.70 (Question subsidiaire)**.** Comme $'$ est continue (une justification basique de la limite en 0 est attendue tant que le cours de continuité n'a pas été vu), elle possède une primitive Φ qui s'annule en 0. On a : $f(x) = \Phi(2x) \quad \Phi(x)$, elle est bien définie.

En outre, comme $'$ est paire, Φ est impaire (cela se démontre par changement de variable $u = \quad t$). De fait, f est impaire comme somme de fonctions impaires. Φ est dérivable (sa dérivée est $'$), donc f aussi et on a :

$$
f^0(x) = 2\,'(2x) \quad '(x) = \frac{\sinh(2x) \quad \sinh(x)}{x}
$$

Comme sinh est croissante, on a $\sinh(2x) \quad \sinh(x) > 0$ si et seulement si $2x > x$ et donc $x > 0$. Ainsi, on a $f^0(0) = 0 (= \ '(2 \quad 0) \quad '(0))$ (limites par taux d'accroissement) et sinon $f^0(x) > 0$. Finalement :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 +
f	$-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$

On constate que $\lim_{\pm\infty} f'(x) = +\infty$ en développant les exponentielles, d'où les limites indiquées.

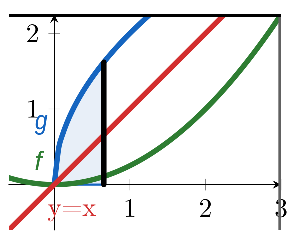
Retour à la Khôlle : Section 1.8.2.

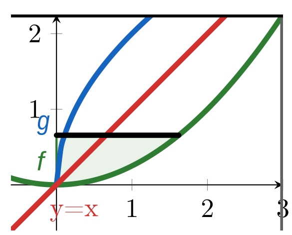
2.24 Khôlle 24 : Calcul d'intégrales & primitives

Exercise 2.71 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.72 (Problème principal)**.** On notera que f^{-1} est bien continue (cours sur la continuité), donc les calculs demandés sont valides.

On constate le l'égalité des aires bleues et vertes sur le dessin, par symétrie ($g = f^{-1}$ et $a = 3$) :



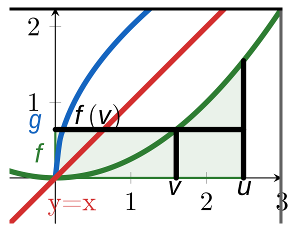


L'aire bleue valant $\int_0^{f(x)} g$, on a immédiatement la première égalité : $\int_0^x f + \int_0^{f(x)} g = xf(x)$. Démontrons-là par le calcul.

On pose F la primitive de f qui s'annule en 0, $\tilde{F}$ celle de f^{-1} (attention, ce n'est absolument pas F^{-1}, et F n'a pas de raison d'être même bijective), et $G : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$. G est bien définie et dérivable avec : $G(x) = F(x) + \tilde{F}(f(x))$, donc $G'(x) = F'(x) + f(x) \times \tilde{F}'(f(x)) = f(x) + f(x) \times f^{-1}(f(x)) = f(x) + xf'(x)$. On constate que c'est la même dérivée que pour $x \mapsto xf(x)$, et qu'elle coïncident en 0.

? Supposons que $f^{-1}(v) \leq u$, l'inégalité (qui se voit sur le dessin) découle de la croissance de la fonction f :

$$\int_0^u f + \int_0^v f^{-1} = vf^{-1}(v) + \int_{f^{-1}(v)}^u f \geq vf^{-1}(v) + v(u - f^{-1}(v)) = uv$$



⋆ Supposons que $v \geq f(u)$, l'inégalité (qui se voit sur le dessin) découle de la croissance de la fonction f^{-1} :

$$\int_0^u f + \int_0^v f^{-1} = uf(u) + \int_{f(u)}^v f^{-1} \geq uf(u) + u(v - f(u)) = uv$$

Exercise 2.73 (Question subsidiaire)**.** on pose $f : t \mapsto t^{p-1}$ et $g : x \mapsto x^{q-1}$. On a $g(f(t)) = g(t^{p-1}) = t^{(p-1)(q-1)} = t$. En effet, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{pq}$, donc par hypothèse $pq = p + q$. Finalement : $g = f^{-1}$. En appliquant l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité de Young :

$$uv \leq \int_0^u t^{p-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^v t^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Retour à la Khôlle : Section 1.8.3.

2.25 Khôlle 25 : Changement trigonométrique

Exercise 2.74 (Question de cours)**. Cf Cours !**

Exercise 2.75 (Problème principal)**.** On peut soit utiliser les expressions trigonométriques, soit les nombres complexes afin de développer le $\sin(x - t)$. Le but est de ne plus avoir de x dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{e^{i(x-t)} - e^{-i(x-t)}}{2i} g(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i}e^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2i}e^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

f est donc bien définie et $C^1(\mathbb{R})$. On a sa dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2i}\left(ie^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t + e^{ix}\frac{g(x)}{e^{ix}}\right) - \frac{1}{2i}\left(-ie^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t + e^{-ix}e^{ix}g(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}e^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \cos(x - t)g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Non seulement on a l'expression souhaitée, mais en plus on constate qu'on peu facilement calculer la dérivée seconde par le même procédé (en repartant de l'avant dernière ligne) :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\left(ie^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t + e^{ix}\frac{g(x)}{e^{ix}}\right) + \frac{1}{2}\left(ie^{\ ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t + e^{\ ix}\ e^{ix}g(x)\right) \\ &= \frac{2}{2}g(x) \quad \frac{1}{2i}e^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t \quad \frac{1}{2i}e^{\ ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t \\ &= g(x) \quad \int_0^x \sin(x \quad t)g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution du problème de Cauchy : $f'' + f = g$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

On sait désormais résoudre entièrement cette équation car on vient d'en exhiber une solutions particulière. Les solutions sont exactement les fonctions y telles que :

$$\exists \ , \ ; \forall x, y(x) = \ \cos(x) + \ \sin x + f(x)$$

Pour résoudre le problème de Cauchy associé avec $y(0) = \ $ et $y'(0) = \ $, par exemple, il faut et il suffit de prendre $\ = \ $ et $\ = \ $.

Exercise 2.76 (Question subsidiaire)**.** On pose $z = y'$, on a une équation d'ordre 1 en z. La solution homogène est $\frac{1}{x+1}$, et une méthode de variation de la constante mène à :

$$z(x) = \frac{1}{x+1}\left(2\ln|1+x| + \ _1\right)$$

On intègre donc pour trouver finalement sur tout intervalle qui ne contient pas $\ 1$:

$$y(x) = \ln^2|x+1| + \ _1 \ln|x+1| + \ _2$$

Retour à la Khôlle : Section 1.9.1.

2.26 Khôlle 26 : Contrôle de la solution

Exercise 2.77 (Question de cours)**. Cf Cours !**

Exercise 2.78 (Problème principal)**.** Si y est solution de l'équation, on a alors :

$$\begin{aligned} z'(x) &= 2y'y \quad y^2\frac{q'}{q^2} + 2y'y''\frac{1}{q} \\ &= \quad y'^2\frac{q'}{q^2} \\ & \quad 0 \end{aligned}$$

Par suite, z est une fonction positive et décroissante au voisinage de $+\infty$: elle y est bornée. L'inégalité $\forall x \quad A; 0 \quad y^2(x) \quad z(x)$ prouve alors que y est bornée au voisinage de $+\infty$.

Exercise 2.79 (Question subsidiaire)**.** Avec $u = x' + iy'$, on a $u' = -i\omega u$, puis :

$$u = u_0 e^{-i\omega t} = (x'(0)\cos\omega t - y'(0)\sin\omega t) + i\,(x'(0)\sin\omega t + y'(0)\cos\omega t)$$

Ainsi, on obtient en intégrant :

$$x(t) = \frac{x'(0)}{\omega}\sin\omega t + \frac{y'(0)}{\omega}\cos\omega t + x(0) - \frac{y'(0)}{\omega}$$

Et :

$$y(t) = -\frac{x'(0)}{\omega}\cos\omega t + \frac{y'(0)}{\omega}\sin\omega t + y(0) + \frac{x'(0)}{\omega}$$

L'équation sur z s'intègre indépendamment en $z(t) = z'(0)t + z(0)$.

Retour à la Khôlle : Section 1.9.2.

2.27 Khôlle 27 : Équation intégrale

Exercise 2.80 (Question de cours)**. Cf Cours !**

Exercise 2.81 (Problème principal)**.** On pose F une primitive de $t \mapsto tg(t)$ et G une de $t \mapsto g(t)$. On a alors $g(x) = xG(x) - xG(0) - F(x) + F(0) + f(x)$.

En dérivant deux fois, on obtient que g est solution au problème de Cauchy $g''(x) - g(x) = f''(x)$ et $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$. De fait, si une solution existe, alors elle est unique (attention, elle n'existe pas forcément).

Les solutions homogènes sont de la forme $\lambda e^{-x} + \mu e^{x}$, donc pour $f = \cos$, on obtient $g'' - g = -\cos$, puis $g(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{x} + \frac{1}{2}\cos x$. Avec les conditions initiales, on trouve $\lambda = \mu = \frac{1}{4}$.

Exercise 2.82 (Question subsidiaire)**.** On fixe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et (I, f) l'unique solution maximale associée. Si $y_0 = 0$, alors la solution $f = 0$ et $I = \mathbb{R}$ convient, et par unicité, on a $(I, f) = (\mathbb{R}, x \mapsto 0)$. On se place du coup dans le cas ou f ne s'annule pas sur I :

$$\frac{f'}{f} - \frac{1}{f} = x^2$$

Dès lors, $g = 1/f$ vérifie $g' + g = x^2$. En intégrant, il existe λ : $g(x) = \lambda e^{-x} - x^2 + 2x - 2$. Or on a aussi $g(x_0) = 1/y_0$, donc $\lambda = e^{x_0}\left(\frac{1}{y_0} + x_0^2 - 2x_0 + 2\right)$.

Finalement, $f(x) = \frac{1}{\lambda e^{-x} - x^2 + 2x - 2}$ sur le plus grand intervalle (contenant x_0) sur lequel le dénominateur ne s'annule pas.

Ce raisonnement permet de traiter les équations différentielles, dites de Bernoulli, de la forme : $y' = a(x)y + b(x)y^n$.

Retour à la Khôlle : Section 1.9.3.

2.28 Khôlle 28 : Suites de Cauchy

Exercise 2.83 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.84 (Problème principal)**.** On rappelle la définition d'une suite de Cauchy : c'est une suite telle que $\sup_{m,p\geq n}|u_m - u_p| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy réelle. $(u_n)_n$ est en particulier bornée car il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{m,p\geq N}|u_m - u_p| < +\infty$ (sans quoi cela ne pourrait tendre vers 0). On nomme M cette valeur. On a alors $\forall n \geq N, |u_n| \leq |u_N| + |u_n - u_N| \leq |u_N| + M$. Donc $(u_n)_n$ est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, soit $(u_{\varphi(n)})_n$ une extraction convergente vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{m,p\geq N}|u_m - u_p| < \varepsilon$ et $\forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. Soit $n \geq N$, alors $|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \sup_{m,p\geq N}|u_m - u_p| + |u_{\varphi(n)} - \ell| < 2\varepsilon$. D'où la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Réciproquement, si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors, pour $\varepsilon > 0$, on pose N tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$. Alors, soit $m, p \geq N$, on a $|u_m - u_p| \leq |u_m - \ell| + |u_p - \ell| < 2\varepsilon$. D'où $\forall \varepsilon, \exists N, \sup_{m,p\geq N}|u_m - u_p| < \varepsilon$ et ainsi $(u_n)_n$ est de Cauchy.

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a équivalence de *converger* et *être une suite de Cauchy*, ce qui n'est pas le cas dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ par exemple. $\mathbb{R}$ est ce qu'on appelle un corps *complet*.

Exercise 2.85 (Question subsidiaire)**.** On pose la fonction $\theta \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}}|\sin n\theta|$, qui est bien définie par l'axiome de la borne supérieure.

- Si $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$: $f(\theta) \geq \sin\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
- Si $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$: Soit n_0 tel que $(n_0 - 1)\theta < \frac{\pi}{3} \leq n_0\theta$. Alors les inégalités garantissent $n_0\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, donc $f(\theta) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Si $\theta \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$: on note que $\pi - \theta \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, donc $f(\theta) = \sup_n|\sin(n\theta)| = \sup_n|\sin(n(\pi - \theta))| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, on vient de prouver que l'inf est atteint (c'est un minimum) et vaut $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Retour à la Khôlle : Section 1.10.1.

2.29 Khôlle 29 : Problèmes de moyennes

Exercise 2.86 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.87 (Problème principal)**.** Premièrement, $v_n \leq u_n$ car $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2}{2}$. Cela induit que $(u_n)_n$ est décroissante (car $u_{n+1} = \frac{v_n + u_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} = u_n$) et $(v_n)_n$ est croissante (car $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{v_n v_n} = v_n$. En outre, on a $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq u_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$ donc $0 \leq u_n - v_n \leq 2^{-n}(u_0 - v_0) \to 0$. D'où le caractère adjacent de ces suites.

Par sa définition, on a $M(x, y) = M\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right) = M\left(\frac{y+x}{2}, \sqrt{yx}\right) = M(y, x)$. M est bien symétrique. Ensuite, si on pose $u'_0 = tx$ et $v'_0 = ty$, alors on peut prouver par récurrence que $u'_n = tu_n$ et $v'_n = tv_n$. Ainsi, la limite commune de

$(u'_n)_n$ et $(v'_n)_n$ vaut t fois celle de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$: $M(tx,ty)=tM(x,y)$. Enfin, on a déjà prouvé l'inégalité grâce au caractère adjacent des deux suites, reste le cas d'égalité. S'il y a égalité, alors en particulier l'une des deux suites $(u_n)_n$ ou $(v_n)_n$ est stationnaire. Il s'ensuit que x et y son égaux car on aurait $\frac{x+y}{2}=\sqrt{xy}$ (ce qui induit $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}=0$).

Pour l'intégrale elliptique, voire ici, on utilise le changement de variable $u=t+\arctan\left(\frac{y}{x}\tan t\right)$ dans l'intégrale qui exprime $M\left(\frac{x+y}{2},\sqrt{xy}\right)$.

Exercise 2.88 (Question subsidiaire)**.** Soient $x<y\in\mathbb{R}$. On peut trouver $a,b\in A$ tels que $a<x<y<b$. On pose les suites réelles $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(m_n)_n$ définies ainsi : $a_0=a$ et $b_0=b$. Pour n fixé, soit $m_n=\frac{a_n+b_n}{2}$, si $m_n<x$, on pose $a_{n+1}=m_n$ et $b_{n+1}=b_n$, si $m_n>y$, on pose $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=m_n$, si $m_n\in[x,y]$, on s'arrête. Grâce à la propriété de moyennage de A, on sait que $\forall n, a_n, b_n, m_n\in A$. On veut montrer qu'il existe $N\in\mathbb{N}, m_N\in[x,y]$.

Raisonnons par l'absurde, si ce n'est pas le cas, alors $\forall n, a_n, b_n\notin[x,y]$. De fait, la récurrence garantit que $a_n<x<y<b_n$, donc $0<y-x<b_n-a_n$. Or $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)\to 0$, ce qui est une contradiction.

Finalement, il existe un N tel que $m_N\in[x,y]$, donc $A\cap[x,y]\neq\emptyset$.

Retour à la Khôlle : Section 1.10.2.

2.30 Khôlle 30 : Preuve que la distance est lipschitzienne

Exercise 2.89 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.90 (Problème principal)**.** Soit $x\in\mathbb{R}$, l'ensemble $\{|x-a|, a\in A\}\subset\mathbb{R}$ est non vide car A est non vide et minorée par 0, donc il admet un borne inférieure par l'axiome de la topologie réelle. Ainsi, d_A est bien définie. On remarque que si $x\in A$, alors $0\in\{|x-a|, a\in A\}$, donc $d_A(x)=0$. En outre, $d_A(x)\geq 0$ grâce à la valeur absolue.

Soit $a\in A$, grâce à l'inégalité triangulaire, on a : $|x-a|\leq|x-y|+|y-a|$, donc $d_A(x)\leq|x-y|+d_A(y)$. Pareillement, on peut échanger les rôles de x et y et on obtient finalement : $|d_A(x)-d_A(y)|\leq|x-y|$.

Exercise 2.91 (Question subsidiaire)**.** On peut par exemple penser à $(\log n)_n$ ou à $(\sqrt{n})_n$.

Soit $p=\min_{k>n_0 \text{ et } u_k>x}$ (partie non-vide de $\mathbb{N}$ car $u_n\to+\infty$). Alors $x\in[u_{p-1},u_p]$, et comme $p-1\geq n_0$, $|u_p-u_{p-1}|\leq\varepsilon$, donc $0\leq u_p-x\leq\varepsilon$ (attention au cas $p=n_0+1$).

Soit maintenant $x\in\mathbb{R}$ quelconque. Soit n_0 défini comme précédent (pour u_n). Soit m tel que $x+v_m\geq u_{n_0}$, ce qui existe car $v_m\to+\infty$. En appliquant le paragraphe précédent, on obtient l'existence de p tel que $|(u_p-v_m)-x|\leq\varepsilon$, d'où la densité.

Soit $x\in[0,1]$. On pose $(v_n)_n=(\lfloor u_n\rfloor)_n\to+\infty$. On obtient donc l'existence pour tout $\varepsilon>0$ de m,p tels que $|(u_p-v_m)-x|\leq\varepsilon$. Cela induit $u_p-v_m\in[0,1[$, puis $v_m = \lfloor u_p \rfloor$ nécessairement. On obtient bien a densité de $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor\}_n$ dans $[0;1]$.

Retour à la Khôlle : Section 1.10.3.

2.31 Khôlle 31 : Densité par différence de suites

Exercise 2.92 (Question de cours)**.** **Cf cours !**

Exercise 2.93 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.91.

Exercise 2.94 (Question subsidiaire)**.** On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité $e = \sum_0^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$ est évidente ($e = \int_0^1 e^t \mathrm{d}t$).

Supposons l'égalité vérifiée pour un n donné. Dans ce cas, on effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \mathrm{d}t &= \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\right]_0^1 - (-1)\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} + e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient l'égalité souhaitée.

Ainsi : $0 < \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t < e \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{d}t = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$.

Si on suppose $e = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, alors on peut écrire que pour tout n : $0 < an! - b\sum_0^n \frac{n}{k!} < \frac{3b}{n+1}$. En particulier, avec $n = 3b$:

$$0 < an! - b\sum_0^{3b} \frac{(3b)!}{k!} < 1$$

Or on vient d'encadrer un entier entre 0 et 1, ce qui n'est pas possible, donc $e \notin \mathbb{Q}$.

Retour à la Khôlle : Section 1.11.1.

2.32 Khôlle 32 : Variation de la constante pour les suites

Exercise 2.95 (Question de cours)**.** **Cf cours !**

Exercise 2.96 (Problème principal)**.** Pour $(v_n)_n$, on a le produit télescopique : $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n}{v_0}$ d'une part. D'autre part : $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \prod_k (k+1)! = n!$. Ainsi : $v_n = Cn!$.

En injectant $C(n)n!$ dans l'égalité, on obtient immédiatement :

$$C(n+1) - C(n) = 2^n$$

Cela donne la somme télescopique : $\sum_{k=0}^{n-1} C(k+1) - C(k) = C(n) - C(0) = 2^n - 1$. Comme on veut que $u_n = (C(0) + 2^n - 1)n!$, on obtient $C(0) = u_0$ et finalement $u_n = (u_0 + 2^n - 1)n!$

Pour la deuxième récurrence, on peut faire exactement la même chose : on cherche d'abord $(v_n)_n$ telle que $v_{n+1} - 3^{2n} v_n = 0$, ce qui donne $v_n = 3^{n(n-1)} v_0$. On cherche ensuite les solution à la récurrence de la forme $C(n)3^{n(n-1)}$, ce qui donne $C(n+1) - C(n) = 3^{-n}$ et finalement, en regardant la condition initiale :

$$u_n = \left(u_0 + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right) 3^{n(n-1)}$$

Exercise 2.97 (Question subsidiaire)**.** On introduit $a_n(x) = \#(A(x) \cap [1, n])$ et idem pour y.

Soit $k \geq \frac{n+1}{x}$, alors $\lfloor kx \rfloor \geq kx \geq n+1$, donc $a_n(x) \leq \frac{n+1}{x}$. De la même manière, si $k \leq \frac{n+1}{x} - 1$, alors $\lfloor kx \rfloor \leq kx \leq n + 1 - x$, et comme $\lfloor kx \rfloor$ est un entier, on a bien $\lfloor kx \rfloor \leq n$, ce qui induit : $a_n(x) \geq \frac{n+1}{x} - 1$. On obtient l'inégalité (qui vaut aussi pour y) :

$$a_n(x) \leq \frac{n+1}{x} \leq a_n(x) + 1$$

De fait, en retournant les inégalités, on obtient $\frac{a_n(x)}{n} \to \frac{1}{x}$, et si $(A(x), A(y))$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, on doit avoir : $a_n(x) + a_n(y) = n$, donc en passant à la limite : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. En outre, si x (ou y) appartient à $\mathbb{Q}$, alors l'autre aussi, et en posant $x = \frac{p_1}{q_1}$ et $y = \frac{p_2}{q_2}$, on a $\lfloor p_2 q_1 x \rfloor = \lfloor p_1 q_2 y \rfloor (= p_1 p_2)$, ce qui n'est pas.

Réciproquement, on suppose que $x, y \notin \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, et (par l'absurde) que $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$. Dans ce cas, soit $k = \lfloor nx \rfloor = \lfloor ym \rfloor$, Grâce aux inégalités usuelles, on obtient $k \leq n + m < k + 1$. Comme k, n et m sont des entiers, cela induit $k = n + m$, puis $k = nx$ et $k = ny$, ce qui contredit le caractère irrationnel de x et y. Soit maintenant $k = \lfloor nx \rfloor$, on veut montrez que toutes les valeurs $j \leq k$ sont dans $A(x) \cup A(y)$, c'est à dire qu'on veut montrer que $\#(A(x) \cup A(y)) = k$. On pose m tel que $\lfloor my \rfloor < k < \lfloor (m+1)y \rfloor$ (on a déjà prouvé qu'il ne pouvait pas y avoir égalité car $A(x) \cap A(y) = \emptyset$). Comme $x, y > 1$, $n \mapsto \lfloor nx \rfloor$ et $n \mapsto \lfloor ny \rfloor$ sont strictement croissante, donc il y a $n + m$ valeurs dans $A(x) \cup A(y)$ qui sont $\leq k$. Or on a :

$$\frac{k}{x} \leq n < \frac{k+1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{k}{y} - 1 < m < \frac{k+1}{y}$$

En additionnant, on trouve : $k - 1 < n + m < k + 1$, d'où $k = n + m$, ce qui conclut.

Ce théorème permet d'assurer qu'on a toujours un moyen de proposer une partie qu'on est sûr de pouvoir gagner au *jeu de Wythoff*.

Retour à la Khôlle : Section 1.11.2.

2.33 Khôlle 33 : Césaro multiplicatif

Exercise 2.98 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.99 (Problème principal)**.** Ou bien on revient aux suite de Césaro en appliquant le logarithme, ou on refait la démonstration comme il suit (ici $\ell > 0$, on laisse le lecteur faire le cas $\ell = 0$).

Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\forall n \geq N, \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon$. On a alors par produit : $u_N(\ell - \varepsilon)^{n-N} \leq u_n \leq u_N(\ell + \varepsilon)^{n-N}$. En passant à la $\sqrt[n]{\cdots}$, on obtient :

$$u_N^{1/n}(\ell - \varepsilon)^{1-N/n} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq u_N^{1/n}(\ell + \varepsilon)^{1-N/n}$$

Par encadrement et passage à la limite, on obtient l'existence d'un $\tilde{N}$ tel que $\forall n \geq \tilde{N}, \ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \ell + 2\varepsilon$. Ainsi, $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

La réciproque est fausse, on peut par exemple créer la suite suivante : on prend a, b deux réels positifs différents, $u_0 = 1$ et

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n \quad \text{si } n \text{ impair} \\ u_{n+1} &= bu_n \quad \text{si } n \text{ pair} \end{aligned}$$

Alors, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne converge pas (cela vaut alternativement a puis b), alors que $\sqrt[2n]{u_{2n}} = \sqrt{ab}^{\,n}$ et $\sqrt[2n+1]{u_{2n+1}} = a^{\frac{n+1}{2n+1}} b^{\frac{2n}{2n+1}} \to \sqrt{ab}$, d'où $\sqrt[n]{u_n} \to \sqrt{ab}$.

Pour $u_n = \binom{2n}{n}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4n+2}{n+1} \to 4$, donc $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \to 4$ quand $n \to +\infty$.

Pour $u_n = \frac{n^n}{n!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, donc $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$ quand $n \to +\infty$.

Pour $u_n = \frac{(3n)!}{n^{2n} n!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n} \to \frac{27}{e}$, donc $\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} \to \frac{27}{e}$ quand $n \to +\infty$.

Exercise 2.100 (Question subsidiaire)**.** On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_n = 0$ si n n'est pas premier, et $u_p = 1$ pour tout p premier (on pourra noter $(\mathbb{1}_P(n))_n$). Dans ce cas, $(u_{kn})_n$ est nulle pour $n \geq 2$, donc $\forall k \neq 1, u_{kn} \to 0$. Cependant, $(u_n)_n$ ne peut converger car elle possède une suite extraite $(u_p)_{p \in P}$ qui tend vers 1. Elle a donc 2 valeurs d'adhérence.

Retour à la Khôlle : Section 1.11.3.

2.34 Khôlle 34 : Super-triangles de Héron

Exercise 2.101 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.102 (Problème principal)**.** L'identité de Héron se déduit d'une utilisation systématique du théorème de Pythagore sur les 3 hauteurs d'un triangle quelconque.

Soit un super-triangle de Héron de côtés a, b, c. Notons $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. L'égalité aire-périmètre donne :

$$(2s)^2 = (s-a)(s-b)(s-c)$$

Changeons de variables et posons $x = s-a$, $y = s-b$ et $z = s-c$. Alors $x+y+z = s$, donc l'équation précédent donne :

$$4(x+y+z)^2 = xyz$$

Supposons, sans perte de généralité que $0 \leq x \leq y \leq z$. Si $x = 1$, alors $4+4y+4z = yz$, soit $4(y+1) = (y-4)z$, donc $y \geq 5$ (sinon le membre droit est négatif ou nul). En outre, il faut que $y-4 | 4(y+1)$. Or $(y-4) \wedge (y+1) = (y-4) \wedge 5$, donc $y-4$ doit diviser $4 \times 5 = 20$ pour que $y-4 | 4(y+1)$. La liste exhaustive donne $y \in \{5, 6, 8, 9, 14, 24\}$. Seuls $(y, z) \in \{(5, 24), (6, 14), (8, 9)\}$ permettent d'assurer $y \leq z$ et $4+4y+4z = yz$. On obtient ainsi 3 super-triangles de Héron :

x	y	z	a	b	c	Périmètre	Aire
1	5	24	29	25	6	60	60
1	6	14	20	15	7	42	42
1	8	9	17	10	9	36	36

Ensuite, on poursuit avec $x = 2$. Alors $4(y+2) = (2y-4)z$, donc $2y-4 | 4(y+2)$, or $(2y-4) \wedge (y+2) = (2y-4) \wedge 6$, puis $2y-4 | 24$, soit $y \in \{3, 4, 5, 6, 7, 14\}$ puis $(y, z) \in \{(3, 10), (4, 6)\}$. Soit :

x	y	z	a	b	c	Périmètre	Aire
2	3	10	13	10	5	30	30
2	4	6	10	8	6	24	24

Après, pour $x = 3$, on a $4(y+3) = (3y-4)z$. Or $(y+3) \wedge (3y-4) = (3y-4) \wedge 10$, donc $3y-4 | 40$, soit $3y \in \{5, 6, 8, 9, 14, 24, 44\}$ puis $(y, z) \in \{(2, 10)\}$ mais $x \leq y$. Ce cas ne mène à aucune nouvelle solution.

Enfin, si $x \geq 4$, alors $4(x+y+z) \leq 4(z+z+z) = 12z$, mais $xyz \geq 4 \times 4 \times z = 16z$, ce qui est impossible.

Finalement, il n'y a que 5 super-triangles de Héron.

Remarquons que, en anglais, ils s'appellent *super-Hero triangles*. Pour plus d'informations culturelles passionnantes, regardez ici.

Exercise 2.103 (Question subsidiaire)**.** On va montrer que la seule solution est $42 \times 138 = 5796$. On notera dans la suite l'équation $42 \times xyz = abcd$.

On commence par regarder l'égalité modulo 10 : $2x = d$ [10]. Donc on en déduit en explorant les possibilité que $z = 3, 8, 9$ correspondant réciproquement à $d = 6, 6, 8$? Ensuite, d'après le nombre de chiffre, on en déduit immédiatement que $x \leq 10/4$, donc $x = 1$. On teste alors le plus petit nombre possible pour xyz afin d'obtenir une borne sur a : $42 \times 138 = 5796$. On vient de trouver une solution, néanmoins, on va aller plus loin en prouvant que c'est la seule. D'après le calcul précédent, on sait que a 5. Le plus efficace est de compter les possibilités pour yz : on a vu qu'il y a 3 possibilités pour z, et on peut voir rapidement que $y = 7$ est impossible (car alors $a = 7$). On a donc $2+3+3+2+2 = 12$ possibilités à tester :

42 138 = 5796

42 139 = 5838

42 153 = 6426 On savait qu'on aurait deux fois 6.

42 158 = 6636 On savait qu'on aurait deux fois 6.

42 159 = 6678 On savait qu'on aurait deux fois 6.

42 163 = 6846 On savait qu'on aurait deux fois 6.

42 168 = 7056 On savait qu'on aurait deux fois 6.

42 169 = 7098

42 183 = 7686

42 189 = 7938 On savait qu'on aurait deux fois 8.

42 193 = 8106

42 198 = 8316 On savait qu'on aurait deux fois 8.

On a donc bien une unique solution à l'équation.

Retour à la Khôlle : Section 1.12.1.

2.35 Khôlle 35 : Triplets pythagoriciens

Exercise 2.104 (Question de cours). **Cf cours !**

Exercise 2.105 (Problème principal). Soit $d = \text{pgcd}(x; y; z)$ et $d = x$, $d = y$, $d = z$. On a :

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad , \quad d^2\ {}^2 + d^2\ {}^2 = s^2\ {}^2 \quad , \quad {}^2 + {}^2 = {}^2$$

Donc en résolvant pour le cas $\text{pgcd}(x; y; z) = 1$, on a immédiatement la réponse dans le cas général. Or si x et y ont un diviseur premier commun p, alors $p|z^2 = x^2 + y^2$, et par le lemme de Gauss, $p|z$, donc $p|\text{pgcd}(x; y; z)$. Il en va de même pour y et z et pour x et z : si x, y et z ne sont pas deux à deux premiers, alors il ne sont pas premier dans leur ensemble. Donc on peut se ramener au cas ou ils sont deux à deux premiers.

Puisque les trois sont deux à deux premiers, il y en a au plus 1 qui est pair. Or si x et y sont impairs, alors x^2 et y^2 sont congrus à 1 modulo 4, donc z^2 est congru à 2 modulo 4, donc z^2 est pair et z est pair. Mais si z est pair, alors z^2 est congru à 0 modulo 4 : on a une contradiction ! Ainsi, au moins l'un des deux parmi x et y est pair. On supposera que c'est y par la suite.

L'équation de départ se reformule alors avec X, Y et Z : $4Y^2 = (z-x)(z+x)$. Puis : $Y^2 = XZ$.

Un diviseur commun de X est Z divise aussi $z = X + Z$ et $x = X - Z$, donc vaut ± 1. Dès lors, si leur produit est un carré et qu'ils sont premiers entre eux, une analyse p-adique ou une analyse des diviseurs premiers montre que le lemme de Gauss induit que X et Z sont eux-mêmes des carrés.

Reste à conclure. Soit u et v tels que $X = u^2$ et $Z = v^2$. Soit $d = \mathrm{pgcd}(x; y; z)$. On a :

$$\begin{cases} \frac{z/d + x/d}{2} & = u^2 \\ \frac{z/d - x/d}{2} & = v^2 \\ y^2 & = z^2 - x^2 \end{cases}$$

Dès lors, une simple résolution montre que :

$$(x; y; z) = \left(d(u^2 - v^2); 2duv; d(u^2 + v^2)\right)$$

La réciproque est claire : un triplet de cette forme est bien composé de nombres entiers et vérifie l'identité de Pythagore.

Exercise 2.106 (Question subsidiaire)**.** On remarque que $\overline{XX} = 11 \times X$, donc $\overline{XYZ} = 11(X + Y + Z)$. Or on sait tester di un nombre est un multiple de 11, il faut que $X - Y + Z = 0$, ce qui revient à $Y = X + Z$, on est donc ramené à 2 paramètre avec les conditions :

$$\begin{cases} 0 \leq X \leq 9 \\ 0 \leq Z \leq 9 \\ 0 \leq X + Z \leq 9 \\ 11(10X + Z) = \overline{XYZ} = 11(X + Y + Z) = 22(X + Z) \end{cases}$$

Ainsi, $Z = 8X$ d'après la dernière ligne. Les conditions des deux première lignes donnent deux possibilités à tester : $X = 0$ et $X = 1$.

Finalement, on peut vérifier que cela donnes les deux exactes solutions du problème : $00 + 00 + 00 = 000$ et $11 + 99 + 88 = 198$.

Retour à la Khôlle : Section 1.12.2.

2.36 Khôlle 36 : Identité de Sophie-Germain, Somme factorielle

Exercise 2.107 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.108 (Problème principal)**.** Si n est pair, alors $2 | n^4$ et $2 | 4^n$, donc $n^4 + 4^n$ n'est évidemment pas premier.

On suppose n impair et on note $n = 2k + 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} n^4 + 4^n &= n^4 + 4\left(2^k\right)^4 \\ &= \left(n^2 + 2n2^k + 2 \cdot 2^{2k}\right)\left(n^2 - 2n2^k + 2 \cdot 2^{2k}\right) \\ &= \left(n^2 + n2^{k+1} + 2^n\right)\left(n^2 - n2^{k+1} + 2^n\right) \end{aligned}$$

Pour que $n^4 + 4^n$ soit un nombre premier, il faut donc que l'un des deux facteurs ci-dessus vaille 1. Le premier ne peut évidemment pas valoir 1 car il est strictement supérieur à n. On doit donc résoudre $n^2 + 2^n = n2^{(n+1)/2} + 1$. Le membre de gauche croît bien plus lentement que celui de droite, et on "voit" qu'il n'y aura de solution que pour n très petit. Cependant, on peut raisonner plus efficacement avec des arguments un peu plus arithmétiques : l'équation revient à $2^k\left(2^{k+1} - 2k - 1\right) + n^2 = 1$. Or pour $k \geq 1$, on a bien (par récurrence) $2^{k+1} \geq 2k + 1$ donc le terme de gauche est strictement supérieur à 1. Reste $k = 0$ qui donne $n = 1$ et $n^4 + 4^n = 5$ qui est bien premier.

Finalement, le seul nombre premier de la forme $n^4 + 4^n$ est 5 (pour $n = 1$).

Exercise 2.109 (Question subsidiaire)**.** On constate que :

$$\sum_{k=1}^{1} k! = 1^2$$

$$\sum_{k=1}^{2} k! = 1 + 2 = 3$$

$$\sum_{k=1}^{3} k! = 1 + 2 + 6 = 3^2$$

$$\sum_{k=1}^{4} k! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$$

Donc $(1; 1)$ et $(3; 3)$ sont des solutions.

Supposons que $m \geq 5$, alors :

$$\sum_{k=1}^{m} k! \equiv 33 \equiv 3 \quad [5]$$

Or on peut regarder les résidus des carrés modulo 5 :

n	n^2
0	0
1	1
2	4
3	4
4	1

Donc il est impossible que $\sum_{k=1}^{m} k!$ soit un carré pour $m \geq 5$.

On constate que :

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} k! = 1^2$$

$$\sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} k! = 1 - 2 = -1$$

Donc $(1;1)$ est solution.
Supposons que $m \geq 2$, alors :

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} k! \equiv -1 \equiv 2 \quad [5]$$

Or on peut regarder les résidus des carrés modulo 3 :

n	n^2
0	0
1	1
2	1

Donc il est impossible que $\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} k!$ soit un carré pour $m \geq 3$.

On constate que :

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k} k! = -1$$

$$\sum_{k=1}^{2} (-1)^{k} k! = -1 + 2 = 1^2$$

$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k} k! = 1 - 6 = -5$$

$$\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k} k! = -5 + 24 = 19$$

$$\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k} k! = 19 - 120 = -101$$

$$\sum_{k=1}^{6} (-1)^{k} k! = -101 + 720 = 619$$

Donc $(2;1)$ est solution.

Supposons que $m \geq 7$, alors :

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^k k! \equiv 619 \equiv 3 \quad [5]$$

Or on peut regarder les résidus des carrés modulo 7 :

n	n^2
0	0
1	1
2	4
3	2
4	2
5	4
6	1

Donc il est impossible que $\sum_{k=1}^{m}(-1)^k k!$ soit un carré pour $m \geq 7$.

Enfin, on remarque $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} k! = -\sum_{k=1}^{m}(-1)^k k!$, ce qui conclut les cas restants.

Retour à la Khôlle : Section 1.12.3.

2.37 Khôlle 37 : $a^b = b^a$ arithmétiquement, Partie entière

Exercise 2.110 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.111 (Problème principal)**.** On remarque déjà que si $a = b$, alors on a bien $a^b = b^a$. Supposons dans la suite $a < b$. On utilise les valuations p-adiques. Soit p premier fixé. Si $a^b = b^a$, alors $b\nu_p(a) = a\nu_p(b)$. Comme on a supposé $a < b$, on obtient $\nu_p(a) < \nu_p(b)$. Cette propriété étant vérifiée pour tout p, on obtient que $a|b$. Soit k tel que $b = ka$. On peut remplacer dans l'équation initiale et on a : $(a^a)^k = k^a a^a$; d'où : $(a^a)^{k-1} = a^k$; puis $a^{a(k-1)} = a^k$; et enfin l'égalité des exposants (car $a \neq 1$) : $a(k-1) = k$. Cela mène à $(k-1)|k$, ce qui n'est possible que si $k = 2$ (sinon, $k \wedge (k-1) = 1$ par l'algorithme d'Euclide). Dans ce cas, on trouve $a = 2$ et finalement $b = ka = 4$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $a^b = b^a$ est (attention à l'asymétrie $a < b$ qu'on a supposée et qu'il faut lever maintenant) :

$$\{(x;x); x \in \mathbb{N}\} \cup \{(2;4);(4;2)\}$$

Exercise 2.112 (Question subsidiaire)**.** Si $x > 1$, alors $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$, puis $f(x) = 0$: f est continue sur $]1;+\infty[$.

Pour tout k entier, la fonction est continue sur $\left]\frac{1}{k+1};\frac{1}{k}\right[$ car elle coïncide avec $x \mapsto kx^2$. Reste à déterminer les limites en $\frac{1}{k}^+$ et $\frac{1}{k}^-$. À droite, on a :

$$\lim_{\frac{1}{k}^+} f(x) = \frac{k-1}{k^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

À gauche, on a :

$$\lim_{\frac{1}{k}^-} f(x) = \frac{1}{k}$$

La fonction est ainsi discontinue en tout pour $x = \frac{1}{k}$ $(k \geq 1)$. Elle est continue en 0 car $\forall x, \frac{1}{x} - 1 \leq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$, donc $\forall x, 1 - x \leq f(x) \leq 1$, puis $f(x) \to 1$ quand $x \to 0$.

Si on regarde la fonction $f_n : x \mapsto x^n \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$, alors on a, par le même raisonnement que f_n et continue sur $]1; +\infty[$ (elle y est nulle) et coïncide avec $x \mapsto kx^n$ sur tout intervalle $\left] \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k} \right]$. Elle a donc les limites $\frac{k-1}{k^n}$ par la droite, et $\frac{k}{k^n} = \frac{1}{k^{n-1}}$ par la gauche. Finalement, aucune des f_n n'est continue (chacune a pour domaine de continuité $\mathbb{R} \setminus \bigcup_k \{\frac{1}{k}\}$), mais elles se "rapprochent" d'une fonction continue.

Retour à la Khôlle : Section 1.13.1.

2.38 Khôlle 38 : Polynômes rationnels, Conjecture de Catalan

Exercise 2.113 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.114 (Problème principal)**.** Supposons que $\alpha = \frac{p}{q}$ écrit sous forme d'une fraction irréductible. Alors, en utilisant que α est racine du polynôme et en multipliant par q^2, on obtient : $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. De fait, $ap^2 = -q(bp + cq)$, donc $q | ap^2$. Comme $q \wedge p = 1$, on a : $q | a$. De fait, q est impair. De la même manière, $p | c$, donc p est impair. Cependant, on remarque que $ap^2 = -bpq - cq^2$, on a à gauche un nombre impair et à droite la somme de deux nombres impair, c'est-à-dire un nombre pair. C'est un problème ! Finalement, il est impossible que α soit rationnel.

Dans un polynôme quelconque, une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ vérifie : q divise le coefficient dominant et p divise le coefficient constant. Cela donne énormément d'informations : la résolution des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients rationnels se ramène à un nombre fini de cas.

Exercise 2.115 (Question subsidiaire)**.** Écrivons plutôt l'équation de la forme $x^2 - 1 = y^3$, c'est-à-dire $(x-1)(x+1) = y^3$. Dès lors, si $p | y$ avec p premier et $p \neq 2$, comme $(x+1) \wedge (x-1) = 2$, on a $p | (x-1)$ ou $p | (x+1)$ mais pas les deux. Mais comme $p^3 | y^3 = (x+1)(x-1)$, si $p | (x-1)$, alors $p^3 | (x-1)$ (et respectivement pour $x+1$). Dès lors, il y a 3 possibilités :

- $x + 1$ et $x - 1$ sont des cubes impairs.
- $x + 1 = 2a^3$ et $x - 1 = 4b^3$ avec a et b impairs.
- $x + 1 = 4a^3$ et $x - 1 = 2b^3$ avec a et b impairs.

Comme y est impair, x est pair (sinon $x^2 - 1$ est pair), donc seul le premier cas est possible. Or dans le premier cas, on a deux cubes qui diffèrent de 2, ce qui n'est pas possible : il n'y a pas de cube impair qui suive immédiatement un carré.

On peut se poser la question en toute généralité, c'est un peu plus difficile mais on obtient que la seule possibilité est $3^2 = 2^3 + 1$.

Exercise 2.116 (Question subsidiaire)**.** On peut (presque) poser :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ce faisant, on obtient une bijection de $[0; 1]$ dans lui-même (sa réciproque est elle-même), qui est discontinue sauf en $1/2$. On peut corriger cette fonction pour pleinement répondre à la question :

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}; x \neq 0; x \neq 1/2 \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \tilde{f}(0) = 1/2 \ ; \ \tilde{f}(1/2) = 0 & \end{cases}$$

Cette fonction est une bijection (involution) de $[0; 1]$ discontinue partout.

Retour à la Khôlle : Section 1.13.2.

2.39 Khôlle 39 : Problème de Joséphus, Valeurs intermédiaires

Exercise 2.117 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.118 (Problème principal)**.** Cette vidéo explique tout !

Exercise 2.119 (Question subsidiaire)**.** Supposons que f ne soit pas continue (mais injective et ayant la propriété des valeurs intermédiaires). Soit alors a un point de discontinuité de f et $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0, \exists x, |x - a| < \eta, |f(x) - f(a)| > \varepsilon$. On pose $y_+ = f(a) + \varepsilon/2$ et $y_- = f(a) - \varepsilon/2$. Soit b_0 tel que $|f(b_0) - f(a)| > \varepsilon$. Si $f(b_0) < f(a) - \varepsilon$, alors on peut construire $c_0 \in]b_0; a[$ tel que $f(c_0) = y_-$ grâce aux valeurs intermédiaires. Si $f(b_0) > f(a) + \varepsilon$, alors on peut construire $c_0 \in]b_0; a[$ tel que $f(c_0) = y_+$. Ensuite, on peut construire b_1 tel que $|b_1 - a| < |c_0 - a| (= \eta)$ et $|f(b_1) - f(a)| > \varepsilon$. Cela permet de construire $c_1 \in]b_1; a[$ tel que $f(c_1) \in \{y_-; y_+\}$. On a bien $c_0 \neq c_1$ (car $c_0 < b_1 < c_1$).

On poursuit ainsi pour construire des suites $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ tels que tous les c_n soient différents et que $\forall n, f(c_n) \in \{y_-; y_+\}$. Cela contredit le caractère injectif de f car on a trouvé plus de deux antécédents à un ensemble à deux éléments (on aurait d'ailleurs pu construire une suite de seulement 3 éléments). Ainsi, notre supposition était erronée : f est continue.

Supposons maintenant g non continue (mais ayant la propriété des valeurs intermédiaires et la fermeture des images réciproques sur $\mathbb{Q}$). Soit a un point de discontinuité de g. On peut reprendre le raisonnement précédent avec y_+ et y_- des rationnels différents de a (grâce à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Plus précisément, on choisit une suite $(\varepsilon_n)_n$ strictement positive qui tend vers 0, puis on construit par récurrence une suite $(c_n)_n$ qui vérifie $\forall n, g(c_n) \in \{y_-, y_+\}$ et $\varepsilon_n > |c_n - a|$ (cela est possible car on peut toujours ajuster le choix de b_n dans le raisonnement précédent pour le rendre plus proche de a au besoin). Alors, on a $c_n \to a$ quand $n \to +\infty$, mais $\forall n, c_n \in (X_{y_-} \cup X_{y_+})$ qui est fermé, donc comme $(c_n)_n$ converge, sa limite est dans $X_{y_-} \cup X_{y_+}$, d'où $g(a) \in \{y_-, y_+\}$, ce qui n'est pas.

Finalement, g est continue.

Retour à la Khôlle : Section 1.13.3.

2.40 Khôlle 40 : Point commun de fonctions qui commutent

Exercise 2.120 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.121 (Problème principal)**.** a) Par l'absurde : Supposons que ni $f \geq g$, si $g \geq f$, alors il existe x, y tels que $f(x) > g(x)$ et $f(y) < g(y)$. Mais alors la fonction $f - g$ est continue, positive et négative. Elle s'annule donc par le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists z, f(z) = g(z)$. Par symétrie d'argument, on peut supposer $f > g$. Comme $f - g$ est continue strictement positive sur un segment, on peut trouver $\varepsilon = \inf_{[0;1]} f - g > 0$. Dès lors : $\forall x, f(x) \geq g(x) + \varepsilon$. Ensuite :

$$\forall x, f(f(x)) \geq g(f(x)) + \varepsilon = f(g(x)) + \varepsilon \geq g(g(x)) + \varepsilon + \varepsilon = g^2(x) + 2\varepsilon$$

En itérant cet argument, on en déduit que $\forall n, x, f^n(x) \geq g^n(x) + n\varepsilon$. Mais en faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient $f^n(x) \to +\infty$, alors que $f(x) \in [0;1]$. De cette absurdité découle l'existence d'un point commun à f et g.

b) Par les points fixes : X n'est pas vide car $\tilde{f} : x \mapsto f(x) - x$ est continue avec $\tilde{f}(0) \geq 0$ et $\tilde{f}(1) \leq 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $\tilde{f}$ s'annule, c'est-à-dire que f admet un point fixe. Comme X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ borné (inclus dans $[0;1]$), il admet une borne inférieur et une borné supérieure, nommons-les x_m et x_M. Soit une suite de points de X, $(x_k)_k$ qui tend vers x_m. On a : $\forall k, f(x_k) = x_k$ car $x_k \in X$. Par continuité, l'égalité passe à la limite et on trouve que : $f(x_m) = x_m$, ce qui induit que cette borne inférieure est atteinte, c'est un minimum. De la même manière, x_M est un maximum. En outre, g stabilise X. En effet, soit $x \in X$, alors, par commutation, $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$, donc $g(x)$ est un point fixe de f. De fait, $g(x_m) \in X$, et par minimalité de x_m, on obtient que $g(x_m) \geq x_m$. Pareillement, $g(x_M) \leq x_M$. Cela donne que $g - f$ est continue, d'abord positive (en x_m), puis négative. Ainsi, elle s'annule par le théorème des valeurs intermédiaires, donc on peut trouver un point tel que $f(y) = g(y)$.

Exercise 2.122 (Question subsidiaire)**.** Soit c un réel quelconque intervalle de l'intervalle $]a; b[$. Soit d_n une suite de l'intervalle qui tend vers c par valeur supérieure. D'après l'hypothèse, il existe $c \leq e_n \leq d_n$ tel que $f(e_n) = f(a)$ ou $f(e_n) = f(b)$. Maintenant, par le théorème des gendarmes, on constate que e_n tend vers c, et par continuité de f en c, $f(e_n)$ tend vers $f(c)$. Ainsi, on a obligatoirement $f(c) = f(a)$ ou $f(c) = f(b)$. Ainsi, f ne peut prendre que deux valeurs : $f(a)$ et $f(b)$. Or, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, une fonction continue qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs est constante. Donc f est constante.

Retour à la Khôlle : Section 1.14.1.

2.41 Khôlle 41 : Fonction périodique déviée, Barreau de cloche

Exercise 2.123 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.124 (Problème principal)**.** Supposons g non constante et soit $T > 0$ une de ses périodes. Soient $x; y \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $y \leq x + NT$. Alors, pour tout n :

$$f(y+nT)+g(y+nT) \leq f(x+nT+NT)+g(x+nT+NT) = f(x+nT+NT)+g(x)$$

Le membre de gauche tend vers $g(y)$ quand $n \to +\infty$ et celui de droite vers $g(x)$, d'où : $g(y) \leq g(x)$. Par un argument symétrique, on a aussi : $g(x) \leq g(y)$. Ainsi, g est constante.

Exercise 2.125 (Question subsidiaire)**.** Pour $n = 1$, c'est évident : $c_1 = 0$ convient car $f(0) = f(0 + 1/1)$.

Supposons $n \geq 2$ et posons la fonction $g_n : x \mapsto f(x + 1/n) - f(x)$. g_n est continue, et :

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

Dès lors, il est impossible que tous les $g_n(k/n)$ soient du même signe (strict) : soit l'un d'entre eux est nul, soit il y en a un positif et un négatif.

Si $g(k/n) = 0$ avec $k \in ⟦0; n-1⟧$, alors $c_n = k/n \in [0; 1 - 1/n]$ convient : $f(k/n) = f(k/n + 1/n)$.

Sinon, soient $i \neq j$ tels que $g(i/n) < 0$ et $g(j/n) > 0$ avec $i; j \in ⟦0; n-1⟧$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme g est continue, il existe $c_n \in \left]\frac{\min(i;j)}{n}; \frac{\max(i;j)}{n}\right[\subset [0; 1 - 1/n]$ tel que $g(c_n) = 0$, c'est-à-dire : $f(k/n) = f(k/n + 1/n)$.

On constate que $g_\alpha(0) = g_\alpha(1) = 1$. Cependant, si $g_\alpha(x) = g_\alpha(x + \alpha)$, alors, en simplifiant, on obtient : $\cos \frac{2\pi}{\alpha} = 1$, donc $1/\alpha$ est entier : on ne peut pas remplacer $1/n$ par un ε quelconque, au contraire, les seuls ε possibles sont les $1/n$.

Retour à la Khôlle : Section 1.14.2.

2.42 Khôlle 42 : Lemme du Soleil Levant, Dérivabilité différenciée

Exercise 2.126 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.127 (Problème principal)**.** X est un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, soit $x \in X$, et y tel que $g(y) = \max_{]x;b]} g$ (qui est bien un maximum car g est continue sur $[a;b]$). Alors, comme $y \neq x$, on peut trouver $\varepsilon (= \frac{1}{2}(y - x)$ par exemple), tel que $[x; x + \varepsilon] \subset X$. Inversement, s'il n'y a pas de voisinage à gauche de x dans X, alors cela signifie que tous les $z \in [x - \varepsilon; x[$ vérifient $g(z) \leq g(y)$, donc, par continuité $g(x) \leq g(y)$, ce qui n'est pas.

Ainsi, X est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc une réunion dénombrable d'intervalles. Si ce fait n'est pas connu, on peut le démontrer comme il suit. On peut écrire X comme une réunion d'intervalles maximaux (pour chaque x dans X, on construit l'intervalle le plus grand possible au sens de l'inclusion qui contient x), chaque intervalle est ouvert, sans quoi X ne le serait pas (car chaque intervalle est disjoint des autres). Reste à montrer qu'on a une quantité dénombrable d'intervalle. Comme chaque intervalle est ouvert, il est non vide, et on peut trouver un rationnel dedans (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). En particulier, on peut construire la fonction qui a chaque intervalle associe un rationnel dedans (peut importe lequel) : c'est une fonction **injective** de l'ensemble des intervalle vers $\mathbb{Q}$, donc l'ensemble des intervalle est dénombrable.

Montrons d'abord que pour tout $x \in]a_n; b_n[$, $g(b_n) \geq g(x)$. Considérons pour cela un point t en lequel g atteint son maximum sur $[x; b]$. Puisque $[x; b_n[\subset X$, t appartient à $[b_n; b]$ donc, comme $b_n \notin X$, $g(t) \leq g(b_n)$. A fortiori, $g(x) \leq g(b_n)$. Par continuité, $g(a_n) \leq g(b_n)$. Si $a_n \neq a$, on a même $g(a_n) = g(b_n)$. En effet, comme $a_n \notin X$, $g \leq g(a_n)$ sur $[a_n; b]$, en particulier $g(b_n) \leq g(a_n)$. Si $a_n = a$, on ne dispose pas de plus d'informations.

Exercise 2.128 (Question subsidiaire)**.** Si f est définie sur $]-\alpha; +\infty[$ (avec $\alpha > 0$), alors g est définie sur $]-\alpha/2; +\infty/2[\setminus \{0\}$.

Soit $x \in]-\alpha/2; +\infty/2[\setminus \{0\}$, alors :

$$\forall n, \; f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$$

On en déduit :

$$\forall n, \; \frac{f(x)}{x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) + \frac{f(x/2^n)}{x}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ fixé.

Comme $g(x) \to 0$ quand $x \to 0$, pour x suffisamment petit, tous les $\frac{x}{2^k}$ vérifient : $\left|g\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| < \varepsilon$. Dès lors :

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}\, g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right| \le \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \le \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \le \varepsilon$$

D'un autre côté $f(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Donc, à x fixé, pour n suffisamment grand, $\frac{x}{2^n}$ est suffisamment petit de sorte que :

$$\left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right| \le \varepsilon$$

En cumulant, on fixe d'abord x suffisamment petit puis n suffisamment grand et on obtient :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le 2\varepsilon$$

Ainsi, f est dérivable en 0 avec $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 0$.

Retour à la Khôlle : Section 1.14.3.

2.43 Khôlle 43 : Automorphismes intérieurs, Action de groupe

Exercise 2.129 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.130 (Problème principal)**.** La relation $\sim$ est :

— Réflexive : $x = r_G x e_G^{-1}$.

— Symétrique : si $y \sim x$, alors soit $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. Alors $y = g^{-1} x \left(g^{-1}\right)^{-1}$. Or $g^{-1} \in G$, donc $x \sim y$.

— Transitive : si $x \sim y$ et $y \sim z$, soient g et h tels que $y = gxg^{-1}$ et $z = hyh^{-1}$. Alors $z = (hg)x(hg)^{-1}$, donc $x \sim z$.

Donc $\sim$ est bien une relation d'équivalence.

Soit $x \in G$, alors : $\varphi_g \circ \varphi_h(x) = g(hxh^{-1})g^{-1} = (gh)x(gh)^{-1} = \varphi_{gh}(x)$. Donc on a bien $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$.

En outre, $\varphi_{e_G}(x) = e_G x e_G^{-1} = x = \mathrm{Id}_G(x)$.

Dès lors, $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_{e_G} = \mathrm{Id}_G$, et symétriquement. Donc $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$.

Ainsi, l'application φ est un morphisme de G vers $\mathrm{Aut}(G)$.

Soit maintenant $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$ et $g, x \in G$:

$$\psi \circ \varphi_g \circ \psi^{-1}(x) = \psi\left(g \psi^{-1}(x) g^{-1}\right) = \psi(g)\, \psi\left(\psi^{-1}(x)\right)\, \psi(g)^{-1} = \varphi_{\psi(g)}(x)$$

Ainsi, pour $\varphi_g \in \mathrm{Im}\,\varphi$ et $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$, on a bien $\psi \circ \varphi_g \circ \psi^{-1} \in \mathrm{Im}\,\varphi$: $\forall \psi \in \mathrm{Aut}(G), \psi (\mathrm{Im}\,\varphi) \psi^{-1} \subset \mathrm{Im}\,\varphi$, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}\,\varphi$ est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$.

Exercise 2.131 (Question subsidiaire)**.** φ définit ce qu'on appelle une action de G sur X.

1. On a $x \sim_G x$ car $\varphi(x, e) = x$.
2. Si $x \sim_G y$, alors il existe $g \in G$ tel que $y = \varphi(g, x)$. Dans ce cas, on a $\varphi(g^{-1}, y) = \varphi(g^{-1}, \varphi(g, x)) = \varphi(g^{-1} \star g, x) = \varphi(e, x) = x$, d'où la symétrie.
3. Si $x \sim_G y$ et $y \sim_G z$, alors soit $g, h \in G$ tels que $y = \varphi(g, x)$ et $z = \varphi(h, y)$, alors $\varphi(h \star g, x) = \varphi(h, \varphi(g, x)) = \varphi(h, y) = z$. Ainsi $\sim_G$ est transitif.

On a bien une relation d'équivalence.

En réalité, on connaît déjà plein d'actions de groupe. Par exemple, l'action du groupe des rotations de l'espace qui laisse inchangé un cube ou un tétraèdre sur les sommets de ce dernier ; ou l'action du groupe des permutations sur $[1, n]$; ou l'action du groupe des translation (ou de quelque transformations géométriques que ce soit) sur les points du plan.

Retour à la Khôlle : Section 1.15.1.

2.44 Khôlle 44 : Morphisme de corps, Loi exponentielle

Exercise 2.132 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.133 (Problème principal)**.** Le noyau d'un morphisme de corps $\sigma : k \to K$ est un groupe car un morphisme de corps est en particulier un morphisme de groupes (additifs). En outre, soit $\lambda \in k$ et $x \in \operatorname{Ker} \sigma$, alors $\sigma(\lambda x) = \sigma(\lambda)\sigma(x) = 0_K$ car σ est multiplicative sur le corps k. Donc $\operatorname{Ker} \sigma$ est un idéal de k.

Soit $I \subset k$ un idéal. Si $1_k \in I$, alors $I = k$ car $\lambda \cdot 1_k \in I$ pour tout $\lambda \in k$. Mais si $x \neq 0_k \in I$, alors $x^{-1} \in k$ car k est un corps, donc $x^{-1} \cdot x = 1 \in I$, puis $I = k$ comme on vient de le montrer. Ainsi si $I \neq k$, alors $I \subset \{0_k\}$, donc $I = \{0_k\}$ car I est non vide.

Si σ est un morphisme de corps non-nul, alors $\operatorname{Ker} \sigma \neq k$ est un idéal de k, c'est donc l'idéal nul par le raisonnement précédent. Dès lors, σ est (en particulier) un morphisme de groupe de noyau nul : σ est injectif. En outre, son image $\sigma(k) \subset K$ est un corps, donc un sous-corps de K. Ainsi, σ définit un isomorphisme de corps de k vers un sous-corps de K.

Exercise 2.134 (Question subsidiaire)**.** La loi est :

1. <u>Interne :</u> c'est évident.
2. <u>Associative :</u> $[(x, y) \star (z, t)] \star (u, v) = (x+z+u, (ye^z + te^{-x})e^u + ve^{-x-z}) = (x+z+u, ye^{z+u} + (te^u + ve^{-z})e^{-x}) = (x, y) \star [(z, t) \star (u, v)]$
3. <u>Élément neutre :</u> $(0, 0)$, il suffit de vérifier.
4. <u>Inverse :</u> $(x, y)^{-1} = (-x, -y)$, il suffit de vérifier.
5. <u>(Non-)commutative :</u> $(0, 1) \star (1, 0) = (1, e^{-1})$ alors que $(0, 1) \star (1, 0) = (1, e^{+1})$.

On obtient bien un groupe non-abélien.

Si $\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ pour cette loi, avec f dérivable, alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^{-x}$$

On en déduit tout d'abord que $f(0) = 0$ (car $f(x+0) = f(x) \quad 1 + f(0)e^{-x}$ pour tout x). Ensuite, si on dérive par rapport à y, on obtient :

$$\forall x, y, f'(x+y) = f(x)e^y + f'(y)e^{-x}$$

En particulier, en $y = 0$: $f'(x) = f(x) + f'(0)e^{-x}$. Cela veut dire que f est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} f(0) = 0, f'(0) = \\ f' - f = \quad e^{-x} \end{cases}$$

On obtient ainsi l'existence de $\in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \quad e^x - \frac{}{2}e^{-x}$. D'après la condition initiale, on a : $2 \qquad = 0$.

Réciproquement, toute les fonctions $g : x \mapsto \quad \sinh x$, avec $\in \mathbb{R}$, vérifient $\forall x, y, g(x+y) = g(x)e^y + g(y)e^{-x}$, et donc $\{(x, g(x)), x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ pour ?.

Retour à la Khôlle : Section 1.15.2.

2.45 Khôlle 45 : 2-recouvrement de groupe, Loi avant l'addition

Exercise 2.135 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.136 (Problème principal)**.** On doit montrer que $\forall x \in G, h \in H, xhx^{-1} \in H$. On fixe $g \in G$ tel que $H \cup gH = G$ et $H \cap gH = \emptyset$.

Si $x \in H$, alors on a évidement $xhx^{-1} \in H$ car H est un groupe. Sinon, il existe $h' \in H$ tel que $x = gh'$. On a alors :

$$xhx^{-1} = gh'hh'^{-1}g^{-1}$$

Or, si le dernier élément appartient à gH, alors il exite $h'' \in H$ tel que : $gh'hh'^{-1}g^{-1} = gh''$; d'où : $g = \left(h''\left(h'hh'^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} \in H$. Or cela est impossible car $g = g.e \in gH$ et $gH \cap H = \emptyset$. Ainsi, $gh'hh'^{-1}g^{-1} \in H$, et finalement H est distingué dans G.

Exercise 2.137 (Question subsidiaire)**.** On note cette nouvelle loi $\sim$. On veut calculer $x \sim y$ pour $x, y \in \mathbb{N}$. **Attention, $\sim$ n'est pas associative.** On considère que $((\ldots(x \sim x) \sim x) \ldots \sim x) \sim x = x + n$ où n est le nombre d'occurrences de x dans le membre de gauche.

Dès lors, $x \sim x = x+2$, puis $(x+2) \sim x = (x \sim x) \sim x = x+3$, et ainsi de suite : $(x+k) \sim x = x + (k+1)$ pour $k \geq 2$.

On connaît déjà beaucoup de valeurs de $x \sim y$, on peut conjecturer une formule générale, par exemple : $x \sim y = \max(x, y)+1$. Cela fonctionne : $((\ldots(x \sim x) \sim x) \ldots \sim x) \sim x = x + n$ est bien vérifié. La loi ainsi définie est commutative mais pas associative (car $0 \sim (0 \sim 3) = 0 \sim 4 = 5$ alors que $(0 \sim 0) \sim 3 = 2 \sim 3 = 4$). Il n'y a pas d'élément neutre.

On aurait pu faire d'autres choix pour une loi générale, par contre, elle n'aurait pas été associative, car sinon, on aurait pu écrire : $x = 1 \sim 1 \sim \ldots \sim 1$ avec $x - 1$ fois 1 ; puis $x \sim x = (1 \sim \ldots \sim 1) \sim (1 \sim \ldots \sim 1) = 1 + (x-1) + (x-1) \neq x+2$, en se débarrassant des parenthèse grâce à l'associativité.

Il ne peut pas non plus y avoir d'élément neutre (ni à droite, ni à gauche) car sinon $e \sim e = e$. Or on sait que $x \sim x = x + 2 \neq x$ pour tout x. (La recherche d'inverse est hors de propos.)

Reste la commutativité : peut-on définir des lois qui respectent $((\ldots(x \sim x) \sim x) \ldots \sim x) \sim x = x+n$ et qui ne soient pas commutatives ? Oui, on peut par exemple simplement prendre 0 pour toutes les valeurs de $x \sim y$ qui ne sont pas imposées par la règle (à savoir $(x+1) \sim x = 0$ et $x \sim y = 0$ pour $y < x$). Cela donne une opération qui "précède l'addition" et qui n'est pas commutative.

Retour à la Khôlle : Section 1.15.3.

2.46 Khôlle 46 : Théorème de Darboux

Exercise 2.138 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.139 (Problème principal)**.** Soit $x, y \in I$ (l'intervalle de définition de f) et $\lambda \in [f'(x), f'(y)]$ (on suppose $f'(x) < f'(y)$, l'inverse fonctionne aussi). On pose $g_\lambda : x \mapsto f(x) - \lambda x$. g_λ est dérivable (comme somme), et on a $g_\lambda' = f' - \lambda$. Donc $g_\lambda'(x) < 0$ et $g_\lambda'(y) > 0$. De fait, g_λ ne peut être injective car une fonction injective est strictement monotone (donc g_λ' aurait un signe fixe). Dès lors, il existe deux abscisses α, β telles que $g_\lambda(\alpha) = g_\lambda(\beta)$, donc on peut appliquer le théorème de Rolle et on obtient que g_λ' s'annule, disons en γ. Alors : $f'(\gamma) = \lambda$. Ainsi, on a montré que $E = \{f'(x), x \in I\}$ est un intervalle car E respecte la propriété suivante : $\forall a, b \in E, \forall c \in [a, b], c \in E$.

On peut appliquer directement la même méthode pour résoudre l'exercice. On veut montrer que f ne peut pas être injective. Si c'est le cas, on pourra appliquer le théorème de Rolle et montrer que f s'annule. On va raisonner par l'absurde et supposer que f est injective. Or si f est injective, comme elle est dérivable, sa dérivée est de signe constant, disons positif c'est-à-dire f croissante. Alors, $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$ d'après l'énoncé, donc $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$. Or, comme f est croissante, on a en plus $f(a) \leq f(b)$, d'où $0 \leq f(a) \leq f(b) \leq 0$, et les inégalités sont des égalités : $f(a) = f(b) = 0$, et on a une contradiction car on a supposé f injective. Finalement, f ne peut être injective, donc on peut appliquer le théorème de Rolle et trouver un point d'annulation pour f'.

Exercise 2.140 (Question subsidiaire)**.** On remarque premièrement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2}+3\right) = f(f \circ f(x))) = f \circ f(f(x)) = \frac{f(x)}{2}+3$$

On peut dériver cette égalité pour obtenir : $\forall x \in \mathbb{R}, f'\left(\frac{x}{2}+3\right) = f'(x)$. Soit maintenant $(u_n^{(x)})_n$ la suite définie par $u_0^{(x)} = x$ et $u_{n+1}^{(x)} = \frac{1}{2}u_n^{(x)} + 3$. La suite est arithmético-géométrique et converge vers $6 \left(= \frac{b}{1-a} = \frac{3}{1-1/2}\right)$.

Finalement, par continuité de f', on a : $f'(u_n^{(x)}) \to f'(6)$ quand $n \to +\infty$. Mais on sait que $\left(f'(u_n^{(x)})\right)_n$ est une suite constante, donc on en déduit $f'(x) = f'(u_0^{(x)}) = f'(6)$. Ainsi, on a montré que f' est constante ! f est donc une fonction affine : $f(x) = \lambda x + \mu$.

Réciproquement, si $f(x) = \lambda x + \mu$, alors f est solution au problème si :

$$\forall x, \left(\lambda^2 - 1/2\right)x + \lambda\mu + \mu - 3 = 0$$

Cela nous donne les deux seules solutions au problème :

$$\begin{aligned} f_1 &: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2-\sqrt{2}) \\ f_2 &: x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Retour à la Khôlle : Section 1.16.1.

2.47 Khôlle 47 : Dénombrement via Leibniz

Exercise 2.141 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.142 (Problème principal)**.** On applique la formule de Leibniz :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{n!}{(n-k+j)!} x^{n-k+j} (-1)^j \frac{n!}{(n-j)!}(1-x)^{n-j}$$

On peut l'utiliser pour $k = n$, et on obtient :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \frac{n!}{j!} \frac{n!}{(n-j)!} x^j (1-x)^{n-j} \\ &= n! \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}^2 x^j (1-x)^{n-j} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut regarder le développement en somme de $x^n(1-x)^n$, qui est un polynôme. On constate qu'il n'y a qu'un seul terme d'ordre $2n$, le terme dominant, et son coefficient est $(-1)^n$. De fait, dans $f^{(n)}$, le terme d'ordre n est obtenu en dérivant n fois le terme d'ordre $2n$ de f, son coefficient est donc $(-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{(2n-n)!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$. D'autre part, dans le membre de droite au-dessus, le terme d'ordre n vaut : $n! \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j}^2 \cdot (-1)^{n-j}$. D'où : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercise 2.143 (Question subsidiaire)**.** On prendra $a > 0$ pour raisonner et faire des dessins (si $a < 0$, on peut regarder $x \mapsto f(-x)$).

L'équation de la tangente en x_0 à la courbe de f est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Elle passe ainsi en $(0;0)$ si et seulement si $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$. **Faire un dessin !** On pose la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. D'après les conditions $f(0) = f'(0) = 0$, g est continue en 0.

Ainsi, g est continue sur $[0;a]$ et dérivable sur $]0;a[$ avec $g(0) = 0 = g(a)$. On applique le théorème de Rolle pour trouver x_0 en lequel $g'(x_0) = 0$. Comme $x_0 \neq 0$, une simple dérivation donne l'égalité recherchée : $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$.

Retour à la Khôlle : Section 1.16.2.

2.48 Khôlle 48 : Accroissements finis d'ordre supérieur

Exercise 2.144 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.145 (Problème principal)**.** Si $a \in \{x_k\}$, c'est évident (0 des deux côtés). Sinon, on pose $A = \frac{f(a)}{\prod_k (a - x_k)}$ et $\varphi : x \mapsto f(x) - A\prod_k (x - x_k)$. La fonction φ est n fois dérivable et s'annule en $n+1$ points distincts. Par le théorème de Rolle (appliqué sur les n différents intervalles), φ' est dérivable $n-1$ fois et s'annule n fois. De le même manière φ'' est dérivable $n-2$ fois et s'annule $n-1$ fois. En poursuivant, on montre par récursion que $\varphi^{(n)}$ a au moins un zéro, disons $\xi \in]x_1; x_n[$. On a (la dérivée n-ième de $x \mapsto \prod_k (x - x_k)$ est $x \mapsto n!$) :

$$\varphi^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - n!A = f^{(n)}(\xi) - n!\frac{f(a)}{\prod_{k=1}^n (a - x_k)} = 0$$

$$f(a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{k=1}^n (a - x_k)$$

Exercise 2.146 (Question subsidiaire)**.** f' étant continue, elle est bornée sur $[a;b]$, on peut donc poser $M = \sup_x f'(x)$. On construit g la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que f en a et en b : $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)$. Enfin, soit $h = f - g$. On remarque que $h(a) = h(b) = 0$. En outre, h est continue et dérivable sur $[a;b]$ avec $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Supposons que $M = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, alors $h'(x) = f'(x) - M \leq 0$: h est décroissante. Sauf que $h(a) = h(b) = 0$. De fait, h est constante et même nulle. Finalement, $f = g$, f est affine.

Retour à la Khôlle : Section 1.16.3.

2.49 Khôlle 49 : Méthode d'Euler (mi-point, ordre 2)

Exercise 2.147 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.148 (Problème principal)**.** On a :

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + o(h^2)$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + o(h^2)$$

Donc :

$$f(x-h) + f(x+h) = 2f(x) + h^2 f''(x)$$

Ainsi : $\frac{1}{h^2}\left(f(x-h) + f(x+h) - 2f(x)\right) \to f''(x)$ quand $h \to 0$.

En particulier, si on prend une équation différentielle du second ordre, on peut l'écrire de la forme (E) : $y''(x) = F(x; y(x); y'(x))$. Imaginons qu'on connaît la valeur d'une solution f en x_0 (soit qu'elle soit donnée par les conditions de Cauchy, soit qu'on ait calculé une approximation de la solution jusqu'en x_0), on souhaite alors déterminer une valeur approchée de la solution en $x_0 + h$ pour un pas h fixé à l'avance (h très petit). Si on connaît $f(x_0 - h)$ et $f'(x_0)$, pas de problème :

$$f(x_0 + h) \simeq 2f(x_0) + h^2 F(x_0; f(x_0); f'(x_0)) - f(x_0 - h)$$

Maintenant, l'idée est la suivante :

- On part de F et d'une condition initiale $(x_0; f(x_0); f'(x_0))$.
- On pose $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0)$ et $f'(x_0 + h) = f'(x_0)$ (méthode d'Euler)
- On pose $f(x_0 + 2h) = 2f(x_0 + h) + h^2 F\left[x_0 + h; f(x_0 + h); f'(x_0 + h)\right] - f(x_0)$ puis $f'(x + 2h) = \frac{1}{h}\left[f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h)\right]$
- On continue $f(x_0 + (k+1)h) = 2f(x_0 + kh) + h^2 F\left[x_0 + kh; f(x_0 + h); f'(x_0 + kh)\right] - f(x_0 + (k-1)h)$ puis $f'(x + (k+1)h) = \frac{1}{h}\left[(f(x_0 + (k+1)h) - f(x_0 + kh)\right]$

La valeur de $f(x_0 + kh)$ est de plus en plus éloignée de la solution véritable, mais l'erreur diminue quand on diminue h.

Dans la pratique, cette méthode (et surtout ses variantes) est légèrement meilleure que la méthode d'Euler mais assez peu utilisée car on dispose aujourd'hui des méthodes de Runge-Kutta.

Exercise 2.149 (Question subsidiaire)**.** f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus [0; 1]$. Elle est aussi définie et continue en 0 et de limite $+\infty$ en 1^+.

Calculons le taux de variation en 0^- :

$$\tau_0^-(h) = \frac{f(-h) - f(0)}{-h - 0} = -\frac{1}{h}\left(\sqrt{\frac{(-h)^3}{-h-1}} - 0\right) = -\sqrt{\frac{h}{h+1}} \to 0$$

f est bien dérivable sur son ensemble de définition. On peut calculer sa dérivée, le plus simple est de la calculer en logarithmique :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{2x-3}{2x(x-1)}$$

Comme $f(x)$ est toujours positif, on obtient le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	//////		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	//////	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Retour à la Khôlle : Section 1.17.1.

2.50 Khôlle 50 : Développement d'un raccord de fonctions

Exercise 2.150 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.151 (Problème principal)**.** On écrit le développement en 0^+ de f : pour $x > 0$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k)!} + o(x^n)$, donc f est prolongeable en 0^+ en une fonction C^∞.

De la même manière, pour $x < 0$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k)!} + o(x^n)$, donc f est prolongeable en 0^- en une fonction C^∞.

Finalement, comme les prolongements ont le même développement limité en 0^- et en 0^+, la fonction est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ en entier, avec pour développement limité en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k)!} + o(x^n)$.

Exercise 2.152 (Question subsidiaire)**.** Si $u_1 < u_0$, alors, du fait de la croissance de f, on démontre par récurrence que $(u_n)_n$ est décroissante positive donc convergente, disons vers ℓ ; et par continuité de f, on a $f(\ell) = \ell$.

Si $u_1 > u_0$, alors $(u_n)_n$ est croissante. On va montrer qu'elle est convergente car majorée. Supposons qu'elle ne soit pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$. Mais alors, à partir d'un certain rang, $\frac{f(u_n)}{u_n} \leqslant k + \varepsilon$ avec $k + \varepsilon < 1$. Mais dans ce cas, $u_{n+1} < (k+\varepsilon)u_n < u_n$, ce qui contredit la croissance. Finalement, $(u_n)_n$ est bornée et donc convergente (vers un point fixe de f).

Dans tous les cas, $(u_n)_n$ converge. On vient au passage de montrer que f a un point fixe.

Retour à la Khôlle : Section 1.17.2.

2.51 Khôlle 51 : Suite récurrence issue d'un développement limité

Exercise 2.153 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.154 (Problème principal)**.** Les équivalences $f(x)$ x et $f(x)$ x ax prouvent qu'il existe un voisinage de 0^+ tel que $\forall x \in]0;]; 0 < f(x) < x$. Donc $[0;]$ est stable par f : si $u_0 \in [0;]$, alors $\forall n; u_n \in [0;]$, et $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$. Ainsi, u_n est décroissante et minorée par 0, donc elle converge, disons vers ℓ. Alors, comme f est continue, on a $f(\ell) = \ell$, mais si $\ell \neq 0$, comme (par passage à la limite) $\ell \in [0;]$, on a $f(\ell) < \ell$, ce qui est une contradiction. Ainsi, $\ell = 0$.

Ensuite, on a :

$$
\begin{aligned}
x_n &= (u_n \quad au_n + o(u_n)) \quad u_n \\
&= u_n \quad 1 \quad au_n \; ^1 + o \; u_n \; ^1 \qquad 1 \\
& \quad a \; u_n \quad ^1
\end{aligned}
$$

Pour $=$ 1, on a $x_n \to a(\quad 1)$. Or, comme $u_n \to 0$:

$$
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_{n+1} \quad u_n \qquad \frac{1}{n} u_n
$$

D'après le théorème de Césaro, pour $=$ 1 : $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_n \to a(\quad 1)$. Donc :

$$
nu_n \; ^1 \qquad \frac{1}{a(\quad 1)} \text{ et enfin } u_n \qquad \frac{1}{na(\quad 1)}^{\frac{1}{\ \ 1}}
$$

Exercise 2.155 (Question subsidiaire)**.** On a :

$$
\sin x = x \quad \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)
$$

En outre : $\forall x > 0; \sin x < x$, donc $\forall x \in]0; [; 0 < \sin x < x$.

De fait, si $u_0 \in [0;]$ et $u_{n+1} = \sin u_n$, alors $u_n \to 0$ avec $u_n \quad \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Retour à la Khôlle : Section 1.17.3.

2.52 Khôlle 52 : Règle de Worthington

Exercise 2.156 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.157 (Problème principal)**.** L'application tan est impaire, C^1 et bijective de $\frac{}{2}; \frac{}{2} \to \mathbb{R}$. En particulier tan ^{1} est impaire et C^1, donc admet un développement à l'ordre 6 de la forme $\tan^{1} x = ax + bx^3 + cx^5 + O(x^7)$.

Or on sait que :

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)$$

On peut regarder ou bien $\tan^{-1} \circ \tan x = x$ ou bien $\tan \circ \tan^{-1} x = x$. La première équation est plus aisée. On obtient en substituant :

$$\begin{aligned}
x &= a\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right) + b\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right)^3 + c\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right)^5 + O(x^7) \\
&= ax + \left(\frac{a}{3} + b\right)x^3 + \left(\frac{2a}{15} + 3\frac{b}{3} + c\right)x^5 + O(x^7)
\end{aligned}$$

On peut alors résoudre le système (l'identification se justifie par l'unicité du développement limité) :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ \frac{a}{3} + b & = 0 \\ \frac{2a}{15} + b + c & = 0 \end{cases}$$

D'où : $a = +1$, $b = -\frac{1}{3}$ et $c = +\frac{1}{5}$. En fait, $\tan^{-1}$ admet un développement limité à n'importe quel ordre : $\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$.

On remarque que la fonction f est aussi impaire et C^∞. Pour en avoir un développement limité à l'ordre 6, il faut calculer un développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ à l'ordre 5. On a :

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+h} &= 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 - h^5 + O(h^6) \\
\frac{1}{1+2\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{3}\,\frac{1}{1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^6)} \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{12}x^4\right) + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{12}x^4\right)^2\right) + O(x^6) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{9}\right)x^4\right) + O(x^6) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{36}x^4\right) + O(x^6)
\end{aligned}$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{36}x^5 + O(x^7)$$

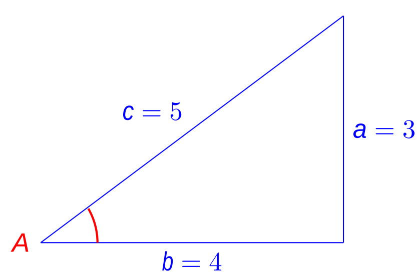
Ainsi, on constate que $f(x)$ est une approximation raisonnablement précise de $\tan^{-1} x$ pour x petit. Notamment, leurs développements concordent à l'ordre

4 et on a $\frac{1}{5} = \frac{7}{35} \simeq \frac{7}{36}$ avec $\frac{7}{36} \leq \frac{1}{5}$. De fait : $f(x) \leq \tan^{-1} x$ avec $f(x) \approx \tan^{-1} x$ pour x suffisamment petit. En poussant le développement de f plus loin, on se rend compte que les coefficient ne s'éloignent de ceux $\tan^{-1}$ que très lentement, ce qui donne un très très bonne approximation, même pour des x assez grands.

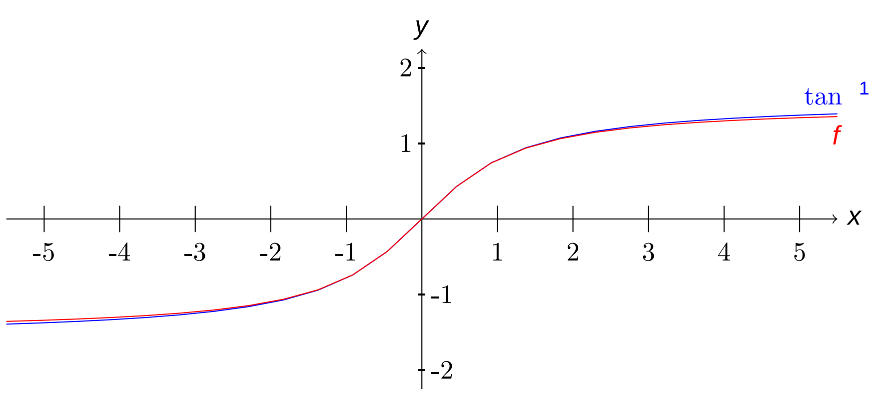
Dans un triangle rectangle, on a : $\tan A = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{a}{b}$. Comme A est le plus petit des trois angle, sa tangente est la plus petite des trois (tan est croissante), donc $\frac{a}{b}$ peut être considéré raisonnablement petit (on peut toujours choisir l'angle de sorte que $\frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} \leq 1$). Dès lors :

$$A = \tan^{-1}\frac{a}{b} \approx \frac{3a/b}{1 + 2\sqrt{1 + (a/b)^2}} = \frac{3a}{b + 2c}$$

On a l'avantage d'avoir une forme très facile à calculer à la main (même pas de carrés à calculer) qui donne une bonne approximation des trois angles. Sur la figure ci-dessous, l'angle A vaut $\tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 0.6435$ et on a $\frac{3a}{b+2c} = \frac{3 \cdot 3}{4+2 \cdot 5} = \frac{9}{14} \approx 0.6429$ alors qu'on a pris (volontairement) un triangle avec $\frac{a}{b}$ très grand.



Regardons à quel point $\tan^{-1}$ est bien approximé par f :



Exercise 2.158 (Question subsidiaire)**.** La fonction $f : x \mapsto e^x + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et son image est $[1; +\infty[$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(u_n) = n$, i.e. $e^{u_n} + u_n - n = 0$.

On remarque que $e^{u_n}+u_n \quad e^{2u_n}$ car $u_n \quad 0$, donc $n \quad e^{2u_n}$ puis $u_n \quad \ln n=2$. De fait : $u_n \; ! \; +1$ quand $n \; ! \; +1$.

Dès lors, $u_n = o(e^{u_n})$, d'où $n = e^{u_n} + o(e^{u_n})$. Dès lors, $\frac{n}{e^{u_n}} = 1 + o(1)$. On passe au logarithme :

$$\ln \frac{n}{e^{u_n}} = \ln(1 + o(1)) = 0 + o(1)$$

Il s'ensuit : $\ln e^{u_n} = \ln n + o(1)$, soit $u_n \quad \ln n$.

Ensuite, on a (car $v_n = o(1)$) :

$$n = ne^{v_n} + \ln n + v_n$$

$$n(e^{v_n} \quad 1) = \quad \ln n \quad v_n \qquad \ln n$$

Finalement, en remplaçant et en utilisant $e^x \quad 1 \quad x$:

$$v_n \quad e^{v_n} \quad 1 \qquad \frac{\ln n}{n}$$

$$u_n = \ln n \quad \frac{\ln n}{n} + o \quad \frac{\ln n}{n}$$

Retour à la Khôlle : Section 1.18.1.

2.53 Khôlle 53 : Approximant de Padé, Combinatoire

Exercise 2.159 (Question de cours)**. Cf cours !**

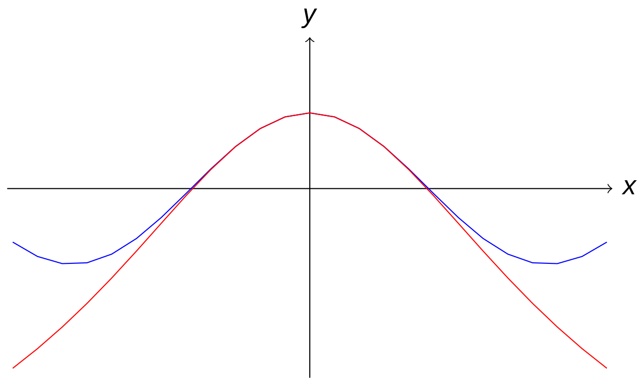
Exercise 2.160 (Problème principal)**.** On peut développer $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$:

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a \quad b)x^2 + b(b \quad a)x^4 + b^2(a \quad b)x^6 + o(x^7)$$

Par unicité du développement limité, on obtient que si on veut que la partie principale est du plus grand degré possible, il faut d'abord que $a \quad b = \quad \frac{1}{2}$ et $b(b \quad a) = \frac{1}{24}$, donc :

$$a = \quad \frac{5}{12} \text{ et } b = \frac{1}{12}$$

On obtient alors : $\cos x \quad \frac{1+ax^2}{1+bx^2} \quad \frac{1}{480}x^6$, et il est impossible de faire mieux.



Exercise 2.161 (Question subsidiaire)**.** On effectue une séparation en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1+x}$$

Donc, comme on connaît le développement de chacun des fractions (le développement de $\frac{1}{(1-x)^2}$ s'obtient en dérivant celui de $\frac{1}{1-x}$), on obtient pour tout n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3+(-1)^k}{4} x^k + o(x^n)$$

D'autre part, on constate que $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$, donc on a aussi :

$$f(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} x^{2j}\right) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+2j=k} 1\right) x^k + o(x^n)$$

Finalement, en identifiant les coefficients, on trouve qu'il y a $\frac{1}{4}(2k+3+(-1)^k)$ manières d'écrire k sous la forme $k = p + 2q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Retour à la Khôlle : Section 1.18.2.

2.54 Khôlle 54 : Équation différentielle

Exercise 2.162 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.163 (Problème principal)**.** Notons $y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$. Puis :

$$2xy''(x) = \sum_{k=2}^{n+1} 2k(k-1)a_k x^{k-1} + o(x^n)$$

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{n+1} k a_k x^{k-1} + o(x^n)$$

$$x^2 y(x) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k x^{k+2} + o(x^n)$$

En sommant, (E) induit :

$$a_1 + 2a_2 x + \sum_{k=2}^{n} ((k+1)(2k-1)a_{k+1} + a_{k-2})\, x^k = o(x^n)$$

Par unicité du développement limité, on trouve : $a_1 = a_2 = 0$ et $\forall k \geq 2, a_{k+1} = -\frac{1}{(k+1)(2k-1)} a_{k-2}$. Cela nous donne pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{3p+1} = a_{3p+2} = 0$ et $a_{3p} = \frac{(-1)^p 2^p}{9^p (2p)!} a_0$.

On peut constater que toutes les fonction $x \mapsto \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right)$ sont solutions sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto A \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right)$. On a très envie de poser le changement de variables $t = \frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}$ et $y(x) = z\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right)$, on obtient que $z'' + z = 0$ et donc sur $\mathbb{R}_+$:

$$y(x) = \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right)$$

Puis sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$y(x) = A \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) + B \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right)$$

Pour résoudre le problème de raccordement sur $\mathbb{R}$, on se rend compte grâce au développement limité qu'il faut et qu'il suffit que $\lambda = A$ et $\mu = B = 0$.

Exercise 2.164 (Question subsidiaire)**.** On pose la fonction $f : x \mapsto xe^x$. W en est la réciproque sur $[-1/e, +\infty[$, à valeur dans $[-1, +\infty[$. En particulier, on a la dérivabilité de W comme réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée vaut $f'(x) = (1+x)e^x \neq 0$ pour $x > -1/e$. Ainsi, on a :

$$W'(x) = \frac{1}{(1+W(x))e^{W(x)}} = \frac{1}{x + e^{W(x)}}$$

Or on a $W(0) = 0$ car 0 est l'unique solution de $0 = we^w$ d'inconnue w. Donc $W'(0) = 1$, et $W(w) \sim_0 x$. Pour aller plus loin, on peut remarquer que, pour $x \neq 0$, $W(x) \neq 0$ (déjà parce que W est croissante comme réciproque d'une fonction croissante, et aussi parce que W est injective et qu'on a déjà trouvé la pré-image de 0), donc on peut écrire que $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$ pour $x \neq 0$, ce qui induit :

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$$

Cela donne l'équation différentielle dont W est solution : $x(1+y)y' = y$. Il est maintenant bien plus facile d'extraire les coefficients du développement de Taylor de W.

Retour à la Khôlle : Section 1.18.3.

2.55 Khôlle 55 : Matrices vampires

Exercise 2.165 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.166 (Problème principal)**.**

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix}$$

On s'amuse comme on peut...

(Pour ceux qui connaissent la théorie du polynôme caractéristique (vue en Spé), on est simplement en train de dire que $(M) = X^2 - 11X + 0$, donc que $M^2 = 11M$. Or $11x = \overline{xx}$. On pourrait procéder de même avec des entrées de M à deux chiffres et $M^2 = 101M$.)

On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

Regardons la première entrée :

$$a^2+bc = a^2+ad = a(a+d) = 11a$$

De même :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+ad & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} = 11M$$

Réciproquement, soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $M^2 = 11M$. On note $\Delta = ad - bc$ et $t = a+d$. On veut prouver que $\Delta = 0$ et que $= 11$. Un rapide calcul donne que $bc = \Delta - ad$, puis :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \Delta & b \\ c & d - \Delta \end{pmatrix}$$

Finalement, identifier les coefficients donne $\Delta = 0$ et $= 11$.

Si on veut trouver une matrice $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{ab} & \overline{cd} \\ \overline{ef} & \overline{gh} \end{pmatrix}$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} \overline{abab} & \overline{cdcd} \\ \overline{efef} & \overline{ghgh} \end{pmatrix}$, il faut et il suffit que $\Delta = xt - zy = 0$ et que $= x + t = 101$. Par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 66 & 55 \\ 42 & 35 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6666 & 5555 \\ 4242 & 3535 \end{pmatrix}$$

Exercise 2.167 (Question subsidiaire)**.** On peut raisonner par récurrence sur le degré maximal des polynômes dans F. Supposons que E_F est in intervalle pour toute famille F telle que $\forall P \in F,\ \deg P \leq n$ (n fixé).

Soit F une famille telle que $\forall P \in F,\ \deg P \leq n+1$. On pose $G \subset F$ la sous-famille des polynômes de degré exactement $n+1$. Par hypothèse de récurrence,

$E_{F\setminus G}$ est un intervalle. Soient $x,y \in E_{F\setminus G}$ ($x \neq y$). Soit $z \in]x,y[$ et $P \in G$. Si $P(z)$ n'est pas du signe de ε_P (qui est le signe de $P(x)$ et de $P(y)$), alors P n'est pas monotone sur $[x,y]$: **faire un dessin**. Dès lors, en dérivant, P' n'est pas de signe constant sur $[x,y]$. Cependant, $P' \in F\setminus G$ car la famille est stable par dérivation, mais comme $[x,y] \subset E_{F\setminus G}$ qui est un intervalle, P' ne change pas de signe sur $[x,y]$. Cette contradiction montre que $E_P \cap E_{F\setminus G}$ est un intervalle, et on a :

$$E_F = \bigcap_{P \in G} E_{\{P\}\cup(F\setminus G)} = \bigcap_{P \in G} E_P \cap E_{F\setminus G}$$

Finalement, E_F est bien un intervalle.

Par récurrence, pour toute famille F (même infinie) de polynômes, et tout ensemble de signes $(\varepsilon_P)_{P\in F}$, l'ensemble E_F est un intervalle.

Retour à la Khôlle : Section 1.19.1.

2.56 Khôlle 56 : Relation de mutation des algèbres amassées

Exercise 2.168 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.169 (Problème principal)**.** On doit commencer par montrer que $b'_{ji} = -b'_{ij}$ pour tout $1 \leq i,j \leq n$. Or, comme $k \leq n$, les seuls coefficients utilisés dans la mutation qui permet de calculer b'_{ij} sont des coefficients des n premières lignes, donc inverser les rôles de i et j transforme chaque $b_{\cdot\cdot}$ en $-b_{\cdot\cdot}$ et échange les cas, ce qui donne bien l'antisymétrie voulue. Exemple dans le où cas $b_{ik} < 0$ et $b_{kj} < 0$, alors $b_{ki} > 0$ et $b_{jk} > 0$, et on a :

$$b'_{ji} = b_{ji} + b_{jk}b_{ki} = -b_{ij} + (-b_{kj})(-b_{ik}) = -(b_{ij} + b_{kj}b_{ik}) = -b_{ij}$$

Ensuite, notons b''_{ij} les coefficients de $\mu_k(\mu_k(B))$. Si $i = k$ ou $j = k$, c'est évident : $b''_{ij} = -b'_{ij} = b_{ij}$. Mais dès lors, si $b_{ki} > 0$ et $b_{jk} > 0$, alors $b'_{ki} < 0$ et $b'_{jk} < 0$ et on a :

$$b''_{ij} = b'_{ij} - b'_{ik}b'_{kj} = (b_{ij} + b_{ik}b_{kj}) - b_{ik}b_{kj} = b_{ij}$$

Par antisymétrie, on traite ainsi le cas $b_{ki} < 0$ et $b_{jk} < 0$.

Enfin, si $k \neq l$ et $b_{kl} = b_{lk} = 0$, alors montrons que $\mu_k(\mu_l(B)) = \mu_l(\mu_k(B))$. Notons b^{lk}_{ij} et b^{kl}_{ij} leurs coefficients respectifs, et b^k_{ij} et b^l_{ij} les coefficients intermédiaires. Si i ou j est dans $\{k,l\}$, alors c'est évident (il suffit de l'écrire). Sinon, on remarque que : $b^k_{il} = b_{il} + 0$; $b^k_{lj} = b_{jl} + 0$ et $b^l_{ik} = b_{ik} + 0$; $b^l_{kj} = b_{kj} + 0$, donc on peut tester indépendamment b_{ik} et b_{kj} puis b_{il} et b_{lj} ou dans l'ordre inverse.

Par exemple, si $b_{ki} > 0$; $b_{jk} > 0$ et $b_{li} < 0$ et $b_{jl} < 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}
b_{ij}^{k} &= b_{ij} + b_{ik}b_{kj} && \text{car } b_{ik} > 0;\ b_{kj} > 0\\
b_{ij}^{lk} &= b_{ij}^{k} - b_{il}^{k}b_{lj}^{k} && \text{car } b_{il}^{k} = b_{il} < 0;\ b_{lj}^{k} = b_{lj} < 0\\
&= (b_{ij} + b_{ik}b_{kj}) - b_{il}b_{lj}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{ij}^{l} &= b_{ij} - b_{il}b_{lj} && \text{car } b_{il} < 0;\ b_{lj} < 0\\
b_{ij}^{kl} &= b_{ij}^{l} + b_{ik}^{l}b_{kj}^{l} && \text{car } b_{ik}^{l} = b_{ik} > 0;\ b_{kj}^{l} = b_{kj} > 0\\
&= (b_{ij} - b_{il}b_{lj}) + b_{ik}b_{kj}
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien l'égalité $b_{ij}^{lk} = b_{ij}^{kl}$. Les autres cas fonctionnent pareillement et ainsi $\mu_k \mu_l = \mu_l \mu_k$ dans le cas où $b_{kl} = b_{lk} = 0$.

Exercise 2.170 (Question subsidiaire)**.** Supposons le membre de gauche vérifié, alors :

$$f(X) = \sum_i \sum_j \binom{j}{i} h_j X^i = \sum_j h_j \sum_i \binom{j}{i} X^i = \sum_j h_j (X+1)^j = h(X+1)$$

Réciproquement, si $f(X) = h(X+1)$, alors on a $f(X) = \sum_i \left(\sum_j \binom{j}{i} h_j\right) X^i$, donc en identifiant les coefficients, on retrouve l'égalité souhaitée.

Si on a l'égalité de gauche, alors on a $f(X) = h(X+1)$, donc $h(X) = f(X-1)$, puis en développant :

$$h(X) = \sum_i f_i (X-1)^i = \sum_i \sum_j (-1)^j \binom{i}{j} f_i (-X)^j = \sum_j \left(\sum_i (-1)^{i+j} \binom{i}{j} f_i \right) X^j$$

En identifiant les coefficients, on trouve que $\forall i, h_i = \sum_i (-1)^{i+j} \binom{i}{j} f_i$.

Retour à la Khôlle : Section 1.19.2.

2.57 Khôlle 57 : Forme intégrale et morphismes d'évaluation

Exercise 2.171 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.172 (Problème principal)**.** On pose $P(x) = p_2 x^2 + p_1 x + p_0$, on obtient $\int_0^1 P = \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{2}p_1 + p_0$. D'un autre côté : $\alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c) = (\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2)p_2 + (\alpha a + \beta b + \gamma c)p_1 + (\alpha + \beta + \gamma)p_0$. Ainsi, on a $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]; \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$ si et seulement si :

$$\begin{cases}
\alpha + \beta + \gamma &= 1\\
\alpha a + \beta b + \gamma c &= \frac{1}{2}\\
\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 &= \frac{1}{3}
\end{cases}$$

On a un système de 3 équations à 3 inconnues (qui sont , et), sa résolution, si on parvient à l'existence d'une solution, prouvera l'existence d'un triplet tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = P(a) + P(b) + P(c)$. Or ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} + + & = 1 \\ (b - a) + (c - a) & = 1/2 - a \\ (b^2 - a^2) + (c^2 - a^2) & = 1/3 - a^2 \end{cases}$$

Puis à :

$$\begin{cases} + + & = 1 \\ (b - a) + (c - a) & = 1/2 - a \\ (c - a)(c - b) & = 1/3 - 1/2(b + a) + ba \end{cases}$$

Ainsi, si a, b et c sont différents, alors on a une unique solution au système :

$$\begin{cases} = \frac{2+6bc-3c-3b}{6(a-b)(a-c)} \\ = \frac{2+6ca-3a-3c}{6(b-c)(b-a)} \\ = \frac{2+6ba-3a-3b}{6(c-b)(c-a)} \end{cases}$$

<u>N.B. :</u> Si $c = a$ (ou $b = c$ ou $a = b$), on se retrouve avec 2 équations pour 3 inconnues, donc on a une infinité de solutions, une infinité de candidats (;) valides pour $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = P(a) + P(b)$, dont on a l'expression explicite.

Exercise 2.173 (Question subsidiaire)**.** Les polynômes de la forme $P = X^n$ avec $\in \mathbb{U}$ sont des solutions évidentes au problème. On va montrer que ce sont les seules.

Soit S l'ensemble des polynômes qui vérifient $P(\mathbb{U}) \quad \mathbb{U}$. S est stable par composition car c'est un sous-ensemble des applications de $\mathbb{U}$ sur lui-même. Il est aussi stable par multiplication des polynômes.

Si on suppose que tous les éléments de S s'annulent en 0, alors on peut raisonner par récurrence. Soit $P \in S$ de degré non nul, alors P s'annule en 0 par hypothèse. Soit Q tel que $P = XQ$. Soit $\in \mathbb{U}$, alors $Q( ) = P( )/ \in \mathbb{U}$, donc $Q \in S$ avec $\deg Q = \deg P - 1$. Il suffit maintenant de trouver les polynômes constants de S. Il est évident que si $P \in S$ est constant, alors cette constante est un de $\mathbb{U}$. Ainsi, si tous les polynômes non constants de S s'annulent en 0, alors :

$$S = \{ X^n; \in \mathbb{U}; n \in \mathbb{N}\}$$

Montrons maintenant que tous les polynômes non constants de S s'annulent en 0. Soit $P \in S$ de degré n. On pose $Q = X^n P(X)\overline{P}(\frac{1}{X})$. Contrairement à ce qu'il semble, Q est un polynôme (le X^n contrebalance le $\overline{P}(\frac{1}{X})$). Or si $z \in \mathbb{U}$, on a : $\overline{P}(\frac{1}{z}) = \overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$, donc $P(z)\overline{P}(\frac{1}{z}) = P(z)\overline{P(z)} = |P(z)|^2 = 1$ car $P(z) \in \mathbb{U}$. Finalement, $Q(z) = z^n \quad 1$, et Q coïncide avec X^n sur $\mathbb{U}$. De fait (comme $\mathbb{U}$ est infini), $Q = X^n$ sur $\mathbb{C}$, et on a $\forall z \in \mathbb{C}, P(z)\overline{P}(\frac{1}{z}) = 1$. On va utiliser cette égalité sur $\mathbb{R}$. Comme P est continue et diverge en $+\infty$, en faisant tendre $z \to 0$ (dans $\mathbb{R}$), on obtient que $P(0) = 0$ (sans quoi on aurait $\infty \; P(0) = 1$). On a bien montré ce qu'on voulait.

Si $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$, on a en particulier l'inclusion, donc $P \in S$. Or toutes les fonctions **non constantes** de S sont bijectives sur $\mathbb{U}$, donc :

$$P(\mathbb{U}) = \mathbb{U} \iff \exists \lambda \in \mathbb{U}, n \in \mathbb{N}^*, P = \lambda X^n$$

Retour à la Khôlle : Section 1.19.3.

2.58 Khôlle 58 : Croisements de Ghys

Exercise 2.174 (Question de cours)**.** **Cf cours !**

Exercise 2.175 (Problème principal)**.** On trouvera la solution ici.

Exercise 2.176 (Question subsidiaire)**.** D'après le théorème d'Alembert-Gauss, on peut écrire $P = Z^4 - 21Z + 8 = (Z - z_1)(Z - z_2)(Z - z_3)(Z - z_4)$. La condition de l'énoncé donne, disons, $z_1 = \frac{1}{z_2}$. Il en découle que $(Z - z_1)(Z - z_2) = Z^2 + aZ + 1$ pour un certain $a \in \mathbb{C}$. Dès lors, $z_3 z_4 = 8$ car $z_1 z_2 z_3 z_4 = 8$ (le terme constant). D'où $(Z - z_3)(Z - z_4) = Z^2 + bZ + 8$ pour un certain $b \in \mathbb{C}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} Z^4 - 21Z + 8 &= (Z^2 + aZ + 1)(Z^2 + bZ + 8) \\ &= Z^4 + (a+b)Z^3 + (9 + ab)Z^2 + (8a + b)Z + 8 \end{aligned}$$

Identifions les coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a + b & = 0 \\ 9 + ab & = 0 \\ 8a + b & = -21 \end{array} \right.$$

Finalement, on trouve $a = -3$ et $b = 3$ (d'ailleurs, l'existence de solutions à ce système prouve que notre polynôme a bien deux racines inverses l'une de l'autre).

Reste à factoriser $Z^2 - 3Z + 1$ et $Z^2 + 3 + 8$. Avec la méthode du discriminant, on trouve :

$$P = \left(Z - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(Z - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(Z - \frac{-3 - i\sqrt{23}}{2}\right)\left(Z - \frac{-3 + i\sqrt{23}}{2}\right)$$

L'écriture ci-dessus constitue la factorisation sur $\mathbb{C}$ de $Z^4 - 21Z + 8$, celle sur $\mathbb{R}$ étant donnée par :

$$P = \left(Z - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(Z - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(Z^2 + 3Z + 8\right)$$

Retour à la Khôlle : Section 1.20.1.

2.59 Khôlle 59 : Système complexe et fonctions élémentaires

Exercise 2.177 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.178 (Problème principal)**.** On va résoudre le système plus général :

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ xyz=b \\ |x|=|y|=|z| \end{cases}$$

Avec $a\in\mathbb{C}$ et $b\in\mathbb{C}$.

Commençons par remarquer que la deuxième ligne donne $|xyz|=|b|$, d'après la troisième ligne, on obtient $|x|^3=|b|$. On note $d=\sqrt[3]{|b|}$ pour plus de commodité, et on a : $|x|=|y|=|z|=d$. On cherche à exprimer $xy+yz+zx$ afin d'avoir toutes les fonctions symétriques élémentaires et de pouvoir dire de quel polynôme (de degré 3) x, y et z sont les racines.

On a : $xy+yz+zx=xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$. On peut noter $x=d\alpha$, $y=d\beta$ et $z=d\gamma$ avec $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{U}$. On obtient :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{d}\left(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)=\frac{1}{d^2}(\overline{x+y+z})=\frac{\overline{a}}{d^2}$$

Finalement, on trouve : $xy+yz+zx=\frac{\overline{a}b}{d^2}$, et x, y et z sont les 3 racines de $X^3-aX^2+\frac{\overline{a}b}{d^2}X-b$. Il est possible de résoudre cette équation en toute généralité, cependant, on se limitera à $a=b=1$. Dans ce cas, on cherche les racines de : $P=X^3-X^2+X-1$.

1 est racine évidente de P. On en déduit la factorisation : $P=(X-1)(X^2+1)$. Finalement : $\{x,y,z\}=\{1,i,-i\}$ (on prendra le temps de vérifier que cette solution fonctionne).

Exercise 2.179 (Question subsidiaire)**.** On peut supposer P unitaire sans perte de généralité (cela ne modifie en rien les racines).

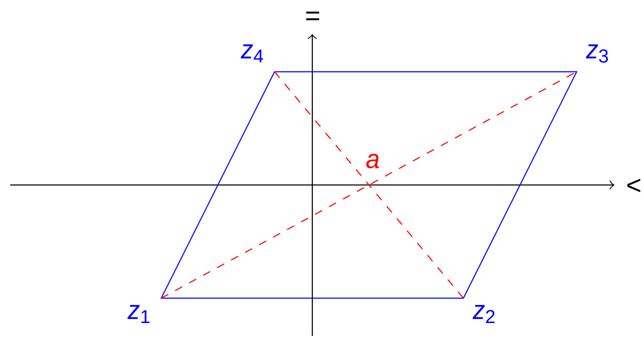
Si les racines z_1, z_2, z_3 et z_4 de P forment un parallélogramme, considérons a, le centre de celui-ci. Posons $Q=P(X+a)$. Via les symétries du parallélogramme, on a, disons, $z_3=2a-z_1$ et $z_4=2a-z_2$. Dès lors, $Q(-a+z_1)=Q(a-z_1)=Q(-a+z_2)=Q(a-z_2)=0$. Donc :

$$Q=(X-a+z_1)(X-z_1+a)(X-a+z_2)(X-z_2+a)$$

En multipliant deux à deux les parenthèses, on se rend compte que Q est bicarré, donc $P=(X-a)^4+\lambda(X-a)^2+\mu$. Il s'ensuit que $P'=4(X-a)^3+2\lambda(X-a)$ et $P'''=24(X-a)$. a est bien une racine commune de ces deux polynômes.

Réciproquement, si a est une racine commune de P' et P''' (avec P un polynôme unitaire), alors on peut commencer par écrire $P'''=24(X-a)$. En intégrant deux fois, on a $P'=4(X-a)^3+2\lambda(X-a)+\mu$ pour quelque λ et μ. Ensuite, comme $P'(a)=0$ par hypothèse, on a $\mu=0$. Puis $P=(X-a)^4+$

$(X \quad a)^2 + \quad$ pour un certain $\quad$. Le polynôme $Q = P(X + a)$ est bien bicarré : ses racines sont deux à deux opposées, disons que qu'il s'agit de $z_1 \quad a$, $a \quad z_1$, $z_2 \quad a$ et $a \quad z_2$. Elles forment bien un parallélogramme car on a l'identité : $(z_1 \quad a) \quad (z_2 \quad a) = (a \quad z_2) \quad (a \quad z_1)$ (le fameux $\vec{AB} = \vec{DC}$ de 2nde).



Retour à la Khôlle : Section 1.20.2.

2.60 Khôlle 60 : Irrationalité des sinus d'angle septième

Exercise 2.180 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.181 (Problème principal)**.** Comme $\sin \frac{k}{7} = \quad \sin \frac{k}{7}$, on a :

$$
\begin{aligned}
P &= \quad X \quad \sin \frac{3}{7} \quad X \quad \sin \frac{3}{7} \quad X \quad \sin \frac{2}{7} \quad X \quad \sin \frac{2}{7} \quad X \quad \sin \frac{}{7} \quad X \quad \sin \frac{+}{7} \\
&= \quad X^2 \quad \sin^2 \frac{3}{7} \quad X^2 \quad \sin^2 \frac{2}{7} \quad X^2 \quad \sin^2 \frac{1}{7} \\
&= \quad X^2 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \cos \frac{6}{7} \quad X^2 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \cos \frac{4}{7} \quad X^2 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \cos \frac{2}{7} \\
&= \frac{1}{8} Q(\quad 2X^2 + 1)
\end{aligned}
$$

Avec $Q = \quad \cos \frac{6}{7} \quad Y \quad \cos \frac{4}{7} \quad Y \quad \cos \frac{2}{7} \quad Y$. Reste à estimer les coefficients $\cos \frac{6}{7} \cos \frac{4}{7} \cos \frac{2}{7}$, $\cos \frac{6}{7} \cos \frac{4}{7} + \cos \frac{6}{7} \cos \frac{2}{7} + \cos \frac{4}{7} \cos \frac{2}{7}$ et $\cos \frac{6}{7} + \cos \frac{4}{7} + \cos \frac{2}{7}$. Cela se fait via $! = e^{i \frac{2}{7}}$ (rappel $!^7 = 1$, donc $! + !^2 + !^3 + !^4 + !^5 + !^6 = \quad !^0 = \quad 1)$:

$$\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{8}(\omega+\omega^6)(\omega^3+\omega^4)(\omega^5+\omega^2)$$
$$= \frac{1}{8}(\omega^2+\omega^6+\omega^3+1+1+\omega^4+\omega+\omega^5)$$
$$= \frac{1}{8}(2-1) = \frac{1}{8}$$

$$\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{4}\left((\omega+\omega^6)(\omega^3+\omega^4)+(\omega+\omega^6)(\omega^5+\omega^2)+(\omega^3+\omega^4)(\omega^5+\omega^2)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(2\omega^4+2\omega^5+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^6+2\omega\right) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2}\left((\omega+\omega^6)+(\omega^3+\omega^4)+(\omega^5+\omega^2)\right) = -\frac{1}{2}$$

Finalement :

$$Q = \frac{1}{8}\left(-8Y^3-4Y^2+4Y+1\right)$$

En utilisant $P = \frac{1}{8}Q(-2X+1)$, on trouve (après quelques lignes de calcul) :

$$P = \frac{1}{64}\left(64X^6-112X^4+56X^2-7\right)$$

Finalement, les $\sin\frac{k\pi}{7}$ pour $k \in \{-3;-2;-1;1;2;3\}$ sont les 6 solutions de l'équation (E) $64x^6-112x^4+56x^2-7=0$. Cependant, si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ est solution de cette équation, alors, en multipliant par q^6 :

$$64p^6-112p^4q^2+56p^2q^4-7q^6=0$$

Donc, $p|(64p^6-112p^4q^2+56p^2q^4) = 7q^6$. En supposant que p et q sont premiers entre eux, on trouve $p|7$, donc $p \in \{\pm 1;\pm 7\}$. De la même manière, $q|64$, donc $q \in \{1;2;4;8;16;32;64\}$. On sait en outre que $\frac{p}{q} \in]-1;1[$ car on connaît les racines de P : ce sont les $\sin\frac{k\pi}{7}$. Il faut donc tester si les rationnels suivants sont solutions, s'ils ne le sont pas, alors aucune racine de P n'est rationnelle, donc aucun $\sin\frac{k\pi}{7}$ n'est rationnel (sauf $\sin 0 = 0$) :

$$\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{4};\pm\frac{1}{8};\pm\frac{1}{16};\pm\frac{1}{32};\pm\frac{1}{64};\pm\frac{7}{8};\pm\frac{7}{16};\pm\frac{7}{32};\pm\frac{7}{64}$$

Comme P est pair, il suffit de tester simplement les fractions positives ci-dessus. En outre, notons que $112 = 8 \quad 3 \quad 5$ et $56 = 8 \times 7$, donc si $4|q$, alors $128|(112p^2q^2+56p2q^4-7q^6) = -64p^6$, ce qui n'est pas possible (p est impair), donc $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ est le seul cas qu'il faut véritablement tester numériquement. Une calculatrice donne : $64 \times 1^6 - 112 \times 1^4 \times 2^2 + 56 \times 1^2 \times 2^4 - 7 \times 2^6 = 64 \neq 0$.

P n'ayant pas de racine rationnelle, aucun des $\sin\frac{k\pi}{7}$ n'est rationnel ($k \neq 0$).

Exercise 2.182 (Question subsidiaire)**.** Les ω_n^k vérifiant tous $\left(\omega_n^k\right)^n = 1$, et étant au nombre de n, les racines du polynôme $X^n - 1$ sont exactement les ω_n^k : $P = X^n - 1$.

Il s'ensuit, pour $n \neq 1$:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{2}{2-\omega_n^k}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{4-\omega_n^k}{2-\omega_n^k} = \frac{P(4)}{P(2)} = \frac{4^n-1}{2^n-1} = 2^n+1$$

D'autre part, pour $n \neq 1$ et $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\omega_n^{2k} - 2\omega_n^k\cos a + 1\right) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{ia}-\omega_n^k\right)\left(e^{-ia}-\omega_n^k\right) \\ &= P\left(e^{ia}\right)P\left(e^{-ia}\right) = \left(e^{ina}-1\right)\left(e^{-ina}-1\right) \\ &= 2-\left(e^{ina}+e^{-ina}\right) = 2\left(1-\cos na\right)\end{aligned}$$

Retour à la Khôlle : Section 1.20.3.

2.61 Khôlle 61 : Primitive rationnelle impossible pour l'inverse

Exercise 2.183 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.184 (Problème principal)**.** On a : $F' = \frac{P'Q-PQ'}{Q^2} = \frac{1}{X}$, donc $RX = Q^2$ avec $R = P'Q - PQ'$. Ainsi, $X | Q^2$. Comme X est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, on a $X | Q$.

Supposons que $X^n | Q$, alors notons $Q^2 = X^{2n}B$, on a $RX = Q^2 = X^{2n}B$, puis $X^{2n-1}B = P'Q - PQ'$, d'où $X^n | (P'Q - PQ')$. Comme $X^n | P'Q$, on obtient $X^n | PQ'$, sauf que P est premier avec X^n car P est premier avec Q (qui est multiple de X^n). Finalement : $X^n | Q'$.

Supposons que $F' = \frac{1}{X}$ pour une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ ($P \wedge Q = 1$), alors en notant q le degré de Q, on sait que 0 est racine de Q avec multiplicité au moins 1. Mais si 0 est racine de Q avec multiplicité n, alors 0 est racine de Q' avec multiplicité n aussi, donc racine de Q avec multiplicité $n+1$. Dès lors, la multiplicité de 0 comme racine de Q est aussi grande qu'on veut, plus grande que son degré : Q est le polynôme nul... Cela est une contraction avec $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$.

Exercise 2.185 (Question subsidiaire)**.** Comme i, j et k doivent être choisis différents, on choisit d'abord i parmi 8 possibilités, puis j et k parmi les 7 restantes, soit $\binom{7}{2} = 21$ choix possibles. En tout, il y a donc $21 \times 8 = 168$ termes dans cette somme.

Posons $\sigma_8 = \prod_{i=1}^{8} x_i$ la fonction symétrique élémentaire du terme constant. Prenons le terme $\frac{x_1}{x_2x_3}$, il vaut :

$$\frac{x_1}{x_2x_3} = \frac{x_1^2x_4x_5x_6x_7x_8}{x_1x_2\cdots x_8} = \frac{1}{\sigma_8}x_1^2x_4x_5x_6x_7x_8$$

Ainsi, comme notre somme porte sur tous les i et $j < k$ différents, on peut changer l'indice pour la faire porter sur les i et $a < b < c < d < e$ différents en s'assurant que $\{i; j; k; a; b; c; d; e\} = [\![1; 8]\!]$:

$$S = \sum_{\substack{i;j;k \text{ distincts} \\ j<k}} \frac{x_i}{x_j x_k} = \frac{1}{\ _8} \sum_{\substack{i;a;\dots;e \text{ distincts} \\ a<\dots<e}} x_i^2 x_a x_b x_c x_d x_e$$

Les produits utilisés ont 7 facteurs, mais notre somme n'est pas $\ _7$. Cependant, on remarque que ces produits s'obtiennent en multipliant un produit à 6 facteurs par un produit à 1 facteur. Essayons alors de regarder $\ _1\ _6$: $\ _1\ _6 = (\sum_i x_i) \sum_{a<\dots<f} x_a x_b x_c x_d x_e x_f$.

Fixons un terme de $\ _6$, disons $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ et multiplions-le par $\ _1$. On obtient :

$$x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + \dots + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6^2 \ + (x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7 + x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_8)$$

On voit apparaître 6 termes de notre somme, mais aussi 2 termes de $\ _7$.

Si on fait varier le terme de $\ _6$ choisi, on va récupérer tous les termes de notre somme, ainsi que tous les termes de $\ _7$. Cependant, on récupère peut-être plusieurs fois les mêmes termes, comptons-les. $\ _6$ contient $\binom{8}{6} = 28$ termes. Donc on récupère $6 \ \ 28 = 168$ termes de notre somme (c'est bon), et $2 \ \ 28 = 56$ termes de $\ _7$, soit 7 fois trop : chaque terme est récupéré 7 fois (par exemple, $x_1 \dots x_7$ est récupéré via $x_1 \dots x_6 \ \ x_7$, mais aussi via $x_1 \dots x_5 x_7 \ \ x_6$, via $x_1 \dots x_4 x_6 x_7 \ \ x_5$, etc). De fait :

$$\begin{aligned} \ _1\ _6 &= \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_{a<\dots<f} x_a x_b x_c x_d x_e x_f\right) \\ &= \sum_{\substack{i;a;\dots;e \text{ distincts} \\ a<\dots<e}} x_i^2 x_a x_b x_c x_d x_e + \sum_{\substack{i;a;\dots;f \text{ distincts} \\ a<\dots<f}} x_a x_b x_c x_d x_e x_f x_i \\ &= \ _8 S \ \ 7\ _7 \end{aligned}$$

Finalement :

$$S = \frac{\ _1\ _6 + 7\ _7}{\ _8} = \frac{1 \ \ 0 + 7 \ \ (\ 1)}{3} = \frac{\ 7}{3}$$

Retour à la Khôlle : Section 1.21.1.

2.62 Khôlle 62 : Théorème de Lucas, Fractions rationnelles paires

Exercise 2.186 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.187 (Problème principal)**.** On a : $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X-\lambda_k}$ car P est scindé et on note n_k la multiplicité de λ_k. Donc $\frac{P'}{P}(\mu) = \frac{P'(\mu)}{P(\mu)} = 0$ car $P(\mu) \neq 0$ par hypothèse. Il s'ensuit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\mu-\lambda_k} = 0$$

Dès lors, on peut écrire μ comme un barycentre à poids positifs des λ_k :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\mu_j-\lambda_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(\overline{\mu_j}-\overline{\lambda_k})}{|\mu_j-\lambda_k|^2} = \overline{\mu_j}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{|\mu_j-\lambda_k|^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k\overline{\lambda_k}}{|\mu_j-\lambda_k|^2}$$

Comme cette somme vaut 0, en conjuguant et isolant μ_j, on obtient une expression de μ_j comme barycentre à poids positifs des λ_k :

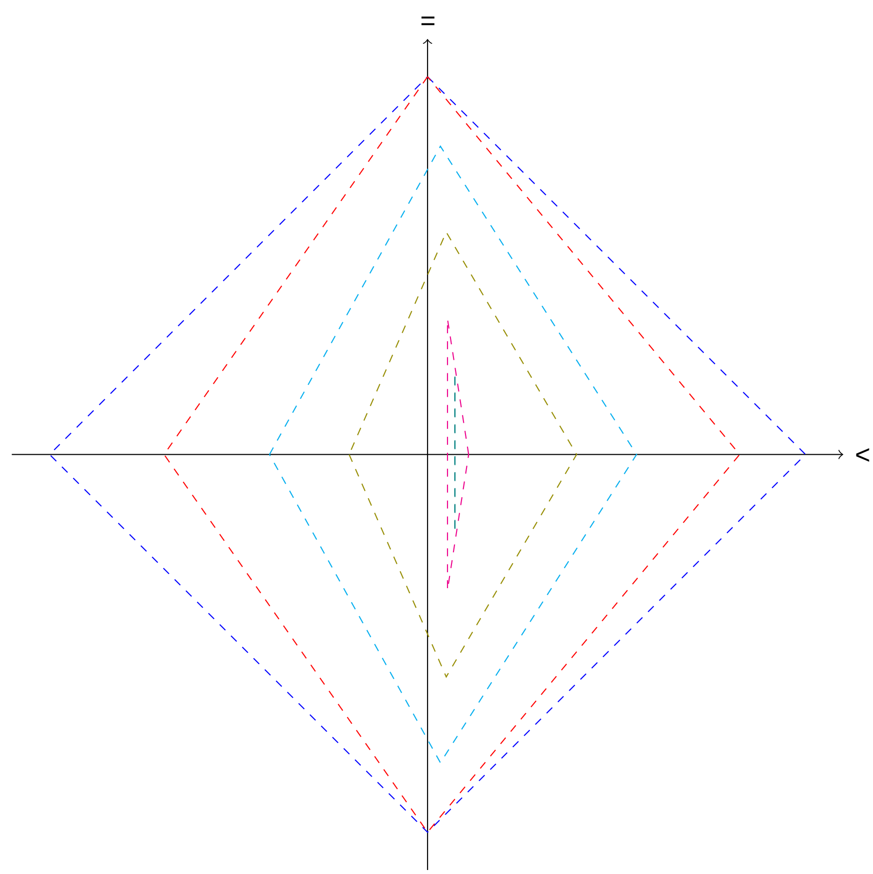
$$\mu_j = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{|\mu_j-\lambda_k|^2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{|\mu_j-\lambda_k|^2}\lambda_k$$

Cela signifie, géométriquement, que si on place les A_k (d'affixe λ_k, racines de P) dans le plan, les points B_j, qui ont pour affixe les racines μ_j de P', sont tous dans l'enveloppe convexe du polygone formés par les A_k : certaines racines de P sont aussi racines de P' (les multiples), et les autres sont strictement dans l'enveloppe convexe.

On peut poursuivre en traçant l'enveloppe convexe des μ_j : les racines de P'' sont dedans, etc.

Ce théorème donne une version dans $\mathbb{C}$ du fait que les racines de P' sont dans l'intervalle $[\min_{x\,;\,P(x)=0} x ; \max_{y\,;\,P(y)=0} y]$ pour les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ scindés dans $\mathbb{R}$.

Exemple avec $P = (X-i)^2(X+i)^2(X-1)(X+1)(X-1/2)$. On notera qu'une des racines de P est dans l'enveloppe convexe des racines de P'', en autres emplacements étranges : le problème de l'enchevêtrement des racines n'est donc pas simple, même une fois établi le théorème de Lucas.



P, P', P'', $P^{(3)}$, $P^{(4)}$, $P^{(5)}$, $P^{(6)}$

Exercise 2.188 (Question subsidiaire)**.** Si $F=\frac{P}{Q}$ est paire, alors $\frac{P(-X)}{Q(-X)}=\frac{P}{Q}$, donc $PQ(-X)=P(-X)Q$, donc $P \mid P(-X)$ par le lemme de Gauss car P est premier avec Q. Comme P et $P(-X)$ ont le même degré, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P(-X)=\lambda P$. Comme le coefficient dominant de $P(-X)$ vaut $(-1)^{\deg P}$ fois le coefficient dominant de P, on obtient $\lambda=(-1)^{\deg P}$: $P(-X)=(-1)^{\deg P}P$ se substitue dans $PQ(-X)=P(-X)Q$ pour donner $Q(-X)=(-1)^{\deg P}Q$.

Ainsi, si F est paire, soit P et Q sont pairs, soit P et Q sont impairs. Cependant, le deuxième cas n'est pas possible car alors P et Q admettent 0 comme racine et ne sont donc pas premiers entre eux. Ainsi : F paire $\iff$ P et Q pairs.

Maintenant, si $F=\frac{P}{Q}\in\mathbb{K}(X)$ est impaire, alors $F'=\frac{P'Q-PQ'}{Q^2}$ est paire, donc Q^2 est pair par le raisonnement précédent : $\forall x,\ Q(-x)\in\{Q(x),-Q(x)\}$. Dès lors, $Q(-X)$ coïncide une infinité de fois ou avec Q ou avec $-Q$: comme c'est un polynôme, on obtient $Q(-X)=Q$ ou $Q(-X)=-Q$. En substituant dans l'expression de F, on trouve finalement : F est impaire $\iff$ (P est pair et

Q impair) ou (P est impair et Q pair).

Retour à la Khôlle : Section 1.21.2.

2.63 Khôlle 63 : Expressions simples pour des sommes horribles

Exercise 2.189 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.190 (Problème principal)**.** Comme 0 n'est pas racine de P, $\frac{1}{XP}$ admet une décomposition en éléments simples de degré 1 :

$$\frac{1}{XP} = \frac{\lambda_0}{X} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X - x_k}$$

Multiplions par X et faisons tendre $x \to 0$: $\frac{1}{P(0)} = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} 0$.

Ensuite, multiplions par $X - x_k$ et faisons tendre $x \to x_k$. D'une part : $\lim_{x \to x_k} \frac{1}{x} \frac{x - x_k}{P(x) - P(x_k)} = \frac{1}{x_k P'(x_k)}$. Et d'autre part, le membre droite tend vers λ_k.

Finalement :

$$\frac{1}{XP} = \frac{1/P(0)}{X} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1/x_k P'(x_k)\right)}{X - x_k}$$

Maintenant, multiplions les deux côtés par X et faisons tendre $x \to +\infty$: $\frac{x}{xP(x)} \to 0$, $x \frac{1/P(0)}{x} = \frac{1}{P(0)}$ et $x \sum_{k=1}^{n} \frac{(1/x_k P'(x_k))}{x - x_k} \to \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)}$. Il s'ensuit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}$$

Exercise 2.191 (Question subsidiaire)**.** Commençons par regarder, pour $\omega \in \mathbb{U}_n$ le terme de la somme. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$:

$$\frac{\omega X + 1}{\omega^2 X^2 + \omega X + 1} = \frac{\omega X + 1}{(\omega X - j)(\omega X - j^2)} = \frac{a}{\omega X - j} + \frac{b}{\omega X - j^2}$$

On trouve : $a = \frac{\omega \frac{j}{\omega} + 1}{\omega \frac{j}{\omega} - j^2} = \frac{j}{j-1}$ et $b = -\frac{1}{j-1}$. Il s'ensuit que (comme $\mathbb{U}_n$ est stable par $z \mapsto \frac{1}{z}$) :

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{j-1} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \left(\frac{j}{\omega X - j} - \frac{1}{\omega X - j^2} \right) \\
&= \frac{1}{j-1} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \left(\frac{j/\omega}{X - j/\omega} - \frac{1/\omega}{X - j^2/\omega} \right) \\
&= \frac{1}{j-1} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \left(\frac{j\omega}{X - j\omega} - \frac{\omega}{X - j^2\omega} \right)
\end{aligned}$$

Maintenant, on remarque que $(j\omega)^n = j^n$, donc : $\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}(X - j\omega) = X^n - j^n$. De fait, $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{j\omega}{X-j\omega}$ est la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle de la forme $\frac{P}{X^n-j^n}$ pour un certain $P\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

On sait que, pour $\omega\in\mathbb{U}_n$ fixé, $\frac{z^n-j^n}{z-j\omega}\to n(j\omega)^{n-1}$ (le polynôme dérivé) quand $z\to j\omega$, donc, en multipliant par $X-j\omega$ puis en évaluant en $j\omega$ l'égalité $\frac{P}{X^n-j^n}=\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{j\omega}{X-j\omega}$, on trouve $\frac{P(j\omega)}{n(j\omega)^{n-1}}=j\omega$, puis $P(j\omega)=nj^n$. Comme P vaut la même valeur sur $\mathbb{U}_n$ et est de degré $\leq n-1$, P est constant de valeur nj^n. Ainsi :

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{j\omega}{X-j\omega}=\frac{nj^n}{X^n-j^n}$$

Le même raisonnement avec j^2 donne :

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{\omega}{X-j^2\omega}=\frac{nj^{2n-2}}{X^n-j^{2n}}$$

Finalement :

$$F=\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{\omega X}{\omega^2 2X^2+\omega X+1}=\frac{n}{j-1}\left(\frac{j^n}{X^n-j^n}-\frac{j^{2n-2}}{X^n-j^{2n}}\right)$$

Cette forme est beaucoup plus simple que celle de départ, on peut cependant encore la simplifier :

<u>Si $n=3p$:</u> $F=\frac{3p}{j-1}\left(\frac{1}{X^{3p}-1}-\frac{j}{X^{3p}-1}\right)=-\frac{3p}{X^n-1}$

<u>Si $n=3p+1$:</u> $F=\frac{3p+1}{j-1}\left(\frac{j}{X^{3p+1}-j}-\frac{1}{X^{3p+1}-j^2}\right)=\frac{(3p+1)(X^{3p+1}+1)}{X^{6p+2}+X^{3p+1}+1}$

<u>Si $n=3p+2$:</u> $F=\frac{3p+2}{j-1}\left(\frac{j^2}{X^{3p+2}-j^2}-\frac{j^2}{X^{3p+2}-j}\right)=\frac{3p+2}{X^{6p+4}+X^{3p+2}+1}$

Retour à la Khôlle : Section 1.21.3.

2.64 Khôlle 64 : Permutoèdre

Exercise 2.192 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.193 (Problème principal)**.** Soit λ_j tels que $\sum_j\lambda_j(t_j)=0$. On pose $\Lambda=\sum_j\lambda_j$. Sur la coordonnée i, on a $(t_j)_i=i$ si $i\notin\{j;n\}$, $(t_j)_j=n$ et $(t_j)_n=j$. De fait, en coordonnée $i\neq n$:

$$\sum_{j\neq i}(\lambda_j i)+\lambda_i n=0$$

$$i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j+(n-i)\lambda_i=0$$

$$\lambda_i = \frac{i}{n-i}\Lambda$$

En coordonnée $i = n$, on a : $\sum_{j=1}^{n} j\lambda_j = 0$. De fait, on en déduit : $\lambda_n = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j^2}{n-j}\Lambda$. On a ainsi :

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = \Lambda\left(-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j^2}{n-j} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{j}{n-j}\right) = -\frac{\Lambda}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j(j-n)}{n-j} = \frac{n-1}{2}\Lambda$$

Finalement, pour $n \neq 3$, on obtient que $\Lambda = 0$, puis, grâce aux formules précédentes, $\forall j, \lambda_j = 0$: la famille est libre. Pour $n = 3$, elle ne l'est pas car $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = +3/2$ convient.

On remarque que : $\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, indépendamment de σ. Ainsi, si on pose $\psi : x \mapsto \sum_i x_i$, on observe que $\psi(\varphi(\sigma)) = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout σ, donc $\psi(\varphi(\sigma) - \varphi(id)) = 0$. La famille $(\varphi(\sigma) - \varphi(id))_\sigma$ est contenu dans l'hyperplan $H = \mathrm{Ker}\,\psi = \{x \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$. En outre, pour $n \neq 3$, la famille $(\varphi(t_j) - \varphi(id))_{1 \leq j \leq n-1}$ est libre, dans $\mathrm{Ker}\,\psi$ et de cardinal $n-1$, donc engendre $\mathrm{Ker}\,\psi$: la dimension de $(\varphi(\sigma) - \varphi(id))_\sigma$ est exactement $n-1$.

N.B. : Pour $n = 3$, un dessin montre qu'on obtient bien un objet de dimension affine 2. On peut aussi voir que le raisonnement précédent donne toujours que $(\varphi(t_j))_{1 \leq j \leq n-1}$ est libre, ce qui permet de conclure que $\varphi(t_1)$ et $\varphi(t_2)$ sont affinement indépendants.

Exercise 2.194 (Question subsidiaire)**.** Le sens réciproque $\Leftarrow$ est évident.

Supposons par l'absurde que $f \times g = 0$ avec $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Alors, soit $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$. Si $g(x) \neq 0$, on a une contradiction avec $f(x) \times g(x) = 0$, donc $g(x) = 0$. Soit $y \in E$ tel que $g(y) \neq 0$ (idem, on a $f(y) = 0$). On regarde avec la linéarité :

$$f(x+y) \times g(x+y) = (f(x) + f(y))(g(x) + g(y)) = f(x)g(y) \neq 0$$

On a donc une contradiction. Ainsi, on a montré que pour toutes formes linéaires f et g : $f \times g = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ou $g = 0$.

Retour à la Khôlle : Section 1.22.1.

2.65 Khôlle 65 : Sous-espace déterminé par intersection et somme

Exercise 2.195 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.196 (Problème principal)**.** Il suffit de montrer que $C \subset B$. Soit x un élément de C. Alors $x \in A + C = A + B$ et il existe $(y, z) \in A \times B$ tel que $x = y + z$. Mais $z \in B \subset C$ et donc, puisque C est un sous-espace vectoriel de

E, $y = x - z$ est dans C. Donc, $y \in A \cap C = A \cap B$ et en particulier y est dans B. Finalement, $x = y + z$ est dans B. On a montré que tout élément de C est dans B et donc que, $C \subset B$. Puisque d'autre part $B \subset C$, on a $B = C$.

Exercise 2.197 (Question subsidiaire)**.** F est le noyau de l'application linéaire $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f$, c'est donc un sous-espace vectoriel. On peut écrire $f = \left(f - \int_0^1 f\right) + \int_0^1 f$. Le premier élément est dans F et le second est une fonction constante. Ainsi, l'espace des fonctions constantes, $G = \{x \mapsto c\ ;\ c \in \mathbb{R}\}$, est un supplémentaire de F car on a $E = F + G$ d'après l'égalité précédente, et $F \cap G = \{x \mapsto 0\}$ avec un rapide raisonnement.

On peut d'ailleurs remarquer que pour tout élément $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$, on a : $F \oplus Vect(x) = E$, ce qu'on reverra quand on étudiera les hyperplans.

Retour à la Khôlle : Section 1.22.2.

2.66 Khôlle 66 : Familles libres et familles liées

Exercise 2.198 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.199 (Problème principal)**.** Regardons chaque famille :

- Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $au + bv + cw = \vec{0}$ (où u, v, w désignent les vecteurs de $\mathbb{C}^4$ du sujet). On obtient un système de 4 équations à 3 inconnues, reste à montrer qu'il est incompatible. En ajoutant les deuxièmes et quatrième lignes, on trouve $c = 0$, puis en ajoutant la première et la troisième, on obtient $a = 0$, ce qui donne $b = 0$ pour finir. La famille est bien libre.
- Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ les fonctions cos et sin. On a $f_u = (\cos u)\vec{x} + (\sin u)\vec{y}$. De fait, f_a, f_b et f_c sont 3 vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de 2 vecteurs : ils forment une famille liée.
- f_0, f_1 et f_2 sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$. Donc, la famille (f_0, f_1, f_2) est une famille liée puis la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est liée en tant que sur-famille d'une famille liée.

Exercise 2.200 (Question subsidiaire)**.** Comme $v \in (F + \mathbb{K}.v) = (F + \mathbb{K}.w)$, on peut trouver $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = x + \lambda w$. De la même manière, on peut trouver $y \in F$ et $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $w = y + \mu v$. Si $\lambda \neq 0$, la première égalité donne ce qu'on souhaite. Si $\mu \neq 0$, la deuxième égalité donne ce qu'on souhaite. Si $\lambda = \mu = 0$, alors on a $(-x - y) + v + w = 0$ où $(-x - y) \in F$: on a encore gagné.

Réciproquement, si $\exists u, \alpha, \beta : u + \alpha v + \beta v = 0$ avec $\beta \neq 0$, on en déduit que $w = -\frac{1}{\beta}(u + \alpha v)$, donc $w \in F + \mathbb{K}.v$. Pareillement, $v \in F + \mathbb{K}.w$. Finalement : $F + \mathbb{K}.v = F + \mathbb{K}.w$.

Retour à la Khôlle : Section 1.22.3.

2.67 Khôlle 67 : Impossible partition d'un espace en sous-espaces

Exercise 2.201 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.202 (Problème principal)**.** Cet exercice est complètement équivalent à l'**??**, mais la méthode est très différente.

On va raisonner par récurrence et par l'absurde.

E ne peut pas s'écrire comme réunion de $n = 1$ sous-espace strict.

Supposons maintenant que E ne peut pas s'écrire comme réunion de $n - 1$ sous-espaces stricts (n fixé), mais que $E = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ avec F_i des sous-espaces stricts. On ne peut pas avoir $F_1 \subset \bigcup_{i=2}^{n}$, sans quoi $E = \bigcup_{i=2}^{n} F_i$ et on aurait écrit E comme une réunion de $n - 1$ sous-espaces stricts. Soit alors $x \in F_1$ tel que $x \notin \bigcup_{i=2}^{n} F_i$. De même, on ne peut avoir $\bigcup_{i=2}^{n} F_i \subset F_1$ sinon $E = F_1$ (ce qui n'est pas car F_1 est un sous-espace strict). Prenons ainsi $y \in \bigcup_{i=2}^{n} F_i$ et $y \notin F_1$. On pose la fonction $\mathbb{K} \to [1; n]$:

$$f : \lambda \mapsto \min\{i \; ; \; x + \lambda y \in F_i\}$$

Cette fonction est bien définie car $\forall \lambda, x + \lambda y \in E = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Elle est aussi injective ! En effet, trouvons d'abord les antécédents de 1. Si $f(\lambda) = 1$, alors $x + \lambda y \in F_1$, et comme $x \in F_1$ et que F_1 est un espace vectoriel, on obtient $y \in F_1$, ce qui n'est pas. Donc $f(\lambda)$ ne vaut jamais 1.

Maintenant, supposons que $f(\lambda) = f(\mu) = j \neq 1$, alors $u = x + \lambda y \in F_j$ et $v = x + \mu y \in F_j$, donc $\mu u - \lambda v \in F_j$ car F_j est un espace vectoriel, or, par commutativité de $\mathbb{K}$:

$$\mu u - \lambda v = \mu x + \mu\lambda y - \lambda x - \lambda\mu y = (\mu - \lambda) x \in F_j$$

Comme $j \neq 1$, on a $x \notin F_j$ et comme ce dernier est un espace vectoriel, on a $\mu - \lambda = 0$: on a montré que f est injective.

Seulement, on vient de définir une fonction injective d'un ensemble infini $\mathbb{K}$ vers l'ensemble fini $[1; n]$... On a bien abouti à une contradiction, et on en déduit que E ne peut pas s'écrire comme une réunion de n sous-espaces stricts (et par récurrence, quelque soit n).

Exercise 2.203 (Question subsidiaire)**.** Soit $(e_k)_k$ un base de E. On pose, pour chaque k, p_k tel que $f^{p_k}(e_k) = \vec{0}$ et $p = \max_k p_k$. On a alors, pour tout k : $f^p(e_k) = f^{p - p_k}(f^{p_k}(e_k)) = \vec{0}$. Soit maintenant $x \in E$ avec sa décomposition dans la base $(e_k)_k$: $x = \sum_k \lambda_k e_k$. On obtient :

$$f^p(x) = f^p\left(\sum_{k=1} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1} \lambda_k f^p(e_k) = \vec{0}$$

Ainsi, f est bien nilpotente.

Retour à la Khôlle : Section 1.23.1.

2.68 Khôlle 68 : Centre du groupe des applications linéaires

Exercise 2.204 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.205 (Problème principal)**.** On a déjà montré que si $(x, f(x))$ est liée pour tout x, alors f est une homothétie en Exercise 1.224.

Supposons maintenant que E est de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec toutes les autres. Si $x = 0$, alors on a bien $f(x) = 0 \in \{0\} = \text{Vect}(x)$. Supposons $x \neq 0$ et posons $D = \text{Vect}(x)$. Comme E est de dimension finie, on peut construire H un supplémentaire de la droite D dans E (c'est vrai de beaucoup d'espaces vectoriels qui ne sont pas de dimension finie, comme de ceux qui ont une base, mais pas de tous). Soit s la symétrie par rapport à D et parallèlement à H. s commute avec f, donc, comme $x \in D$:

$$s(f(x)) = f(s(x)) = f(x)$$

Ainsi, $s(f(x)) = f(x)$, donc $f(x) \in D = \text{Vect}(x)$, et d'après la question précédente, f est un homothétie.

Réciproquement, si f est une homothétie, alors elle commute avec tous les éléments de $\mathcal{L}(E)$ car si $g \in \mathcal{L}(E)$, et $f(x) = \lambda x$, alors :

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = f(g(x))$$

Exercise 2.206 (Question subsidiaire)**.** Il y a deux possibilités. Ou bien on utilise la formule du cours qui indique que $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \cdot \dim F$ et on obtient immédiatement $\dim E^* = \dim E = n + 1$. Ou bien on en refait la démonstration. Soient E et F deux espaces de dimension finies, avec $n = \ E$. Alors, on a la bijection $\mathcal{L}(E, F) \to F^n$ définie par $u \mapsto u(e_i)$ où $(e_i)_i$ est une base de E. Cette bijection est linéaire, c'est donc un isomorphisme et on a $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F^n = n \cdot \dim F$.

Ainsi, comme la famille $(\varphi_k)_k$ est de cardinal $n+1$, il suffit de montrer qu'elle est libre ou bien qu'elle est génératrice pour obtenir que c'est une base de E^*. Soit $(\lambda_k)_k \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0$ (l'application nulle). dès lors, on a en particulier :

$$\forall j, 0 = \sum_{k=0} \lambda_k \varphi_k(X^j) = \sum_{k=0} \lambda_k \frac{j!}{(j-k)!} \delta_{jk} = j! \lambda_j$$

Ainsi, $\forall j, \lambda_j = 0$ et la famille des $(\varphi_k)_k$ est libre, donc c'est une base.

Retour à la Khôlle : Section 1.23.2.

2.69 Khôlle 69 : Matroïde d'une configuration de vecteurs

Exercise 2.207 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.208 (Problème principal)**.** Une famille vide est libre (par définition, il n'y a pas de dépendance linéaire dans cette famille de vecteurs). Donc, $\emptyset \in I$.

Toute sous-famille d'une famille libre est libre (car on ne peut en trouver une dépendance linéaire) : $\forall X \in I, Y \subset X \Rightarrow X \in I$.

La vraie question commence ici. Soit $X, Y \in I$ avec $|X| < |Y|$. On pose $E_X = \mathrm{Vect}(v_i)_{i \in X}$ et idem pour E_Y. Imaginons que $\forall j \in Y, v_j \in E_X$, alors E_X contient une famille libre de taille $|Y|$, donc $\dim E_X = |X| > |Y|$, ce qui n'est pas. De fait, on peut prendre v_e, $e \in Y$ tel que $v_e \notin E_X$. Mais dans ce cas $(v_i)_{i \in X \cup \{e\}}$ est libre car elle est de cardinal $|X| + 1$ est engendre un espace de dimension $\geq |X| + 1$. Ainsi, $X \cup \{e\} \in I$: on a bien un matroïde.

Exercise 2.209 (Question subsidiaire)**.** Soit $F = \mathrm{Vect}(F)$ et $F' = \mathrm{Vect}(F')$. Soit $H = \mathrm{Vect}(F \setminus F')$ le complémentaire de F' dans F. On a $H + F' = F$ (mais nécessairement $H \oplus F' = F$). On regarde les dimensions :

$$\begin{aligned}
&\dim F = s \\
&\dim F' = s' \\
&\dim H \leq n - r \\
&\dim H + \dim F' \geq \dim F
\end{aligned}$$

L'avant-dernière inégalité vient du fait qu'on a une famille génératrice de H de taille $n - r$ (la famille $F \setminus F'$).

La dernière inégalité vient de $H + F' = F$ avec la formule de Grassmann : $\dim H + s' - \dim(H \cap F') = s$.

On en conclut que $s - s' \leq \dim H \leq n - r$, d'où $s' \geq s + r - n$.

Retour à la Khôlle : Section 1.23.3.

2.70 Khôlle 70 : Théorème de Singmaster, Paradoxe des 2 enfants

Exercise 2.210 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.211 (Problème principal)**.** Remarquons d'abord que $N(k) < \infty$. En effet, si $n > k$, alors $\binom{n}{r} > k$ pour $r \notin \{0, n\}$, et $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \neq k$. Donc si $\binom{n}{r} = k$, alors $n < k$, d'où $N(k) \leq \frac{n(n-1)}{2}$ (c'est le nombre de coefficients binomiaux ne valant pas 1 dans les n premières lignes du triangle de Pascal).

Ensuite, regardons, pour a fixé, l'application $b \mapsto \binom{a+b}{a}$. Elle est strictement croissante, donc $\binom{a+b}{a} = k$ admet au plus 1 solution (peut-être 0) quand a est fixé et b varie. De la même manière, pour b fixé, l'application $a \mapsto \binom{a+b}{a}$ est strictement croissante. Donc $\binom{a+b}{a} = k$ admet au plus 1 solution quand b est fixé et a varie. Supposons maintenant que $k < \binom{2s}{s}$, alors si $\binom{a+b}{a} = k$, on a $a \leq s$ et $b \leq s$. Donc $N(k) \leq 2s$ (chaque choix de a donne au plus 1 solution, chaque choix de b aussi et il y a s choix possibles pour a et s choix possibles pour b). Reste à estimer s en fonction de k. Un constat (algébrique ou combinatoire) rapide donne que $2^m \leq \binom{2m}{m}$. Donc si s est le plus petit entier tel que $k \leq \binom{2s}{s}$, alors en particulier $\binom{2(s-1)}{s-1} \leq k$, donc $2^{s-1} \leq k$ puis $s \leq 1 + \log_2 k$. Ainsi : $N(k) \leq 2s \leq 2 + 2\log_2 k = O(\log k)$.

Des estimations plus précises sont connues, la meilleure (en février 2021) étant $N(k) = O\left(\frac{\log\log\log k}{(\log\log k)^3} \log k\right)$, mais il est conjecturé que $N(k) = O(1)$ (c'est-à-dire que $N(k)$ est borné) et la plus grande valeur de $N(k)$ qu'on ait trouvé est $N(3003) = 8$ (testé jusqu'à 2^{48}).

Exercise 2.212 (Question subsidiaire)**.** On se place dans l'univers $\Omega = \{$Fille-fille; Garçon-fille; Fille-garçon; Ga (par convention, on notera l'aîné avec une majuscule et le cadet avec une minuscule). Chaque cas est équiprobable dans la population française. On veut utiliser la formule de Bayes, en notant "$G \geq 1$" l'événement "Avoir au moins un garçon" :

$$\mathbb{P}_{G \geq 1}(\text{Garçon-garçon}) = \mathbb{P}_{\text{Garçon-garçon}}(G \geq 1)\frac{\mathbb{P}(\text{Garçon-garçon})}{\mathbb{P}(G \geq 1)}$$

En effet, notre ami mathématicien nous a dit qu'il avait "un garçon" (pas exactement un garçon, mais au moins un garçon), on ignore si c'est l'aîné ou le cadet. Dans 3 cas sur 4 de Ω, il y a un garçon, donc $\mathbb{P}(G \geq 1) = 3/4$. Par équiprobabilité, on a aussi : $\mathbb{P}(\text{Garçon-garçon}) = 1/4$. Enfin, on a évidemment : $\mathbb{P}_{\text{Garçon-garçon}}(G \geq 1) = 1$. Finalement :

$$\mathbb{P}_{G \geq 1}(\text{Garçon-garçon}) = \frac{1}{3}$$

On peut d'ailleurs vérifier que dans le sous-univers de Ω où on sait qu'on a au moins un garçon, on a la loi de probabilité :

A	Fille-fille	Garçon-fille	Fille-garçon	Garçon-garçon	Total
$\mathbb{P}_{G \geq 1}(A)$	0	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

Maintenant, on ne peut plus résonner dans le même univers car il faut prendre en compte les jours de la semaine, on fixe donc le nouvel univers $\Omega' = \{\text{Fille}_{\text{Lundi}} - \text{fille}_{\text{Lundi}}; \text{Fille}_{\text{Lundi}} - \text{fille}_{\text{Mardi}}; \ldots; \text{Fille}_{\text{Lundi}} - \text{fille}_{\text{Dimanche}}; \text{Fille}_{\text{Mardi}} - \text{fille}_{\text{Lundi}}; \ldots; \text{Fille}_{\text{Dimanche}} - \text{fille}_{\text{Dimanche}}; \text{Garçon}_{\text{Lundi}} - \text{fille}_{\text{Lundi}}; \ldots; \text{Garçon}_{\text{Dimanche}} - \text{garçon}_{\text{Dimanche}}\}$ (en notant évidement les jours de la semaine de naissance en indice). Il y a 4×49 évènement élémentaires équiprobables dans Ω'. On note "$G_{\text{Mardi}} \geq 1$" l'évènement "Avoir au moins un garçon né un mardi" et "Garçon-garçon" l'évènement "Avoir 2 garçons", qui correspond, dans notre nouvel univers, à la réunion d'évènements :

$$\text{Garçon-garçon} = \bigcup_{i,j \,:\, \text{Jours de la semaine}} (\text{Garçon}_i - \text{garçon}_j)$$

La probabilité de cet évènement est donc de $49 \times \frac{1}{4 \times 49} = 1/4$ (ce qui ne nous surprend pas).

On veut appliquer la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{G_{\text{Mardi}}\quad 1}(\text{Garçon-garçon}) = \mathbb{P}_{\text{Garçon-garçon}}(G_{\text{Mardi}}\quad 1)\frac{\mathbb{P}(\text{Garçon-garçon})}{\mathbb{P}(G_{\text{Mardi}}\quad 1)}$$

Or $\mathbb{P}_{\text{Garçon-garçon}}(G_{\text{Mardi}}\quad 1)$ peut s'exprimer en comptant les cas : il y a 13 cas favorables sur 49 cas en tout. En effet, on a les cas Garçon$_{\text{Mardi}}$ garçon$_{\textbf{pas Mardi}}$, soit 6 cas ; Garçon$_{\textbf{pas Mardi}}$ garçon$_{\text{Mardi}}$, encore 6 cas ; et Garçon$_{\text{Mardi}}$ garçon$_{\text{Mardi}}$, 1 cas (qu'il ne faut pas compter deux fois). De la même manière, $\mathbb{P}(G_{\text{Mardi}}) = \frac{7+7+13}{4\quad 49}$ en comptant les cas favorables. Finalement :

$$\mathbb{P}_{G_{\text{Mardi}}\quad 1}(\text{Garçon-garçon}) = \frac{13}{27}$$

On remarque un phénomène très intéressant : cette probabilité est très proche de $1/2$. La probabilité de $1/2$ correspond au cas où on aurait demandé "Est-ce que ton aîné est un garçon ?", par exemple, c'est-à-dire qu'on pose une question qui nous permet de rendre indépendant (la variable aléatoire désignant) le sexe de l'aîné de (la variable aléatoire désignant) celui du cadet. Dans ce cas, comme les évènements "Garçon" et "garçon" sont indépendants, on a bien :

$$\mathbb{P}_{\text{Garçon}}(\text{Garçon-garçon}) = \mathbb{P}(\text{garçon}) = \frac{1}{2}$$

Dans notre cas du garçon né un mardi, l'information "né un mardi" ne rend pas les évènements indépendants, mais en imposant des précisions sur l'enfant qu'on considère, on diminue le nombre de cas favorables pour "Garçon$_{\text{Mardi}}$ garçon$_{\text{Mardi}}$" qui est le ***défaut d'indépendance*** entre "Garçon" et "garçon". Ainsi, pour une information complémentaire I (par exemple "être né un mardi" où "être roux" ou "aimer la vanille", etc), plus l'information est précise au sens où "Garçon$_I$ garçon$_I$" a peu de cas favorables, plus la réponse "Oui" à la question "As-tu un garçon tel que I" induit une probabilité que le deuxième enfant soit un garçon proche du cas d'indépendance $1/2$.

Pour plus de plus ample recherche sur la question, se renseigner sur le bayésianisme sur les excellentes chaînes Youtube de Hygiène Mentale et Science4All.

Retour à la Khôlle : Section 1.24.1.

2.71 Khôlle 71 : Plateaux d'échecs, Jeu de tennis

Exercise 2.213 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.214 (Problème principal)**.** Cet exercice se complique au fur et à mesure qu'on précise le sens de "plateau". Dans

Un première question "simple" serait de dire que toutes les pièces d'échec sont différenciées : les pions blancs s'appellent "pion1", "pion2",..., "pion8", de même pour les tours, les cavaliers, les fous, et les pièces noires. Un plateau est alors une disposition des pièces d'échecs sur l'échiquier. Il y a 32 pièces différentes, et 64 cases. Si toutes les pièces sont présentes, un plateau revient à choisir 32 cases parmi 64 (qu'on ordonne par l'ordre alpha-numérique de a1 à h8), puis une permutation des 32 pièces (pour choisir quelle pièce va sur quelle case). Il y a donc $\binom{64}{32} \times 32! = \frac{64!}{32!} \approx 4.8 \times 10^{53}$ plateaux d'échecs avec 32 pièces différenciées.

Un plateau peu aussi contenir moins de pièces (au moins les 2 rois légalement, mais **ici** la légalité des plateaux ne nous importe pas), disons k entre 0 et 32. Dès lors, un plateau revient à choisir k cases parmi 64, puis k pièces parmi 32 et enfin une permutation de ces k pièces : il y a $\binom{64}{k}\binom{32}{k}k! = \frac{64!32!}{(64-k)!(32-k)!k!}$ plateaux à k pièces différenciées. Donc il y a N plateaux d'échecs avec des pièces différenciées :

$$N = \sum_{k=0}^{32} \frac{64! \times 32!}{(64-k)!(32-k)!k!} = 64! \times 32! \sum_{k=0}^{32} \frac{1}{(32+k)!(32-k)!k!} \approx 1.2 \times 10^{54}$$

Même s'il semble qu'il y a finalement "peu" de plateaux avec n'importe quel nombre de pièces par rapport au nombre de plateaux à 32 pièces, ce résultat est juste et on peut s'en persuader en considérant qu'il y a "seulement" 2.1×10^{49} plateaux à 25 pièces, ce qui est largement négligeable.

Maintenant, on peut essayer de compter les plateaux dans lesquels les pièces ne sont pas différenciées : échanger les deux tours blanches de place ne change pas le plateau. Imaginons que quelqu'un rentre dans la pièce et trouve un plateau d'échecs avec les pièces placées dessus, il ne saurait pas dire "cette tour est la tour blanche *de gauche* et celle-ci, la tour blanche *de droite*", il dira simplement que ce sont les deux tours blanches.

Dans ce cadre, commençons par compter les plateaux à 32 pièces. On appellera ***plateau différencié*** un plateau dans lequel on considère que les pièces sont différenciées, et ***plateau non-différencié*** sinon. Fixons un des $\binom{64}{32}32!$ plateaux différenciés précédents. En échangeant les deux tours blanches, on obtient un autre plateau différencié, mais le même plateau non-différencié. De même, on pourrait échanger les pions blancs entre eux, les cavaliers, les fous, ou l'équivalent en noir. Dès lors, combien de plateau différenciés donnent le même plateau non-différencié ? Pour 1 plateau non-différencié, on a 2! possibilités pour les tours blanches, 2! pour les cavalier, 2! pour les fous, 8! pour les pions, et pareil pour les noirs : $(2! \times 2! \times 2! \times 8!)^2$ plateaux différenciés donnent le même plateau non-différencié. Ainsi, le nombre de plateaux non-différenciés à 32 pièces est :

$$\frac{64!}{32!} \times \frac{1}{(2! \times 2! \times 2! \times 8!)^2} \approx 4.6 \times 10^{42}$$

En notant P l'ensemble des plateaux différenciés et $\hat{P}$ les non-différenciés, on vient d'expliquer qu'il y a une bijection :

$$P \simeq \hat{P} \times \left(S_2^3 \times S_8\right)^2$$

Reste à compter les plateaux non-différenciés à k pièces. Le problème est qu'on ignore quelles sont les pièces choisies : on ne peut pas dire "il y a 2 tours blanches donc on divise par 2!" car on ignore s'il y a belle et bien les 2 tours blanches parmi les k pièces choisies. Prenons le problème dans l'autre sens : plutôt que de raisonner à k fixé, regardons combien de plateaux (non-différenciés) peut-on construire avec n_{tb} tours blanches, n_{cb} cavaliers blanc, n_{fb} fous blancs, etc ? Notons $\vec{n} = (n_{tb}; n_{cb}; n_{fb}; n_{db}; n_{rb}; n_{pb}; n_{tn}; n_{cn}; n_{fn}; n_{dn}; n_{rn}; n_{pn})$ avec b pour "blanc", n pour "noir", et $t; c; f; d; r; p$ pour "tour", "cavalier", "fou", "dame", "roi", "pion". Dès lors, pour $\vec{n}$ fixé, on peut noter $S(\vec{n})$ la somme de ses coordonnées et $P(\vec{n})$ le produit des factorielles de ses coordonnées. Le nombre de plateau non-différenciés pour $\vec{n}$ est alors $\binom{64}{S(\vec{n})}\binom{32}{S(\vec{n})}\frac{S(\vec{n})}{P(\vec{n})}$. Enfin, regardons l'ensemble des valeurs possibles pour $\vec{n}$: il s'agit de $X = ⟦0; 2⟧^3 \times ⟦0; 1⟧^2 \times ⟦0; 8⟧^2$. Ainsi, le nombre de plateaux non-différenciée est :

$$\sum_{\vec{n} \in X} \binom{64}{S(\vec{n})}\binom{32}{S(\vec{n})}\frac{S(\vec{n})!}{P(\vec{n})}$$

Ce nombre est bien plus facile à calculer qu'il n'y paraît (avec un ordinateur cela dit) : il y a 944 784 termes. Beaucoup sont identiques, mais laissons cela de côté. Avec un programme Python, on obtient rapidement (1 minute ou 2 quand même, mais je n'ai pas programmé cela très intelligemment) qu'il y a environ 4.6×10^{46} plateaux non-différenciés.

Exercise 2.215 (Question subsidiaire)**.** Notons les évènements :

E_{40} : "égalité à 40-40"

F : "Federer gagne le jeu"

F_1 : "Federer gagne le prochain point"

F_2 : "Federer gagne le second prochain point"

N_1 : "Nadal gagne le prochain point"

N_2 : "Nadal gagne le second prochain point"

Après deux points, ou bien l'un des joueurs à gagné le jeu, ou bien il y a de nouveau égalité à 40-40.

On utilise donc la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|E) &= \mathbb{P}(F|E \cap F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F|E \cap N_1)\mathbb{P}(N_1)\\ &= \mathbb{P}(F|E \cap F_1)p + \mathbb{P}(F|E \cap N_1)q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|E \cap F_1) &= \mathbb{P}(F|E \cap F_1 \cap F_2)\mathbb{P}(F_2|F_1) + \mathbb{P}(F|E \cap F_1 \cap N_2)\mathbb{P}(N_2|F_1)\\ &= 1 \times p + \mathbb{P}(F|E)q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|E \cap N_1) &= \mathbb{P}(F|E \cap N_1 \cap F_2)\mathbb{P}(F_2|N_1) + \mathbb{P}(F|E \cap N_1 \cap N_2)\mathbb{P}(N_2|N_1)\\ &= \mathbb{P}(F|E)p + 0 \times q\end{aligned}$$

On a donc l'équation d'inconnue $x = \mathbb{P}(F|E)$:

$$x = p(p + xq) + q(xp)$$

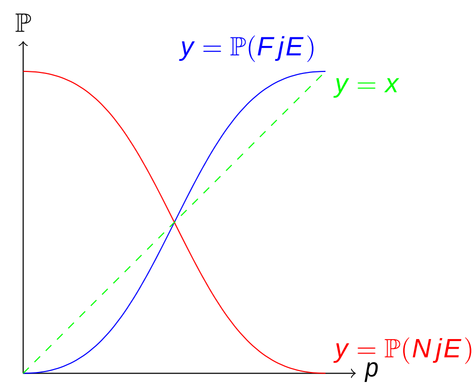
Donc, finalement, en utilisant $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1^2 = 1$:

$$\mathbb{P}(F|E) = x = \frac{p^2}{p^2 + q^2}$$

La probabilité pour Nadal de gagner est donc :

$$\mathbb{P}(N|E) = 1 - x = \frac{q^2}{p^2 + q^2}$$

On remarque, en traçant les probabilité l'une contre l'autre en fonction de p que la situation d'égalité exagère légèrement l'avantage du joueur le plus fort (la courbe bleue est au-dessus de la bissectrice verte).



Retour à la Khôlle : Section 1.24.2.

2.72 Khôlle 72 : Nombre en base quelconque, Sophisme

Exercise 2.216 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.217 (Problème principal)**.** Fixons B. Comme on manipule des nombres positif, on constate que toute augmentation de l'un des a_i entraîne une augmentation du nombre $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$. Plus précisément, soit $\prec$ la relation d'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^n$ et $\varphi : \prod_i [\![1, b_i]\!] \to \mathbb{N}$ la fonction $\varphi : (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$. Montrons que cette fonction est strictement croissante.

Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ tel que $(a_1, a_2, \dots, a_n) \prec (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$.

Soit k le plus petit entier tel que $a_k < a'_k$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
\varphi((a_1,a_2,\ldots,a_n)) = & \sum_{i=1}^{k-1}\left(a_i \prod_{i<j} b_j\right) + a_k \prod_{k<j} b_j + \sum_{i=k+1}^{n}\left(a_i \prod_{i<j} b_j\right) \\
\leq & \sum_{i=1}^{k-1}\left(a_i \prod_{i<j} b_j\right) + a_k \prod_{k<j} b_j + \sum_{i=k+1}^{n}\left((b_i-1) \prod_{i<j} b_j\right) \\
\leq & \sum_{i=1}^{k-1}\left(a_i \prod_{i<j} b_j\right) + a_k \prod_{k<j} b_j + \sum_{i=k+1}^{n}\left(\left(\prod_{i\leq j} b_j\right) - \left(\prod_{i<j} b_j\right)\right) \\
\leq & \sum_{i=1}^{k-1}\left(a_i \prod_{i<j} b_j\right) + a_k \prod_{k<j} b_j + \prod_{k<j} b_j - 1 \\
< & \sum_{i=1}^{k-1}\left(a_i \prod_{i<j} b_j\right) + (a_k+1) \prod_{k<j} b_j \\
< & \sum_{i=1}^{k-1}\left(a'_i \prod_{i<j} b_j\right) + a'_k \prod_{k<j} b_j + \sum_{i=k+1}^{n}\left(a'_i \prod_{i<j} b_j\right) \\
< & \ \varphi((a'_1,a'_2,\ldots,a'_n))
\end{aligned}
$$

Dès lors, comme φ est strictement croissante, elle est injective. On peut regarder ses bornes : $\varphi((0,0,\ldots,0)) = 0$ et

$$
\varphi((b_1-1,\ldots,b_n-1)) = \sum_{i=1}^{n}\left((b_i-1)\prod_{i<j} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{i\leq j} b_j - \prod_{i<j} b_j\right) = \prod_i b_i - 1
$$

On a donc une fonction injective de $\prod_i ⟦0, b_i - 1⟧$ vers $⟦0, \prod_i b_i - 1⟧$. Comme on a égalité des cardinaux des deux ensembles, φ est une bijection.

Ainsi, on peut utiliser un algorithme semblable à la décomposition binaire pour associer à un nombre entre 0 et $\prod_i b_i - 1$ un élément de $\prod_i ⟦0, b_i - 1⟧$. Prenons $n \in ⟦0, \prod_i b_i - 1⟧$ puis calculons :

1. $a_1 = n \mod b_1$
2. $n_1 = \lfloor \frac{n}{b_1} \rfloor$
3. $a_2 = n_1 \mod b_2$
4. $n_2 = \lfloor \frac{n_1}{b_2} \rfloor$
5. ...

Un tel algorithme permet de construire en temps $O(\prod_i b_i)$ (soit le temps optimal) les éléments d'un produit cardinal. L'avantage est que l'occupation mémoire demandée est minimale (un seul entier) : on construit l'élément pour

$n = 0$, on fait le traitement souhaité ; puis on construit pour $n = 1$, on fait le traitement ; puis pour $n = 2$, etc. À chaque étape, on n'a besoin de retenir que n (en plus de la mémoire occupée par le traitement).

Exercise 2.218 (Question subsidiaire)**.** On peut tout d'abord critiquer le chiffre de 1 sur 73 millions avancé par Meadow, en remettant en cause l'hypothèse d'indépendance des morts subites du nourrisson. Ainsi certaines familles sont plus susceptibles que d'autres d'êtres frappées par ce syndrome, en raison par exemple de prédispositions génétiques.

Mais l'argument le plus important, même si ce chiffre était correct, c'est que le tribunal a succombé au sophisme du procureur en ignorant les probabilités a priori des autres possibilités, qui sont toutes très improbables. En effet, si la mort successive des deux nourrissons de causes naturelles est extrêmement improbable, leur double assassinat par leur propre mère l'est également. Il semble que personne n'ait songé à estimer cette probabilité durant le procès et a comparer la vraisemblance de ces deux événements hautement improbables. En 2004, Ray Hill, un professeur de mathématiques de l'Université de Salford publia un article estimant les probabilités de chacune des hypothèses, concluant que l'hypothèse du double accident était entre 4,5 et 9 fois plus probable que celle du double meurtre.

On peut considérer la décision de déclarer l'accusé innocent ou coupable comme un problème de probabilité. Si on note E l'événement correspondant à l'observation d'un indice mettant en cause l'accusé (par exemple une concordance du test ADN) et I l'événement correspondant à l'innocence du suspect, on peut considérer les probabilités conditionnelles suivantes :

$P(E|I)$ est la probabilité que l'indice à charge soit observé bien que l'accusé soit innocent (le test est un faux positif).

$P(I|E)$ est la probabilité que l'accusé soit innocent (I), sachant que l'on a observé la présence de l'indice (E).

C'est cette deuxième probabilité que le jury devrait prendre en compte pour prendre sa décision. En général, avec les techniques d'expertises policières modernes (par exemple un test ADN), la probabilité $P(E|I)$ est très faible. Le sophisme du procureur consiste à affirmer que, **par conséquent**, $P(I|E)$ est elle aussi très faible. Or le théorème de Bayes nous montre que ces probabilités sont différentes :

$$P(I|E) = P(E|I)\frac{P(I)}{P(E)}$$

où $P(I)$ est la probabilité de l'innocence de l'accusé a priori, indépendamment des indices récoltés, et $P(E)$ est la probabilité d'observer l'indice sur une personne quelconque, qu'elle soit coupable ou innocente. Le rapport de ces probabilités est donc susceptible de modifier la probabilité de l'innocence de l'accusé. Le sophisme du procureur ignore l'effet de ce terme, qui peut drastiquement changer la probabilité de l'innocence, par exemple si la culpabilité est a priori très peu probable ou si la probabilité d'observer un test positif est élevée (par exemple, une recherche dans une base de données contenant de nombreuses entrées d'ADN).

Retour à la Khôlle : Section 1.24.3.

2.73 Khôlle 73 : Tchebychev optimal, Inégalité de Chernoff

Exercise 2.219 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.220 (Problème principal)**.** Fixons $S \subseteq [1;d]$. On a $Y_S \in \{-1;+1\}$. Plus encore, Y_S est symétrique car les $(X_i)_{i\in S}$ le sont sont : $\mathbb{P}(Y_S = -1) = \mathbb{P}(Y_S = +1) = 1/2$.

On remarque que si $S \cap T = \emptyset$, alors on Y_S et Y_T sont indépendantes car elles sont construites à partir de variables indépendantes (les variables utilisées pour Y_S n'ont rien a voir avec celle utilisées pour Y_T), c'est-à-dire pour tout $(\varepsilon;\varepsilon') \in \{-1;+1\}^2$:

$$\mathbb{P}_{(Y_T=\varepsilon)}(Y_S=\varepsilon') = \mathbb{P}_{(\prod_{j\in T} X_j=\varepsilon)}\left(\prod_{i\in S} X_i = \varepsilon'\right) = \mathbb{P}(Y_S=\varepsilon') = 1/2$$

Supposons qu'on ait prouvé que si $\#S \cap T = k$, alors Y_S et Y_T sont indépendant quelque soient $S;T \subseteq [1;d]$. Soient maintenant $S;T \subseteq [1;d]$ tels que $\#S \cap T = k+1$ et $j \in S \cap T$. On a $Y_S = X_j Y_{S\setminus\{j\}}$ et $Y_T = X_j Y_{T\setminus\{j\}}$, d'après la formule des probabilités totales et l'hypothèse de récurrence (i.e. $Y_{S\setminus\{j\}}$ et $Y_{T\setminus\{j\}}$ sont indépendantes), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_S = 1 \wedge Y_T = 1) &= \mathbb{P}(X_j = 1)\mathbb{P}_{X_j=1}(Y_{S\setminus\{j\}} = 1 \wedge Y_{T\setminus\{j\}} = 1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_j = -1)\mathbb{P}_{X_j=-1}(Y_{S\setminus\{j\}} = -1 \wedge Y_{T\setminus\{j\}} = -1) \\
&= 1/2\,\mathbb{P}(Y_{S\setminus\{j\}} = 1)\mathbb{P}(Y_{T\setminus\{j\}} = 1) \\
&\quad + 1/2\,\mathbb{P}(Y_{S\setminus\{j\}} = -1)\mathbb{P}(Y_{T\setminus\{j\}} = -1) \\
&= 1/8 + 1/8 = 1/4 \\
&= \mathbb{P}(Y_S = 1)\mathbb{P}(Y_T = 1)
\end{aligned}$$

Ainsi, les $(Y_S)_{S\subseteq[1;d]}$ sont deux à deux indépendantes car le même calcul fonctionne pour montrer que $\mathbb{P}(Y_S = \varepsilon \wedge Y_T = \varepsilon') = \mathbb{P}(Y_S = \varepsilon)\mathbb{P}(Y_T = \varepsilon')$ pour toutes les valeurs de $(\varepsilon;\varepsilon') \in \{-1;+1\}^2$. On détermine : $\forall S, \mathbb{E}Y_S = 0, \mathbb{V}Y_S = 1$.

<u>NB :</u> La variable $Y_\emptyset$ est bien indépendante de toutes les autres.

Pour Z, on commence par remarquer que, d'après la formule du crible :

$$Z = \sum_{S\subseteq[1;d]} Y_S = \sum_{S\subseteq[1;d]} \prod_{i\in S} X_i = \prod_{i\in[1;d]} (1+X_i)$$

De fait, à partir du moment où l'un des X_i vaut -1, on a $Z = 0$, et inversement, si tous les X_i valent $+1$, alors $Z = 2^d$, soit avec probabilité $\mathbb{P}(\forall i, X_i = +1) = \prod_i \mathbb{P}(X_i = +1) = (1/2)^d$. On calcule la loi de Z :

x	-1	$+1$	0	2^d	$\mathbb{E}$	$\mathbb{V}$
$\mathbb{P}(X_i = x)$	$1/2$	$1/2$			0	1
$\mathbb{P}(Y_\emptyset = x)$	0	1			1	0
$\mathbb{P}(Y_S = x)$	$1/2$	$1/2$			0	1
$\mathbb{P}(Z = x)$			$1 - 1/2^d$	$1/2^d$	1	$2^d - 1$

On prendra le temps de vérifier qu'on a : $\mathbb{E}Z = \sum_S \mathbb{E}Y_S$ et $\mathbb{V}Z = \sum_S \mathbb{V}Y_S$.

Finalement, on a $\mathbb{P}(Z \geq 2^d) = 1/2^d$. On peut aussi appliquer la formule de Tchebychev :

$$\mathbb{P}(Z \geq t) = \mathbb{P}\left(\sum_{S \subset [1;d]} (Y_S - \mathbb{E}Y_S) \geq t\right) \leq \frac{\sum_S \mathbb{V}Y_S}{t^2} = \frac{2^d}{t^2}$$

Donc pour $t = 2^d$, on a égalité : la formule de Tchebychev est optimale si on suppose que les variables sont **deux à deux indépendantes**. Les $(Y_S)_S$ ne sont pas indépendantes au sens fort sans quoi $\mathbb{P}\left(Y_{\{1;2\}} = -1 \wedge Y_{\{1\}} = 1 \wedge Y_{\{2\}} = 1\right) = 1/8$, alors que $\mathbb{P}\left(Y_{\{1;2\}} = -1 \wedge Y_{\{1\}} = 1 \wedge Y_{\{2\}} = 1\right) = 0$ car l'évènement décrit est impossible. Si on dispose de variables indépendantes (au sens fort), alors il existe des inégalité de concentration plus puissantes comme l'inégalité de Chernoff.

Exercise 2.221 (Question subsidiaire)**.** On remarque que $\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq ta)$ pour tout $t > 0$ (car $x \mapsto e^{tx}$ est croissante). Dès lors, comme e^{tX} est une variable aléatoire positive, on peut appliquer l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq ta) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{ta}} = e^{-ta}\mathbb{E}(e^{tX})$$

Cette inégalité est vraie pour tout $t > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{tX})$ est finie.

Pour $S = \sum_i X_i$, on a $\mathbb{E}(S) = \sum_i \mathbb{E}(X_i) = np$ et surtout $\mathbb{E}(e^{tS}) = \mathbb{E}(\prod_i e^{tX_i}) = \prod_i \mathbb{E}(e^{tX_i})$. Or $e^{tX_i} \in \{1; e^t\}$ car $|X_i| \in \{0; 1\}$, donc $\mathbb{E}(e^{tS})$ est finie (comme produit d'espérances finies). En l'occurrence, $\mathbb{E}(e^{tX_i}) = (1-p)e^0 + pe^t = 1 + p(e^t - 1) \leq e^{p(e^t - 1)}$. Il s'en suit :

$$\mathbb{P}(S \geq a) \leq e^{-ta}\mathbb{E}(e^{tS}) \leq e^{-ta}\prod_i e^{p(e^t-1)} \leq e^{-ta}e^{np(e^t-1)}$$

En particulier, pour $a = k\mathbb{E}(S) = knp$, on a $\mathbb{P}(S \geq knp) \leq e^{np(e^t - kt - 1)}$. Comme cette formule est vraie pour tout $t > 0$, on peut prendre t tel que $e^t = k$ (c'est le point d'annulation de la dérivée de $t \mapsto e^t - kt - 1$), et on a $e^t - kt - 1 = k(1 - \ln k) - 1$ et finalement :

$$\mathbb{P}(S \geq knp) \leq \frac{e^{(k-1)np}}{k^{knp}} = \frac{1}{e^{np}}\left(\frac{e}{k}\right)^{knp}$$

Retour à la Khôlle : Section 1.25.1.

2.74 Khôlle 74 : Somme via Tchebychev, Inégalité de Hoeffding

Exercise 2.222 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.223 (Problème principal)**.** Si $X \sim \mathcal{B}(4n, 1/2)$, alors $\mathbb{P}(X = k) = \binom{4n}{k}\frac{1}{2^{4n}}$, $\mathbb{E}X = 2n$ et $\mathbb{V}X = n$.

On peut appliquer l'inégalité de Tchebychev :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{3n-1}\binom{4n}{k} &= 2^{4n}\mathbb{P}(X \in [n+1, 3n-1]) \\
&= 2^{4n}\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| < n) \\
&= 2^{4n}\left(1 - \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq n)\right) \\
&\geq 2^{4n}\left(1 - \frac{\mathbb{V}X}{n^2}\right) \\
&\geq \frac{n-1}{n}2^{4n}
\end{aligned}$$

Exercise 2.224 (Question subsidiaire)**.** Comme l'exponentielle est une fonction croissante, les inégalités $tS_n \geq \varepsilon t$ et $e^{tS_n} \geq e^{\varepsilon t}$ sont équivalentes. Il s'ensuit qu'on peut appliquer l'inégalité de Markov car la variable e^{tS_n} est positive :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}\left(e^{tS_n} \geq e^{\varepsilon t}\right) \\
&\leq \frac{1}{e^{\varepsilon t}}\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) \\
&\leq e^{-\varepsilon t}\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}\right) \\
&\leq e^{-\varepsilon t}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(e^{tX_k}\right) && \text{par indépendance} \\
&\leq e^{-\varepsilon t}\left(e^{\frac{t^2M^2}{2}}\right)^n && \text{par le lemme de Hoeffding} \\
&\leq \exp\left(-\varepsilon t + \frac{nM^2}{2}t^2\right)
\end{aligned}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $t > 0$, on peut optimiser en t pour trouver la meilleure borne. $t = \frac{\varepsilon}{nM^2} > 0$ est optimal et donne l'inégalité souhaitée pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2nM^2}\right)$$

N.B. : Cette inégalité est vraie dans une plus large mesure : si $\mathbb{P}(X_i \in [a_i, b_i]) = 1$, alors $\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right)$ et $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right)$. Cette inégalité est beaucoup beaucoup plus puissante que les inégalités de Markov ou Tchebychev ! C'est l'une des raisons pour lesquelles on aime bien décomposer des variables aléatoires en sommes de variables élémentaires.

Retour à la Khôlle : Section 1.25.2.

2.75 Khôlle 75 : Inégalité de Cantelli, Collectionneur de coupons

Exercise 2.225 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.226 (Problème principal)**.** Comme λ et u sont positifs, on constate que $(Y+u)^2 \geq (\lambda+u)^2$ est impliqué par $Y+u \geq \lambda+u$, donc la probabilité du second évènement est plus petite que celle du premier. Ainsi (rappel $\mathbb{E}(Y)=0$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \geq \lambda) &= \mathbb{P}(Y+u \geq \lambda+u)\\ &\leq \mathbb{P}\left((Y+u)^2 \geq (\lambda+u)^2\right)\\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left((Y+u)^2\right)}{(\lambda+u)^2}\\ &\leq \frac{\mathbb{E}(Y^2)+2u\mathbb{E}(Y)+u^2}{(\lambda+u)^2} = \frac{\sigma^2+u^2}{(\lambda+u)^2}\end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $u>0$, donc on peut optimiser en dérivant $f : u \mapsto \frac{\sigma^2+u^2}{(\lambda+u)^2}$, qui donne $(\lambda+u)^4 f'(u) = 2u(\lambda+u)^2 - (2u+2\lambda)(\sigma^2+u^2) = 2\lambda u^2 + 2(\lambda^2-\sigma^2)u - 2\lambda\sigma^2$. En particulier, $f'\left(\frac{\sigma^2}{\lambda}\right) = 0$. Dès lors, en appliquant pour $u = \frac{\sigma^2}{\lambda}$, on trouve :

$$\mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \frac{(\lambda^2\sigma^2+\sigma^4)/\lambda^2}{((\lambda^2+\sigma^2)/\lambda)^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\lambda^2}$$

On a bien démontré l'inégalité de Cantelli pour $\lambda > 0$.

Ensuite, on constate que $\mathbb{P}(Y \geq \lambda) = 1 - \mathbb{P}(Y < \lambda) = 1 - \mathbb{P}(-Y > -\lambda)$. Donc si $\lambda < 0$, comme $-Y$ a même espérance et même variance que Y, on trouve :

$$\mathbb{P}(Y \geq \lambda) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\lambda^2}$$

N.B. : Pour X une variable aléatoire avec une espérance non nulle (mais finie) et une variance σ^2, on peut remplacer Y par $X - \mathbb{E}(X)$ partout. En réunissant les deux inégalités, on trouve que $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2+\lambda^2}$. Cela est légèrement moins bien que l'inégalité de Tchebychev (asymptotiquement), mais utile dans certains cas. En particulier, les inégalités de Cantelli sont fonctionnent sans valeurs absolues (tout comme l'inégalité de Hoeffding ou de Chernoff) !

Exercise 2.227 (Question subsidiaire)**.** Notons $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$. Posons X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de manche que vous devez faire avant de gagner et X_2 celle pour votre adversaire. X_1 suit une loi géométrique $G(p_1)$ et X_2 suit une loi géométrique $G(p_2)$. Les deux variables sont indépendantes. Rappelons que si $X \hookrightarrow G(p)$, alors $\mathbb{P}(X \geq k) = q^{k-1}$. Cela peut se voir de deux manières : ou bien on constate que gagner après k manches est équivalent à échouer aux $k-1$ premières, ou bien on calcule $\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X=j) = \sum_{j=k}^{+\infty} pq^{j-1} = pq^{k-1} \sum_{j=0}^{+\infty} q^j q^{k-1} \frac{p}{1-q} = q^{k-1}$.

Dès lors, remporter la partie revient à effectuer moins d'essais que son adversaire, c'est-à-dire à ce que $X_1 < X_2$. Or on a, grâce à l'indépendance de X_1 et X_2 :

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 \geq k+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_1 q_1^{k-1} q_2^k = p_1 q_2 \sum_{j=0}^{+\infty} (q_1q_2)^j = \frac{p_1q_2}{1-q_1q_2}$$

Il y a deux manières de calculer la probabilité de l'égalité. Ou bien on calcule directement $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \sum_k \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = k)$, ou alors on sait qu'il y a égalité quand ni l'un ni l'autre n'a gagné, donc la probabilité d'égalité vaut :

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_1 q_1^{k-1} p_2 q_2^{k-1} = p_1 p_2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q_1q_2)^k = \frac{p_1p_2}{1-q_1q_2}$$

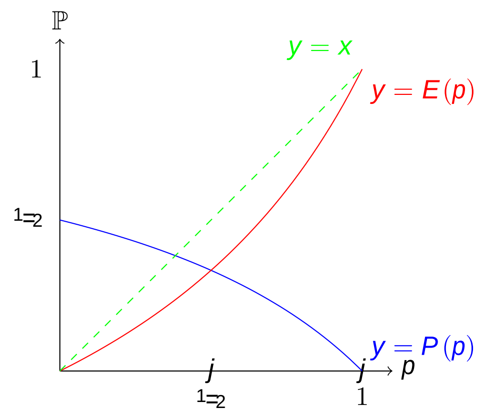
ou

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 1 - \mathbb{P}(X_1 < X_2) - \mathbb{P}(X_1 > X_2) = 1 - \frac{p_1q_2}{1-q_1q_2} - \frac{p_2q_1}{1-q_1q_2} = \frac{p_1p_2}{1-q_1q_2}$$

Si les deux joueurs sont de même niveau, notons $p = p_1 = p_2$. Alors, la probabilité d'égalité $E(p)$ devient $\frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{p(2-p)} = \frac{p}{2-p}$. Comme la probabilité que le premier joueur gagne est la même que celle que le deuxième joueur gagne, notons $P(p)$ cette probabilité. On a alors les probabilités totales (probabilité que le joueur 1 gagne + probabilité que le joueur 2 gagne + probabilité d'égalité = 1) : $P(p) + P(p) + E(p) = 1$. Donc :

$$P(p) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{2-p}\right) = \frac{1-p}{2-p}$$

Le jeu est fortement égalitaire quand les joueurs sont tous les deux aussi mauvais ($P(p) \to 1/2$ pour $p \to 0$), et très propice à l'égalité quand les deux joueurs sont également fort ($E(p) = 1$ pour $p \to 1$). Cette phrase est à relire plusieurs fois pour comprendre la différence entre les deux situations !



Taper "x*y/(1-(1-x)*(1-y))" sur Google ou WolframAlpha et régler le graphe sur $[0, 1]$ pour les trois axes pour voir à quoi ressemble la probabilité d'égalité en général.

Retour à la Khôlle : Section 1.25.3.

2.76 Khôlle 76 : Carrés magiques, L'autre produit

Exercise 2.228 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.229 (Problème principal)**.** On peut démontrer à la main que MG_n est un espace vectoriel, mais on peut aussi le faire efficacement : soit φ_i la forme linéaire qui a $M \in M_n$ associe la somme de sa i-ième ligne, ψ_j la somme de sa j-ième colonne et δ et d pour ses deux diagonales. Les Ker $(\varphi_i - \varphi_1)$ sont des hyperplans, et on a :

$$MG_n = \bigcap_{i=2}^{n} \text{Ker } (\varphi_i - \varphi_1) \cap \bigcap_{j=1}^{n} \text{Ker } (\psi_j - \varphi_1) \cap \text{Ker } (\delta - \varphi_1) \cap \text{Ker } (d - \varphi_1)$$

Non seulement MG_n est un espace vectoriel (comme intersection d'espaces vectoriels), mais on sait qu'en tant d'intersections d'hyperplans, sa dimension est au moins $n^2 - (n-1) - n - 2 = n(n-2) - 2$. On va voir qu'en réalité, cette construction est maladroite dans le sens où la dimension de MG_n est $n(n-2)$.

On ne connaît pas la dimension de l'espace de départ, donc on va montrer que Φ est un isomorphisme sans se servir des dimensions. D'une part, Φ est linéaire. Ensuite, montrons la surjectivité. Soit $(A, a_1, \dots, a_{n-2}) \in M_{n-2,n-1} \times \mathbb{R}^{n-2}$. On sait déjà ce que vaut $m_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n-2$ et $1 \leq j \leq n-1$. On sait aussi ce que doit valoir $m_{1,n}$ ainsi que $m_{n-1,1}, m_{n-1,3}, \dots, m_{n-1,n-2}$. Cherchons les autres coefficients, et notons $S = \sum_{i=1}^{n} m_{1,i}$ (valeur déjà déterminée par la première ligne). Puisqu'on connaît tous les coefficients de la j-ième ligne, avec $j \leq n-2$, sauf $m_{j,n}$, et que la somme des coefficients de la ligne doit valoir S, on détermine uniquement $m_{j,n}$ (qui vaut $S - \sum_{i<n} m_{j,i}$). On connaît aussi tous les coefficients de la première colonne, sauf $m_{n,1}$, et on sait que la somme fait S : ceci détermine uniquement $m_{n,1}$. On connaît ensuite tous les coefficient de la diagonale en bas à gauche vers en haut à droite sauf $m_{n-1,2}$. Ceci détermine uniquement ce coefficient (puisque la somme doit valoir S). On peut alors répéter le processus pour toutes les colonnes de la 2-ème à la $n-2$-ème : ceci détermine uniquement $m_{n,i}$ pour $i \leq n-2$. Reste à déterminer les quatre derniers coefficients, $m_{n-1,n-1}$, $m_{n-1,n}$, $m_{n,n-1}$ et $m_{n,n}$. Notons S_1 et S_2 la somme des coefficients déjà connus sur la colonne $n-1$ et sur la colonne n, S_3 et S_4 les sommes des coefficients déjà connus sur les lignes $n-1$ et n et S_5 la somme des coefficients déjà connus sur la diagonale principale. Une matrice magique solution doit vérifier le système d'équation :

$$\begin{cases} m_{n-1,n-1} + m_{n,n-1} & = S - S_1 \\ m_{n-1,n} + m_{n,n} & = S - S_2 \\ m_{n-1,n-1} + m_{n-1,n} & = S - S_3 \\ m_{n,n-1} + m_{n,n} & = S - S_4 \\ m_{n-1,n-1} + m_{n,n} & = S - S_5 \end{cases}$$

Dans ce système, une équation est redondante. En effet, si on fait $L_1+L_2-L_3$, on trouve à gauche $m_{n,n-1}+m_{n,n}$, comme dans le membre de gauche de L_4. Pour la partie droite, on trouve bien S_4 après quelques manipulations de sommes. Finalement, la bijectivité de φ se ramène à l'inversibilité de la matrice des quatre lignes L_1, L_2, L_3, L_5 du système ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{l'inverse étant} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, φ est bijective, et $MG_n \simeq M_{n-2,n-1} \times \mathbb{R}^{n-2}$, donc $\dim MG_n = (n-1)(n-2)+n-2 = n(n-2)$.

Exercise 2.230 (Question subsidiaire)**.** Appelons $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ les applications linéaires associées à A et B respectivement. On sait que :

$$fg(e_2) = e_2 \quad \text{et} \quad fg(e_3) = e_3$$

Dès lors, $gf(g(e_2)) = g(e_2)$. De même, $gf(g(e_3)) = g(e_3)$. Donc, gf laisse la famille $(g(e_2), g(e_3))$ inchangée. Or cette famille est une base, en effet, si $ag(e_2) + bg(e_3) = \vec{0}$, alors, en appliquant f, on a $ae_2 + be_3 = \vec{0}$, donc $a = b = 0$ car (e_2, e_3) est libre.

Ainsi, l'endomorphisme gf laisse une base inchangée : c'est l'identité. Il s'ensuit que $BA = I_2$.

Retour à la Khôlle : Section 1.26.1.

2.77 Khôlle 77 : Équation duale, Matrices vampires

Exercise 2.231 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.232 (Problème principal)**.** Si $Ax = b$ a une solution, alors pour y tel que $y^T A = \mathbf{0}^T$, on a :

$$0 = \mathbf{0}^T x = y^T A x = y^T b$$

Réciproquement, si $Ax = b$ n'a pas de solution, soit r le rang de A. On sait que b n'est pas dans l'image des colonnes de A, donc la matrice de taille $n \times (m+1)$ définie par $(A \mid b)$ a rang $r+1$. De même, la matrice $\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{array}\right)$ a rang $r+1$. De fait, $(\mathbf{0}^T \mid 1)$ est dans l'image des lignes de $(A \mid b)$. Soit y le vecteur des coefficients de cette dépendance linéaire. Alors : $y^T A = \mathbf{0}^T$ et $y^T b = 1 \neq 0$, ce qui est bien la réciproque recherchée.

Exercise 2.233 (Question subsidiaire)**.** On a :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix}$$

On s'amuse comme on peut...

(Pour ceux qui connaissent la théorie du polynôme caractéristique (vue en Spé), on est simplement en train de dire que $\chi(M) = X^2 - 11X + 0$, donc que $M^2 = 11M$. Or $11x = \overline{xx}$. On pourrait procéder de même avec des entrées de M à deux chiffres et $M^2 = 101M$.)

On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

Regardons la première entrée :

$$a^2 + bc = a^2 + ad = a(a+d) = 11a$$

De même :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + ad & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} = 11M$$

Réciproquement, soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $M^2 = 11M$. On note $\Delta = ad - bc$ et $t = a+d$. On veut prouver que $\Delta = 0$ et que $t = 11$. Un rapide calcul donne que $bc = \Delta - ad$, puis :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - \Delta & bt \\ ct & dt - \Delta \end{pmatrix}$$

Finalement, identifier les coefficients donne $\Delta = 0$ et $t = 11$.

Si on veut trouver une matrice $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{ab} & \overline{cd} \\ \overline{ef} & \overline{gh} \end{pmatrix}$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} \overline{abab} & \overline{cdcd} \\ \overline{efef} & \overline{ghgh} \end{pmatrix}$, il faut et il suffit que $\Delta = xt - zy = 0$ et que $\ = x + t = 101$. Par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 66 & 55 \\ 42 & 35 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6666 & 5555 \\ 4242 & 3535 \end{pmatrix}$$

Retour à la Khôlle : Section 1.26.2.

2.78 Khôlle 78 : Groupe d'Heisenberg, Hyperplan matriciel

Exercise 2.234 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.235 (Problème principal)**.** $H_3(A)$ est un sous-groupe du groupe $GL_3(A)$ car le produit de matrice triangulaires est triangulaire, l'inverse aussi, et la diagonale du produit vaut le produit des diagonales (donc la diagonale du produit est faite de 1, tout comme celle de l'inverse).

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & c+c'+ab' \\ 0 & 1 & b+b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a+a', b+b', c+c'+ab')$$

Ensuite, $(a, b, c)(-a, -b, -c+ab) = (0, 0, 0) = I_3$, et, par récurrence immédiate $(a, b, c)^n = (na, nb, nc + \frac{n(n-1)}{2} ab)$.

Ensuite, en notant $x = (a, b, c)$ et $y = (a', b', c')$, on trouve :

$$\begin{aligned} [x, y] &= (a, b, c)(a', b', c')(-a, -b, -c+ab)(-a', -b', -c'+a'b') \\ &= (a+a', b+b', c+c'+ab')(-a-a', -b-b', -c-c'+ab+a'b'+ab') \\ &= (0, 0, ab+a'b'+2ab'-(a+a')(b+b')) \\ &= (0, 0, ab'-a'b) \end{aligned}$$

Le centre $Z(H_3(A))$ correspond aux éléments $x \in H_3(A)$ tel que $\forall y \in H_3(A),\ [x, y] = (0, 0, 0)$. En particulier, si $x = (a, b, c)$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= [x, (0, 1, 0)] &= a \\ 0 &= [x, (-1, 0, 0)] &= b \end{aligned}$$

Donc $x = (0, 0, c)$. Réciproquement, si $x = (0, 0, c)$, alors pour tout $y \in H_3(A)$, on a bien $[x, y] = (0, 0, 0)$. Finalement $Z(H_3(A)) = 0 \times 0 \times A \simeq A$ (attention, pour dire que cela est isomorphe à A, il faut vérifier que la loi est la bonne).

D'autre part, si $x, y \in H_3(A)$, alors $[x, y] \in 0 \times 0 \times A$, donc $DG(H_3(A)) \subset 0 \times 0 \times A$. Réciproquement, pour $c \in A$, on a $[(c, 0, 0), (0, 1, 0)] = (0, 0, c)$, donc $DG(H_3(A)) = 0 \times 0 \times A \simeq A$.

Un groupe G est abélien si et seulement si $Z(G) = G$ si et seulement si $DG(G) = 0$. Donc $H_3(A)$ est abélien si et seulement si $A = 0$ (l'anneau trivial).

Dans $H_3(\mathbb{Z})$, remarquons que $[(1,0,0),(0,1,0)] = (0,0,1)$, que $(1,0,0)^{-1} = (-1,0,0)$ et que $(0,1,0)^{-1} = (0,-1,0)$. De fait, pour $a,b,c \in \mathbb{Z}$, on a : $(1,0,0)^a(0,1,0)^b = (a,0,0)(0,b,0) = (a,b,ab)$. Dès lors (rappel : $H_3(\mathbb{Z})$ n'est pas commutatif) :

$$\begin{aligned}(a,b,c) &= (1,0,0)^a(0,1,0)^b(0,0,1)^{-ab} \\ &= (1,0,0)^a(0,1,0)^b[(1,0,0),(0,1,0)]^{-ab} \\ &= (1,0,0)^a(0,1,0)^b\left((0,1,0)(1,0,0)(0,1,0)^{-1}(1,0,0)^{-1}\right)^{-ab}\end{aligned}$$

Finalement, $H_3(\mathbb{Z}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, engendré comme groupe.

Exercise 2.236 (Question subsidiaire)**.** Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. Notons-là grâce aux morphismes coordonnées : $f(A) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} a_{i,j}$. On veut trouver A inversible telle que $f(A) = 0$.

- S'il existe $i \neq j$ tel que $\lambda_{i,j} \neq 0$, alors on peut poser $S = \sum_j \lambda_{j,j}$ puis $A = I_n - \frac{S}{\lambda_{i,j}} E_{i,j}$. A est triangulaire avec des 1 sur sa diagonale (car $i \neq j$), donc inversible. Par ailleurs, $f(A) = \sum_k \lambda_k - \frac{S}{\lambda_{i,j}} \lambda_{i,j} = 0$.
- Si pour tout $i \neq j$, on a $\lambda_{i,j} = 0$, alors f est la trace, et on cherche une matrice inversible de trace nulle. Il y en a plein, la matrice de passage de la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ à $(e_n, e_1, \dots, e_{n-1})$ convient par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour n'importe quel hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$, on a bien construit dans tout les cas une matrice (explicite pour une forme linéaire donnée) qui est inversible.

Retour à la Khôlle : Section 1.26.3.

2.79 Khôlle 79 : Lemme de Whitehead, Matrice de rang 1

Exercise 2.237 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.238 (Problème principal)**.** Multiplier A à gauche par $e_{i,k}(\lambda)$ revient à ajouter à la i-ième ligne de A sa j-ième ligne multipliée par λ, donc $e_{i,j}(\lambda)e_{i,j}(\mu) = e_{i,j}(\lambda) + \mu$ (en ligne i une ligne avec un seul 1 en colonne j) $=$

$e_{i,j}(\lambda+\mu)$. En outre, $e_{i,j}(\lambda)e_{k,\ell}(\mu) = I_n + \lambda E_{k,\ell} + \mu E_{i,j}$ si $i \neq \ell$ et $j \neq k$. En particulier, $e_{i,j}(\lambda)$ et $e_{k,\ell}(\mu)$ commutent si $i \neq \ell$ et $j \neq k$, donc $[e_{i,j}(\lambda), e_{k,\ell}(\mu)] = I_n$. Ensuite, si $j = k$ mais $i \neq \ell$, alors $e_{i,j}(\lambda)e_{j,\ell}(\mu) = I_n + \lambda E_{i,j} + \mu E_{j,\ell} + \lambda\mu E_{i,\ell}$, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
[e_{i,j}(\lambda), e_{i,j}(\mu)] &= e_{i,j}(\lambda)e_{j,k}(\mu)e_{i,j}(-\lambda)e_{j,k}(-\mu) \\
&= (I_n + \lambda E_{i,j} + \mu E_{j,\ell} + \lambda\mu E_{i,\ell})(I_n - \lambda E_{i,j} - \mu E_{j,\ell} + \lambda\mu E_{i,\ell}) \\
&= I_n + \lambda\mu E_{i,\ell} = e_{i,\ell}(\lambda\mu)
\end{aligned}$$

Notons enfin que $e_{i,j}(\lambda)$ et $e_{i,j}(\mu)$ commutent, donc $[e_{i,j}(\lambda), e_{i,j}(\mu)] = I_n$.

On sait que $[E_n, E_n] \subset E_n$ car un commutateur est un produit d'éléments du groupe donc est dans le groupe. De fait, $DG(E_n)$, le groupe engendré par $[E_n, E_n]$, est bien dans E_n. D'autre part, on a montré que tous les générateurs de E_n peuvent être écrits comme des commutateurs, donc $E_n \subset DG(E_n)$. Cela donne bien $DG(E_n) = E_n$ (cette relation fait de E_n un groupe parfait).

Un rapide calcul donne :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = e_{2,1}(a^{-1})e_{1,2}(1-a)e_{2,1}(-1)e_{1,2}(1-a^{-1})$$

Ensuite, soit $A = [a_{i,j}]_{i,j}$. Dès lors, la matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ s'écrit comme $\prod_{i,j} e_{i,n+j}(a_{i,j})$. On peut décortiquer cela en se rendant compte que, d'une part, toutes ces matrices de transvection commutent (par les relations de Steinberg), et d'autre part, multiplier $\left(\begin{array}{c|c} I_n & \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ par $e_{i,n+j}(a_{i,j})$ à gauche ajoute le coefficient $a_{i,j}$ dans la cellule $(i, n+j)$.

Il s'ensuit que, si $B \in GL_n$, alors $\left(\begin{array}{c|c} B & 0_n \\ \hline 0_n & B^{-1} \end{array}\right) \in E_{2n}$ car on peut écrire les transvections par blocs $\tilde{e}_{1,2}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ et $\tilde{e}_{2,1}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_n \\ \hline A & I_n \end{array}\right)$ et s'en servir dans le calcul :

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0_n \\ \hline 0_n & B^{-1} \end{array}\right) = \tilde{e}_{2,1}(B^{-1})\tilde{e}_{1,2}(I_n - B)\tilde{e}_{2,1}(-I_n)\tilde{e}_{1,2}(I_n - B^{-1})$$

Enfin, si $A, B \in GL_n$, alors :

$$\left(\begin{array}{c|c} [A,B] & 0_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_n \\ \hline 0_n & A^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B & 0_n \\ \hline 0_n & B^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} (BA)^{-1} & 0_n \\ \hline 0_n & BA \end{array}\right)$$

Donc avec le morphisme (évident) $M \mapsto \left(\begin{array}{c|c} M & 0_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$, on a que $[GL_n, GL_n] \simeq \left\{ \left(\begin{array}{c|c} [A,B] & 0_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right) ; A, B \in GL_n \right\} \subset E_{2n}$. Ainsi, le groupe dérivé de GL_n (le groupe engendré par les $[GL_n, GL_n]$) est isomorphe à un sous-groupe de E_{2n}.

<u>**N.B. :**</u> Il existe un moyen de rendre les choses plus jolies. En considérant GL_∞, le groupe général linéaire, dont les éléments sont les matrices infinies inversibles qui ne diffèrent de la matrice identité (infinie) que par un nombre fini de leurs coefficients, et E_∞ son pendant pour les transvections, on a : $[GL_\infty, GL_\infty] = [E_\infty, E_\infty] = E_\infty$. Cette notion est liée à la **K**-théorie.

Exercise 2.239 (Question subsidiaire)**.** Notons $U \in \mathcal{M}_{n,1}$ la colonne donnant les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. Notons $A \in \mathcal{M}_{1,n}$ la ligne des coefficients $(\mathcal{B})$. Alors, on constate que U est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'application $t \mapsto tu$ qui est $\mathbb{K} \to E$. De la même manière, A est la matrice de $: E \to \mathbb{K}$ dans la base $\mathcal{B}$. Or f est la composée des deux application précédentes, donc M, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $M = UA$.

On vérifie que M est bien de rang 1 si A est non nul (le rang d'un produit est majoré par le rang de ses facteurs), et en effet, Im f = Vect$u$ qui est de dimension 1.

<u>**N.B. :**</u> Toute matrice de rang 1 peut s'écrire comme le produit d'une colonne par une ligne. Dès lors, pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1, on peut trouver $\in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $u \in E$ tels que $f : x \mapsto (x)u$.

Retour à la Khôlle : Section 1.27.1.

2.80 Khôlle 80 : Hyperplan de matrice stable par multiplication

Exercise 2.240 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.241 (Problème principal)**.** On sait que dim $\mathcal{M}_n$ = dim $\mathcal{M}_n = n^2$. En outre, $\varphi_{E_{i,j}}(M) = tr(E_{i,j}M) = m_{i,j}$ car $E_{i,j}M$ est la matrice dont la i-ième ligne est la j-ième ligne de M. On a donc bien toutes les formes linéaires coordonnées, qui forment une base de $\mathcal{M}_n$. On aurait aussi pu constater que si $tr(AM) = 0$ pour tout M, alors $tr(AE_{i,j}) = a_{i,j} = 0$, donc $A = 0_n$, ce qui montre que Φ est injective car son noyau est nul.

Dès lors, comme tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire, et que toute forme linéaire peut être décrite comme φ_A pour une certaine matrice A, il existe bien $A \in \mathcal{M}_n$ tel que $H = \operatorname{Ker} \varphi_A$ (on notera d'ailleurs que A est unique pour H donné).

Soit $B \in H$ et $C \in \mathcal{M}_n$ tel que $H \quad C\mathbb{K} = \mathcal{M}_n$. On a alors $\varphi_A(C) \neq 0$, disons $\frac{\varphi_A(CB)}{\varphi_A(C)} =$. Regardons la forme linéaire $: M \mapsto \varphi_A(MB) \quad \varphi_A(M)$. Si $M \in H$, alors $MB \in H$ car H est stable par produit, donc $\varphi_A(MB) = 0$, en outre $\varphi_A(M) = 0$, donc $(M) = 0$. De plus, $(C) = 0$ par construction de . Donc est la forme nulle : $\forall M, \quad \varphi_A(M) = tr(\quad AM) = tr(AMB) = tr(BAM)$. Or Φ est injective, donc $A = BA$.

Si Im $A = \{0\}$, alors $A = 0_n$, donc φ_A est la forme nulle, ce qui n'est pas le cas car Ker φ_A est un hyperplan. Donc les constructions de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont valides. Comme P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, la matrice $B' = P^{-1}BP$ est la matrice de B dans la base $\mathcal{C}$. Soit y_1 le premier vecteur de $\mathcal{C}$, qui dans l'image de A par construction, disons $y_1 = Ax_1$. Alors, comme $BA = \quad A$, on a $By_1 = BAx_1 = \quad Ax_1 = \quad y_1$. Cela signifie que le premier vecteur de la base $\mathcal{C}$ est envoyé par B sur un multiple de lui-même : la première colonne de $P^{-1}BP$

est de la forme $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$. En particulier, on vient de montrer que l'image de H par l'application linéaire $M \mapsto P^{-1}MP$ a une dimension au plus de $n^2 - (n-1)$.

Or cette application est un isomorphisme. En effet, elle est linéaire et son inverse est $N \mapsto PNP^{-1}$. Il s'ensuit que l'image de H par $M \mapsto P^{-1}MP$ est un hyperplan de M_n et a de fait dimension n^2-1. D'où : $n^2-(n-1) \geq n^2-1$ puis $n=2$ (pour $n=1$, il n'y a pas d'hyperplan non nul). H est alors de dimension $2^2-1=3$ et l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ envoie H dans T_2 qui est lui-même de dimension 3 : $H \simeq T_2$.

Exercise 2.242 (Question subsidiaire)**.** Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, notons $A_\lambda = A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & -1 & -1\\ 1 & -1 & -\lambda & -1\\ 1 & -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$. On effectue ensuite un pivot de Gauss (sans se préoccuper de l'inverse) :

$$A_\lambda \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda\\ 1 & -1 & -\lambda & -1\\ 1 & -\lambda & -1 & -1\\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -1+\lambda\\ 0 & -\lambda+1 & 0 & -1+\lambda\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda\\ 0 & -\lambda+1 & 0 & -1+\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -1+\lambda\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda\\ 0 & -\lambda+1 & 0 & -1+\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -1+\lambda\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2-\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda\\ 0 & -\lambda+1 & 0 & -1+\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -1+\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}$$

Les racines évidentes de $3-X^2-2X$ étant 1 et -3 et $-X+1$ s'annulant pour 1, on en déduit que A_λ n'est pas inversible pour $\lambda \in \{1, -3\}$.

<u>**Pour $\lambda = -3$:**</u>, on a $A_{-3} = A + 3I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. On remarque que $\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ est dans le noyau de A_{-3}, et que la matrice est de rang 3 car on a montré au dessus qu'elle est équivalente à une matrice triangulaire supérieure de diagonale $(1,4,4,0)$. Donc $AX = -3X \iff X \in \mathrm{Vect}((-1,1,1,1)^T)$.

<u>**Pour $\lambda = 1$:**</u>, on a $A_1 = A - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On remarque que $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ sont dans le noyau de A_1 et sont libre. En outre, A_1 est de rang au moins 1 car elle a une colonne non nulle. Donc $AX = X \iff X \in \mathrm{Vect}((1,1,0,0)^T,(1,0,1,0)^T,(1,0,0,1)^T)$.

Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $AP = PD$ où $D = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne bien le $A = PDP^{-1}$ souhaité. On retrouvera ce genre de calculs (et plus encore) dans le chapitre de diagonalisation de Spé.

Retour à la Khôlle : Section 1.27.2.

2.81 Khôlle 81 : Lemme de Schur, Centre du groupe linéaire

Exercise 2.243 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.244 (Problème principal)**.** Premièrement, pour $B \in G$, comme B est inversible, $i(B)$ est correctement définie et est un automorphisme de M_n car c'est une application linéaire et si $i(B)(M) = N$, alors $M = BNB^{-1}$ puis $N = B^{-1}MB$, donc Im $i(B) = M_n$. Ensuite, si $A, B \in G$, alors $i(AB)(M) = (AB)M(AB)^{-1} = A(BMB^{-1})A^{-1} = i(A) \circ i(B)(M)$ et $i(B^{-1})(M) = B^{-1}MB = i(B)^{-1}(M)$ par le raisonnement précédent. De fait, i est un morphisme de groupe de $G \to$ Aut(M_n).

Attention à ne pas confondre l'injectivité de i avec l'injectivité de $i(B)$: celle de i revient à Ker $i = \{I_n\}$ car I_n est l'élément neutre du groupe G (le noyau est ici le noyau d'un morphisme de groupe). Cependant, si $\lambda I_n \in G$ pour $\lambda \neq 0$, alors $i(\lambda I_n)(M) = \lambda I_n M \frac{1}{\lambda} I_n = M$, donc $i(\lambda I_n) = id_{\text{Aut}(M_n)}$. Ainsi, s'il existe $\lambda \notin \{0, 1\}, \lambda I_n \in G$, alors i n'est pas injective.

Réciproquement, si $i(B) = id_{\text{Aut}(M_n)}$, alors B commute avec toutes les matrices de M_n car $i(B)(M) = M$ revient à $BM = MB$. Donc B est une homothétie. Si la seule homothétie de G est l'identité, alors i est bien injective car sont noyau (de morphisme de groupe) est réduit à $\{I_n\}$.

Si $M \in M_n^G$, alors, soit $x \in$ Ker M, on a $Mx = \vec{0}$, et on voudrait savoir si, pour $B \in G$, $M(Bx) = \vec{0}$. On sait que $B^{-1}MBx = Mx = \vec{0}$, or B^{-1} est injective, donc MBx est l'unique antécédant de $\vec{0}$: $MBx = \vec{0}$. Ainsi, Ker M est bien stable par G.

De la même manière, si $y \in$ Im M, On veut savoir si $By \in$ Im M pour $B \in G$. Soit $x \in E$ tel que $Mx = y$. Dès lors : $B^{-1}MBx = Mx = y$ puis $M(Bx) = By$, donc $By \in$ Im M. Im M est bien stable par G.

Maintenant, si E est irréductible pour G, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de sous-espace de E non trivial et stable par G, alors si $M \in M_n^G$, alors Ker M et Im M sont des sous-espaces triviaux de E : M est nulle (Ker $M = E$) ou inversible (Ker $M = \{\vec{0}\}$). Dès lors : $M_n^G \subseteq \{0_n\} \cup GL_n$.

Cependant, M_n^G est aussi un espace vectoriel (en tant qu'intersection des Ker $(Id - i(B))$ pour $b \in G$), et $I_n \in M_n^G$ par un calcul évident. Donc dim M_n^G. Si on suppose que dim $M_n^G \geq 2$, alors $(M, N) \in M_n^G$ une famille libre. Dans ce cas, la méthode du pivot de Gauss permet de triangulariser $N + \lambda N$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$, et le choix d'un bon λ permet d'annuler l'un des coefficients diagonaux. Cela signifie que GL_n ne content pas de plan afin (un meilleur argument sera donné en Spé), donc la dimension de M_n^G ne peut pas être 2 ni plus : $\dim M_n^G = 1$.

Exercise 2.245 (Question subsidiaire)**.** On a envie de dire que les matrices de GL_n qui commutent avec toutes les matrices de GL_n sont les homothétie, de la même manière que les matrices de M_n qui commutent avec toutes les matrices de M_n sont les homothétie, mais attention, ça n'est pas évident, car pour montrer la propriété pour M_n, on utilise les $E_{i,j}$, qui ne sont pas dans GL_n.

Il reste cependant clair que les homothéties sont dans GL_n et commutent avec toutes les matrices de GL_n. Étudions la réciproque. Soit $A \in GL_n$ qui commute avec toutes les matrices de GL_n. En particulier, A commute avec les matrices de transvections $T_{i,j} = I_n + E_{i,j}$ pour $i \neq j$ car $T_{i,j} \in GL_n$, donc $AT_{i,j} = T_{i,j}A$. Or : $T_{i,j}A = A$+une matrice avec sur la i-ième ligne la j-ième ligne de A ; et $AT_{i,j} = A$+une matrice avec sur la j-ième colonne la i-ième colonne de A. On en déduis que $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$: A est diagonale. Reste à montrer que les $a_{i,i}$ ont tous la même valeur. Or, $AT_{1,i} = T_{1,i}A$, donc, en regardant le coefficient en $1,i$: $a_{1,1} = a_{i,i}$: A est une homothétie (non nulle car $A \in GL_n$).

Retour à la Khôlle : Section 1.27.3.

2.82 Khôlle 82 : Problème d'optimisation, Norme L^1

Exercise 2.246 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.247 (Problème principal)**.** La dérivé de $x \mapsto e^{-x}f(x)$ est $x \mapsto e^{-x}(f'(x) - f(x))$, donc, pour $f \in E$:

$$\int_0^1 e^{-t}(f'(t) - f(t))\mathrm{d}t = \left[e^{-x}f(x)\right]_0^1 = e^{-1}$$

Ensuite, comme $e^{-t} \leq 1$ pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\frac{1}{e} = \int_0^1 e^{-t}(f'(t) - f(t))\mathrm{d}t \leq \int_0^1 e^{-t}|f'(t) - f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 |f'(t) - f(t)|\mathrm{d}t$$

S'il y a égalité alors $\int_0^1 e^{-t}|f'(t) - f(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 |f'(t) - f(t)|\mathrm{d}t$. Cette égalité revient à $\int_0^1 (1 - e^{-t})|f'(t) - f(t)|\mathrm{d}t = 0$. Or si $f' \neq f$, alors l'intégrande est positive sur $[0,1]$ et strictement positive en au moins un point, donc l'intégrale serait non nulle. Il s'ensuit que $f(x) = \lambda e^x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $f \in E$, cela est impossible : il n'y a pas de cas d'égalité.

La fonction f est C^1 sur $[0, 1/n[$ et sur $]1/n, 1]$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. En $1/n$, elle est continue car les limites à gauche et à droite coïncident (de valeur

$e^{1/n}-1$). Sa dérivée sur $[0;1/n[$ vaut $f_n'(x) = n\left((2-2x)+(2x-nx^2)\right)e^{x-1} = n\left(2-nx^2\right)e^{x-1}$ et sur $[1/n;1]$, elle vaut $f_n'(x) = e^{x-1}$. Là encore, les limites à droite et à gauche coïncident en $1/n$, donc f_n est bien C^1 sur $[0;1]$: $f_n \in E$.

Reste à calculer $\int_0^1 |f_n'-f_n|$. Les fonctions f_n' et f_n sont égales sur $[1/n;1]$, et leur différence vaut $2n(1-nx)e^{x-1}$ sur $[0;1/n]$. Donc, en effectuant le changement de variable $u = nx$:

$$\int_0^1 |f'-f| = \int_0^{1/n} 2n(1-nt)e^{t-1}\mathrm{d}t = \frac{2n}{e}\int_0^1 (1-u)\,e^{\frac{u}{n}}\,\frac{\mathrm{d}u}{n} = \frac{2}{e}\int_0^1 (1-u)e^{u/n}\mathrm{d}u$$

Ensuite, $\frac{2}{e}\int_0^1 (1-x) = \frac{2}{e}\frac{1}{2} = \frac{1}{e}$. D'autre part, sur $[0;1]$, $x \mapsto e^{x/n}$ est majorée par $e^{1/n}$, donc on obtient :

$$I_n - \frac{1}{e} \le \frac{2}{e}\int_0^1 (1-t)\left(e^{t/n}-1\right)\mathrm{d}t \le \frac{2}{e}\int_0^1 (1-t)\left(e^{1/n}-1\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{e}\left(e^{1/n}-1\right)$$

En particulier, quand $n \to +\infty$, on trouve $I_n \to \frac{1}{e}$, donc on a montré que $\frac{1}{e}$ est la borne inférieure $\inf_{f\in E}\int_0^1 |f'-f|$: la valeur $\frac{1}{e}$ minore $\left\{\int_0^1 |f'-f|\right\}$ pour $f \in E$, et il existe une suite d'élément de $\left\{\int_0^1 |f'-f| \; ; \; f \in E\right\}$ qui tend vers $\frac{1}{e}$.

Exercise 2.248 (Question subsidiaire)**.** Notons $M = \sup f$ et $u_n = \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n}$.

Comme $\forall x,\ 0 \le f(x) \le M$, on a $\int_a^b f^n \le \int_a^b M^n = (b-a)M^n$. Donc $u_n \le M(b-a)^{1/n}$.

Par ailleurs, soit $\varepsilon > 0$ et c tel que $f(c) = M$ (qui existe parce que f est une fonction continue sur un segment). Soit alors I, un intervalle autour de c sur lequel $\forall x \in I,\ f(x) \ge M - \varepsilon$. Notons δ la longueur de I. Alors $u_n \ge \delta^{1/n}(M-\varepsilon)$. Or $\delta^{\frac{1}{n}} \to 1$ quand $n \to +\infty$. Donc pour n assez grand, $\delta^{1/n} \ge 1-\varepsilon$, d'où, à partir d'un certain rang :

$$u_n \ge (1-\varepsilon)(M-\varepsilon) \ge M-(M+1)\varepsilon$$

De la même manière, quand $n \to +\infty$, $(b-a)^{1/n} \to 0$, donc, à partir d'un certain rang, on a $u_n \le M+\varepsilon$.

Il s'ensuit que, à partir d'un certain rang :

$$M-(M+1)\varepsilon \le u_n \le M+\varepsilon$$

Cela montre que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

On a déjà étudié la limite de v_n pour $g = 1$. Si maintenant g est continue strictement positive sur $[a;b]$, elle est bornée et atteint ses bornes, ainsi $m_g = \min g > 0$ et $M_g = \max g > 0$. Notons $M_f = \max f$ pour clarifier. Dès lors, on a :

$$v_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \le M_g^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \to M_f$$

et

$$v_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq m_g^{1/n} \left(\int_a^b (f(x))^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \to M_f$$

Donc $v_n \to M_f$ quand $n \to +\infty$, quel que soit g.

<u>**N.B. :**</u> La première partie de cet exercice conduit à un résultat important. On peut considérer l'ensemble des fonctions telles que $\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$ est finie (f n'étant pas nécessairement continue sur $[a;b]$, mais par exemple seulement continue sur $]a;b[$). Cet ensemble forme un espace vectoriel (ce n'est pas évident), *l'espace* L^p, qu'on peut munir d'une notion de distance, la *norme* L^p définie par $\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$. L'égalité ci-dessus montre que l'espace L^∞ s'interprète comme l'espace des fonctions bornées.

Retour à la Khôlle : Section 1.28.1.

2.83 Khôlle 83 : Changement de variable, Minoration de $|f''|$

Exercise 2.249 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.250 (Problème principal)**.** L'intégrale d'une fonction sur un intervalle symétrique est égale à l'intégrale de sa partie paire. En effet, si $f = g + h$ avec g paire et h impaire, alors :

$$\int_{-a}^a f = \int_{-a}^a g + \int_{-a}^a h = \int_{-a}^a g = 2\int_0^a g$$

Or on sait que la partie paire de f est $x \mapsto 1/2\,(f(x) + f(-x))$, donc on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a \frac{p(x)}{1+t(x)^{i(x)}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-a}^a \left(\frac{p(x)}{1+t(x)^{i(x)}} + \frac{p(-x)}{1+t(-x)^{i(-x)}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-a}^a p(x)\frac{1+t(x)^{-i(x)} + 1 + t(x)^{i(x)}}{\left(1+t(x)^{i(x)}\right)\left(1+t(x)^{-i(x)}\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-a}^a p(x)\frac{2 + t(x)^{i(x)} + \frac{1}{t(x)^{i(x)}}}{1+t(x)^{i(x)} + \frac{1}{t(x)^{i(x)}} + t(x)^{i(x)}\frac{1}{t(x)^{i(x)}}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-a}^a p(x) \times 1\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a p(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On en déduit que cette intégrale ne dépend pas de t ni de i (du moment que p et t sont paires et i impaire).

En particulier, les deux intégrales proposées sont égales et valent :

$$\int_0^e x^4 = \frac{e}{5}$$

Exercise 2.251 (Question subsidiaire)**.** Il faut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange. Si on cherche à l'appliquer entre 0 et 1, on n'exploitera pas les deux informations $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 0$. L'idée est de l'appliquer au choix entre 0 et $1/2$ ou entre $1/2$ et 1, suivant la position de $f(1/2) - \frac{f'(1/2)}{2}$ par rapport à $1/2$. Précisément :

- Si $f(1/2) \leq 1/2$, alors on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[1/2, 1]$:

$$\left| f(1/2) - f(1) - \frac{1}{2!} f'(1) \right| \leq \frac{\sup_{[1/2,1]} |f''|}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

  Or $f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$, donc $\left| f(1/2) - f(1) - \frac{1}{2!} f'(1) \right| = 1 - f(1/2) \geq \frac{1}{2}$, puis $\sup_{[1/2,1]} |f''| \geq 4$.

- Si $f(1/2) \geq 1/2$, alors on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0, 1/2]$:

$$\left| f(1/2) - f(0) - \frac{1}{2!} f'(0) \right| \leq \frac{\sup_{[0,1/2]} |f''|}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

  Or $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$, donc $\left| f(1/2) - f(0) - \frac{1}{2!} f'(0) \right| = f(1/2) \geq \frac{1}{2}$, puis $\sup_{[0,1/2]} |f''| \geq 4$.

Dès lors, on sait que f'' est une fonction continue dont le suprémum est supérieur à 4 : par continuité, il existe au moins un point $c \in [0, 1]$ tel que $f''(c) \geq 4$.

Plus généralement, l'utilisation d'un "point de transfert" comme $1/2$ ci-dessus permet parfois d'améliorer les inégalités en utilisant des conditions sur deux bords en même temps, ici en 0 et en 1.

Retour à la Khôlle : Section 1.28.2.

2.84 Khôlle 84 : Majoration polynômiale, Riemann-Lebesgue

Exercise 2.252 (Question de cours)**.** Regardons l'image de $\sigma(a)$ par $\tau = \sigma t \sigma^{-1}$. On trouve $\tau(\sigma(a)) = \sigma(t(a)) = \sigma(b)$. De la même manière, $\tau(\sigma(b)) = \sigma(a)$. Si $k \notin \{\sigma(a), \sigma(b)\}$, alors soit j tel que $\sigma(j) = k$ (ce qui existe car σ est une bijection) : $j \notin \{a, b\}$, donc $t(j) = j$, puis $\tau(k) = \sigma(t(j)) = \sigma(j) = k$. Ainsi : $\tau = (\sigma(a)\ \sigma(b))$ (la transposition qui échange $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$).

Exercise 2.253 (Problème principal)**.** Comme P est de degré impair, il possède une racine réel, disons a. Alors, par la propriété de l'énoncé : $\forall n, |f^{(n)}(a)|$

$|P(a)| = 0$. Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}$, appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[a;x]$ (ou $[x;a]$, c'est selon) :

$$|f(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!} \sup_{[a;x]} |f^{(n)}| \leq \frac{(x-a)^n}{n!} \sup_{[a;x]} |P|$$

Le terme $\sup_{[a;x]} |P|$ ne dépend pas de n, donc quand $n \to +\infty$, le membre de droite tend vers 0, donc $f(x) = 0$. f est la fonction nulle.

Si P est autorisée à être pair, alors l'exemple $P = 1$ et $f = \sin$ montre qu'on peut trouver une fonction non nulle dont toutes les dérivées sont bornées par P.

N.B. : Par contre, on a montré quelque chose de plus puissant : si f a toutes ses dérivées nulles en un même point a, alors elle est nulle ou bien la suite $(f^{(n)}(x))_n$ doit croître au moins aussi vite que $\frac{n!}{(x-a)^n}$. L'exemple usuel $x \mapsto e^{-1/x^2}$, qui a toutes ses dérivées nulles en 0 est donc plutôt représentatif de ce type de fonctions (elles se construisent avec des exponentielles, typiquement).

Exercise 2.254 (Question subsidiaire)**.** Soit $a_1 < \dots < a_p$ une subdivision adaptée à f et y_i les valeurs prises par f sur $]a_i;a_{i+1}[$. On a :

$$u_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \sum_i y_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_i y_i\left(\cos(na_{i+1}) - \cos(na_i)\right)$$

Soit M la plus grande valeur des y_i (qui sont en nombre fini par définition. Alors :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n}\sum_i M \times 2 = \frac{2Mp}{n}$$

Où p est la taille de la subdivision (pour rappel).

Ainsi, quand $n \to +\infty$, on a bien $u_n \to 0$.

Si f est continue par morceaux, alors soit $\varepsilon > 0$ et φ une fonction en escalier proche de f à ε près : $\forall x \in [a;b],\ |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Dès lors, $u_n = \int_a^b \varphi(x)\sin(nx)\mathrm{d}x + \int_a^b (f(x) - \varphi(x))\sin(nx)\mathrm{d}x$. Pour n assez grand, le premier terme est majoré (en valeur absolue) par ε car on sait qu'il tend vers 0 vu que φ est en escalier. Le second terme, quant à lui, est majoré par :

$$\left|\int_a^b \left(f(x) - \varphi(x)\right)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)||\sin(nx)|\mathrm{d}x \leq (b-a)\varepsilon \times 1$$

Finalement, on a bien que, pour tout $\varepsilon > 0$, $|u_n| \leq (b - a + 1)\varepsilon$: la suite tend vers 0.

N.B. : Ce lemme assure que les coefficients d'une transformée de Fourier (ici, discrète, mais cela fonctionne aussi en continue) tendent vers 0.

Retour à la Khôlle : Section 1.28.3.

2.85 Khôlle 85 : Coordonnées de Plücker

Exercise 2.255 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.256 (Problème principal)**.** Un plan de $\mathbb{R}^k$ est défini par la donnée de deux vecteurs non-colinéaires, disons $\vec{u}$, $\vec{v}$. On peut construire la matrice M dont la première ligne est les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base canonique, et la deuxième ligne de M est les coordonnées de $\vec{v}$. On calcule les coordonnées de Plücker $(p_{i,j})_{1 \leq i<j \leq k}$. Il y a $\frac{k(k-1)}{2}$ coordonnées de Plücker, notons $\mathbf{p}(\vec{u}, \vec{v})$ ce vecteur de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$. Maintenant, si on prend une autre base du même plan, disons $(\vec{u}', \vec{v}')$, il existe une matrice de transition $A \in M_{2,2}$ inversible telle que $\begin{pmatrix} \vec{u}' \\ \vec{v}' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$. Donc la nouvelle matrice de cette base est $M' = AM$. Les coordonnées de Plücker issues de cette nouvelle matrice valent $p'_{i,j} = \det \left(A \begin{pmatrix} m_{1,i} & m_{1,j} \\ m_{2,i} & m_{2,j} \end{pmatrix} \right) = \det A \cdot p_{i,j}$. Donc tous paramétrage d'un même plan donnent les mêmes coordonnées de Plücker à une constante (multiplicative) près.

En outre, pour un plan P de $\mathbb{R}^k$, et une base $(\vec{u}, \vec{v})$, il n'est pas possible que tous les $p_{i,j}(\vec{u}, \vec{v})$ soient nuls. En effet, dans le cas contraire, pour tout $i < j$, les vecteurs (de $\mathbb{R}^2$) (u_i, v_i) et (u_j, v_j) seraient colinéaires car $0 = p_{i,j}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}$. En particulier, au moins l'un des (u_i, v_i) est non nul (sinon $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$), disons $v_1 \neq 0$. Alors, $\forall i, \frac{u_i}{v_i} = \frac{u_1}{v_1}$, ce qui est exactement la condition pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires : c'est impossible car $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = P$ est un plan.

Ainsi, pour un plan P de $\mathbb{R}^k$, on peut construire l'ensemble de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$: $\mathbf{p}(P) = \{\mathbf{p}(\vec{u}, \vec{v}) \mid \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = P\}$. Le raisonnement précédent montre que $\mathbf{p}(P)$ est une droite de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

On va montrer que cette application est injective. Pour ce faire, soit P un plan de $\mathbb{R}^k$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de P. Supposons qu'on connaît $\mathbf{p}(\vec{u}, \vec{v})$, on va prouver qu'on peut retrouver P. Par le raisonnement précédent, on sait qu'au moins l'un des $p_{i,j}(\vec{u}, \vec{v})$ est non nul, disons $p_{I,J}(\vec{u}, \vec{v})$. La matrice $A = \begin{pmatrix} u_I & u_J \\ v_I & v_J \end{pmatrix}^{-1}$ est inversible (sont déterminant est $p_{I,J}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$). Par suite, la matrice $AM = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}$ donne à nouveau une base $(\vec{x}, \vec{y})$ de P, mais cette fois la colonne I de AM est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et sa colonne J est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dès lors, $p_{I,j}(\vec{x}, \vec{y}) = 1 \cdot y_j - 0 \cdot x_j = y_j$, et $p_{i,J}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \cdot y_i - 1 \cdot x_i = -x_i$, donc, comme on connaît toutes les coordonnées de Plücker $\mathbf{p}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbf{p}(\vec{u}, \vec{v})$, on connaît toute la matrice AM, donc on connaît une base de P : on connaît P. Ainsi, l'application $P \mapsto \mathbf{p}(P)$ est une application injective de l'ensemble des plans de $\mathbb{R}^k$ vers l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$. Notons que si on dispose de $\mathbf{p}(P)$, on peut construire une base "canonique" de P. On prends le plus petit J tel que $p_{1,J}(P) \neq 0$, et les deux lignes de la matrice suivante donne une base de P (attention à l'ordre dans les indices) :

$$\frac{1}{p_{1;J}}\begin{pmatrix} p_{1;J} & p_{2;J} & p_{3;J} & \cdots & p_{J-1;J} & 0 & p_{J+1;J} & p_{J+2;J} & \cdots & p_{k;J} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{1;J} & p_{1;J+1} & p_{1;J+2} & \cdots & p_{1;k} \end{pmatrix}$$

Exercise 2.257 (Question subsidiaire)**.** Prenons 4 indices différents : $i < j < k < l$. Alors on peut regarder la matrice suivante :

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} m_{1;i} & m_{1;k} & m_{1;k} & m_{1;j} \\ m_{2;i} & m_{2;k} & m_{2;k} & m_{2;j} \\ \hline m_{1;i} & m_{1;l} & m_{1;j} & m_{1;l} \\ m_{2;i} & m_{2;l} & m_{2;j} & m_{2;l} \end{array}\right)$$

On peut calculer le déterminant de M par blocs :

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} m_{1;i} & m_{1;k} \\ m_{2;i} & m_{2;k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{1;j} & m_{1;l} \\ m_{2;j} & m_{2;l} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_{1;k} & m_{1;j} \\ m_{2;k} & m_{2;j} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{1;i} & m_{1;l} \\ m_{2;i} & m_{2;l} \end{vmatrix} \\ &= p_{i;k}\, p_{j;l} + \begin{vmatrix} m_{1;j} & m_{1;k} \\ m_{2;j} & m_{2;k} \end{vmatrix} p_{i;l} \\ &= p_{i;k}\, p_{j;l} + p_{j;k}\, p_{i;l} \end{aligned}$$

D'autre part, si on échange les deux colonnes centrales de M, le déterminant de cette nouvelle matrice est $-\det M$, et on a ainsi, toujours avec un déterminant par blocs :

$$-\det M = \left|\begin{array}{cc|cc} m_{1;i} & m_{1;k} & m_{1;k} & m_{1;j} \\ m_{2;i} & m_{2;k} & m_{2;k} & m_{2;j} \\ \hline m_{1;i} & m_{1;j} & m_{1;l} & m_{1;l} \\ m_{2;i} & m_{2;j} & m_{2;l} & m_{2;l} \end{array}\right| = p_{i;k} \cdot 0 - p_{i;j}(-p_{j;k}) = p_{i;j}p_{j;k}$$

On obtient la relation souhaitée.

Il s'ensuit que si le vecteur directeur d'une droite de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$ ne respecte pas ces égalités (il y a autant d'égalités que de quadruplets), alors il ne peut pas s'agir des coordonnées de Plücker d'un plan de $\mathbb{R}^k$: l'application $P \mapsto \mathbf{p}(P)$ n'est pas une bijection.

<u>**N.B. :**</u> Par contre, ce qui est vrai, est bien plus difficile à montrer, c'est que toute droite de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$ qui respecte les relations de Plücker ci-dessus est bien de la forme $\mathbf{p}(P)$. L'application de Plücker $P \mapsto \mathbf{p}(P)$ donne plein d'informations très importantes sur la grassmannienne $\mathbf{Gr}(2;k)$, l'ensemble des plans de $\mathbb{R}^k$, et se généralise pour l'étude de la grassmannienne $\mathbf{Gr}(n;k)$, l'ensemble des sous-espaces de dimension n de $\mathbb{R}^k$.

Retour à la Khôlle : Section 1.29.1.

2.86 Khôlle 86 : Hyperplan affine, Démonstration de Zagier

Exercise 2.258 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.259 (Problème principal)**.** Premièrement, comme $(\vec{t}_0, \dots, \vec{t}_{n-1})$ est libre, c'est une base de $\mathbb{R}^n$, donc on peut trouver des coordonnées $x_0, \dots, x_{n-1}$ telles que $\vec{t}_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \vec{t}_k$. Ensuite, l'hyperplan $H_{\mathbf{r}}$ est l'hyperplan affine contenant le point $r_0\vec{t}_0$ et les vecteurs $h_i\vec{t}_i - h_0\vec{t}_0$ pour $i \in [\![1; n-1]\!]$. Ces derniers forment une famille libre car la famille des $(h_i\vec{t}_i)_{i\in[\![1;n-1]\!]}$ est libre (les h_i étant non nuls) et ajouter $-h_0\vec{t}_0$ revient à faire une translation (qui n'envoie aucun des vecteurs sur $\vec{0}$), donc préserve la liberté. Ainsi :

$$H_{\mathbf{r}} = h_0\vec{t}_0 + \mathrm{Vect}\left(h_i\vec{t}_i - h_0\vec{t}_0\right)_{i\in[\![1;n-1]\!]}$$

Dès lors, chercher h_n tel que $h_n\vec{t}_n \in H_{\mathbf{r}}$ revient à cherche h_n et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ tels que :

$$h_n\vec{t}_n - h_0\vec{t}_0 = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \left(h_k\vec{t}_k - h_0\vec{t}_0\right)$$

En utilisant $\vec{t}_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\vec{t}_k$, on peut écrire le système sous forme matriciel dans la base $(\vec{t}_0, \dots, \vec{t}_{n-1})$.

Sur $\vec{t}_i$, $i \neq 0$, on a l'équation :

$$h_n x_i = -\lambda_i h_i \qquad \text{soit} \qquad -\lambda_i h_i + h_n x_i = 0$$

Sur $\vec{t}_0$, on a l'équation :

$$h_n x_0 - h_0 = -h_0 \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \qquad \text{soit} \qquad h_0 \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k + h_n x_0 = h_0$$

On peut donc représenter le système par l'équation matricielle (rappel : h_n et λ_i sont les variables, h_i et x_i sont les paramètres) :

$$\begin{pmatrix} -h_1 & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -h_{n-1} & x_{n-1} \\ h_0 & \dots & h_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_0 \end{pmatrix}$$

On cherche seulement h_n. Nul besoin d'inverser toute la matrice du système. Notons $M = \begin{pmatrix} -h_1 & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -h_{n-1} & x_{n-1} \\ h_0 & \dots & h_0 & x_0 \end{pmatrix}$. Alors on veut la dernière ligne de $\frac{1}{\det M} (\mathrm{com} M)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_0 \end{pmatrix}$. Pour ce faire, on a seulement besoin du déterminant de

M et de la cellule en bas à droite de com$M$ (qui est la même que se transposée).

Or la cellule en bas à droite de la comatrice vaut $+\begin{vmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} h_i$. Reste à calculer le déterminant. Regardons les permutations qui ne donnent pas 0 dans la somme qui définit ce déterminant. Il y a la permutation identité qui donne $+(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} h_i \, x_0$, et les seules autres sont les transposition (jn) pour $j \neq n$ qui donnent $-(-1)^{n-2}\prod_{\substack{1\leq i\leq n-1\\ i\neq j}} h_i \, h_0 x_j$. Le déterminant $\det M$ vaut donc la somme de ces n termes.

Effectuons le calcul final :

$$h_n = \frac{1}{\det M}(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} h_i \, h_0 = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} h_i}{x_0\prod_{i=1}^{n-1} h_i + \sum_{j=1}^{n-1} x_j \prod_{i\neq j} h_i} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} x_j/h_j}$$

On préférera bien sûr écrire : $\frac{1}{h_n} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_j}{h_j}$.

N.B. : Cette relation suggère qu'il existe un autre point de vu plus adapté dans lequel les $\frac{1}{h_i}$ sont des nombres qui font sens. C'est en effet le cas, il s'agit du "point de vue dual" : au lieu de considérer les points $h_i r_i$ et l'hyperplan qu'ils induisent, on construit les hyperplans affines $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \langle x | r_i \rangle = h_i\}$, l'intersection $\bigcap_{i=0}^{n-1} H_i$ est un unique point $P \in \mathbb{R}^n$, et on se demande ce que doit valoir h_n pour que $P \in H_n$.

Exercise 2.260 (Question subsidiaire)**.** Pour une explication visuelle, on pourra regarder cette vidéo.

Premièrement, l'ensemble S est fini car il est inclus dans $[1, p]^3$.

Comme f est une involution de S (on fera attention à vérifier que son image est dans S), on peut écrire S comme la réunion disjointe des $\{\alpha, f(\alpha)\}$ pour α dans une certaine partie de S. Si f n'a pas de point fixe, alors tous les $\{\alpha, f(\alpha)\}$ sont de cardinal 2 et le cardinal de S est alors pair. Ainsi, la supposition $\#S$ impair assure que l'application a un point fixe, c'est-à-dire qu'il y a un élément de la forme (a, b, b) dans S. On a alors $p = a^2 + (2b)^2$, une écriture comme somme de deux carrés, comme souhaitée.

Reste à montrer que $\#S$ est impair, et pour ce faire, on va juste montrer que g est une involution de S avec 1 seul et unique point fixe. Soit $(x, y, z) \in S$, alors on peut regarder le problème matriciellement : $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où M est l'une des trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On cherche un point fixe de g, c'est-à-dire un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui revient à dire que $(M - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(M - I_3)$.

On calcul les trois déterminants de $M - I_3$ pour les matrices ci-dessus : 2, 0 et 2. Ainsi, seule la deuxième a un noyau non nul. En vérifiant que $(0,0,0) \notin S$, on obtient donc $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Un rapide calcul donne que ce noyau est de dimension 2 et a pour base $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. De fait, $x = y$ et z peut être choisi indépendamment. Les conditions pour que g ait cette formule impose que $0\, z_1 < 0 < y$, ce qui ne pose aucun problème. Cependant, on doit aussi avoir $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in S$, donc $x^2 + 4yz = p$, ce qui induit, avec $x = y$, que $x|p$. Comme $x = p$ contredit l'égalité, on a $x = y = 1$, puis $z = \frac{p-1}{4}$ (ce qui est possible car on a justement supposé que $p = 1$ [4]). Il y a un seul point fixe : $(1, 1, \frac{p-1}{4})$.

Reste à montrer que g est une involution. On constate que si $x < y - z$, alors $g(x,y,z) = (a,b,c)$ vérifie $a > 2b$, ainsi :

$$g \circ g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

De la même manière, si $x > 2y$, alors $g(x,y,z) = (a,b,c)$ vérifie $a < c - b$ et l'inverse du calcul précédent permet de conclure. Enfin, le cas central est stabilisé par g et on a $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Finalement, le seul point fixe de l'involution g est $(1, 1, \frac{p-1}{4})$, et on en déduit que $\#S$ est impair, comme désiré tout nombre premier $p = 1$ [4] s'écrit comme la somme de deux carrés.

Retour à la Khôlle : Section 1.29.2.

2.87 Khôlle 87 : Sous-espaces stricts, Transformée de Hankel

Exercise 2.261 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.262 (Problème principal)**.** $\mathbb{Q}^2 = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^2} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(x)$ est bien la réunion dénombrable d'espaces stricts.

Pour $\mathbb{K}$, on a $\mathbb{K}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{K}_n(X)$.

Soit $n = \dim E$. On pose, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $x_\lambda = 1e_1 + \lambda e_2 + \lambda^2 e_3 + \dots + \lambda^{n-1} e_n$. On raisonne par l'absurde en supposant $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ où E_k est un sous-espace stricte de E. On s'intéresse à la manière de "ranger" les $(x_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{K}}$ dans les $(E_i)_i$. On sait que $\dim E_k \leq n-1$. Supposons que $(x_{\lambda_1},\dots,x_{\lambda_n})$ soient n vecteurs de E_k construit comme expliqués précédemment. Alors, comme la taille de la famille dépasse la dimension de l'espace, cette famille et liée. En particulier, son déterminant est nul : $\det(x_{\lambda_i})_i = VdM(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i) = 0$ (VdM désigne le déterminant de Van der Monde). Dès lors, il existe un terme de produit qui est nul : $\exists i\neq j, \lambda_i=\lambda_j$. Ainsi, il ne peut y avoir n vecteurs de type x_λ différents : $\#\{\lambda\in\mathbb{K}; x_\lambda\in E_k\}\leq n-1$. Cependant, par hypothèse $E=\bigcup_k E_k$, donc :

$$\mathbb{K}=\{\lambda;x_\lambda\in E\}=\bigcup_k\{\lambda;x_\lambda\in E_k\}$$

Or on a prouvé que le dernier ensemble est dénombrable, alors que $\mathbb{K}$ ne l'est pas (pour rappel, on a pris $\mathbb{K}$ un corps non-dénombrable comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On en déduit que notre hypothèse est impossible : on ne peut pas écrire un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie comme une réunion dénombrable de sous-espaces stricts.

Exercise 2.263 (Question subsidiaire)**.** Si $(b_n)_n$ est nulle à partir d'un certain rang p, alors le déterminant de h_n, pour $n\geq p$, contient une colonne nulle $\begin{pmatrix} b_p\\ \vdots\\ b_{n+p}\end{pmatrix}=0$. Réciproquement, si h_n est **entièrement** nulle, alors on a $b_0=h_0=0$, puis, par récurrence, si $b_k=0$ pour tout $k\leq n-1$, alors on a (regarder les permutations dont le produit ne donne pas 0) :

$$0=h_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_n\\ 0 & 0 & \dots & b_n & b_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & b_n & \dots & b_{2n-2} & b_{2n-1}\\ b_n & b_{n+1} & \dots & b_{2n-1} & b_{2n}\end{vmatrix}=b_n^n$$

Ainsi, par récurrence, on a $b_n=0$ pour tout n.

Si $(b_n)_n$ respecte une relation de récurrence, disons $b_{n+p}=\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k b_{n+k}$ pour tout n, alors, à partir de $n=p$, la p-ième colonne du déterminant de h_n peut s'écrire comme une combinaison linéaire des colonnes précédentes, donc le déterminant est nul :

$$\begin{pmatrix} b_p\\ \vdots\\ b_{n+p}\end{pmatrix}=\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k\begin{pmatrix} b_k\\ \vdots\\ b_{k+p}\end{pmatrix}$$

Réciproquement, si $(h_n)_n$ est nul à partir d'un certain rang p, cela signifie en particulier que les colonnes de h_p sont liées. Comme celle de h_{p-1} ne le sont pas on peut trouver $(\lambda_k)_k$ tels que $b_{p+n}=\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k b_{n+k}$ pour $n\leq p$. on va montrer que cette égalité est vraie pour tout n. Supposons que cette égalité est vrai pour tout $n \le N+p-1$, alors on regarde h_N. La dernière colonne, C_N, est combinaison linéaire des précédentes, disons $C_N = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k C_k$. En particulier, on a l'expression :

$$b_{N+p} = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k b_{k+p} = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \left(\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j b_{k+j}\right) = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \left(\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k b_{k+j}\right) = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j b_{N+j}$$

On a bien la relation de récurrence pour à tous les rangs.

Posons $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$. Pour n fixé, on note H_b la matrice de Hankel pour $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ au rang n, i.e. $h_n = \det H_b$, et pareillement pour H_c. On pose $B = \left(\binom{j-1}{i-1}\right)_{i,j}$ la matrice triangulaire supérieure du triangle de Pascal (on adopte la convention usuelle : $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$). On notera que $\det B = 1$ car les coefficients diagonaux valent tous 1. On va montrer que : $H_c = BH_bB^T$. Commençons par remarquer que : $\binom{i+j}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{i}{l}\binom{j}{k-l}$ car choisir k éléments parmi $i+j$ revient à choisir l éléments parmi les i premiers, puis $k-l$ parmi les j derniers pour n'importe quel valeur de l possible. Dès lors, on a :

$$\begin{aligned}
BH_bB^T &= \left[\sum_{k,l=1}^{n+1} \binom{i-1}{k-1} b_{k+l-2} \binom{j-1}{l-1}\right]_{1\le i,j\le n+1} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{2n} b_k \sum_{l=1}^{n+1} \binom{j-1}{l-1}\binom{i-1}{k-l+1}\right]_{1\le i,j\le n+1} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{2n} b_k \binom{i+j-2}{k}\right]_{1\le i,j\le n+1} \\
&= [c_{i+j-2}]_{1\le i,j\le n+1} = H_c
\end{aligned}$$

Finalement, en passant au déterminant des deux côtés, en utilisant le fait que le déterminant est multiplicatif, puis que $\det B = \det B^T = 1$, on a que la transformée de Hankel est invariante par la transformation d'Euler.

Retour à la Khôlle : Section 1.29.3.

2.88 Khôlle 88 : Série et permutation

Exercise 2.264 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.265 (Problème principal)**.** On va majorer $\frac{1}{k\sigma(k)}$ pour $k \in [1;n]$. Quelle est la permutation σ qui rend ce terme le plus grand possible ? Plus σ est petit, plus le terme est grand, donc, comme σ est injective sur $\mathbb{N}$, on cherche σ dont l'image de $[1;n]$ est $[1;n]$. Cela fixé, il est facile de se rendre compte que

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\ (k)}$ est maximal pour $\frac{1}{}$ décroissante (imaginez $\frac{1}{(k)}$ comme des poids qu'on affecte à $\frac{1}{k}\ _{k}$). Ainsi, quelque soit , on a montré que :

$$\sum_{k=1} \frac{1}{k\ (k)} \qquad \sum_{k=1} \frac{1}{k\ \ k}$$

La série de droite est convergente d'après Riemann, donc la série de terme général $\frac{1}{k\ (k)}$ est convergente.

De la même manière, si > 1, alors la série de terme général $\frac{1}{n\ \ (n)}$ est convergente par comparaison avec la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n}$. Si $+ \quad > 1$, le même argument que précédemment, donne :

$$\sum_{k=1} \frac{1}{k\ \ (k)} \qquad \sum_{k=1} \frac{1}{k\ \ \ k}$$

La somme de droite converge par le critère de Riemann, donc la série de terme général $\frac{1}{k\ \ (k)}$ est convergente.

On va se servir de l'une des démonstrations de la divergence de la série harmonique. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k)}{k^2}$.

On veut minorer $S_{2n} \quad S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(k)}{k^2}$. Au pire, comme est injective, on a $([n+1;2n]) = [1;n]$, et les "poids" (k) sont affectés de sorte à minimiser la somme pondérée $\sum_{k=n+1}^{2n} (k) \quad \frac{1}{k^2}$, c'est-à-dire que est croissante : $(n+1) = 1$, $(n+2) = 2$,..., $(n+k) = k$. Ainsi, on a :

$$S_{2n} \quad S_n \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k \quad n}{k^2} \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad n \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} \quad \frac{n}{2n} \quad n\frac{n}{(n+1)^2} \quad \frac{1}{4}$$

Finalement, $S_n \ ! \ +1$, la série général de terme $\frac{(n)}{n^2}$ est toujours divergente, quel que soit une bijection de $\mathbb{N}$.

Exercise 2.266 (Question subsidiaire)**.** Regardons tout d'abord $S_n(\ ) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(ae^{i} \ +be \quad ^{i}\ \right)^{k}}{k!}$.

On sait que $S_n(\theta) \to e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}}$ quand $n \to +\infty$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(\theta)\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(ae^{i\theta}+be^{-i\theta}\right)^k}{k!}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^j b^{k-j}e^{i(2k-j)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^j b^{k-j}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(2k-j)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^j b^{k-j}\delta_{2k,j} = \sum_{k=0;2|k}^{n}\frac{1}{k!}\binom{k}{k/2}a^{k/2}b^{k/2} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{1}{(2k)!}\cdot\frac{(2k)!}{(k!)^2}a^k b^k = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{a^k b^k}{(k!)^2}
\end{aligned}$$

D'où, en premier lieu, et comme la série converge, quand $n \to +\infty$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(\theta)\mathrm{d}\theta \to \sum_{k\geq 0}\frac{a^k b^k}{(k!)^2}$$

On voudrait maintenant "inverser" limite et intégrale (des théorème généraux sur cette sorte d'inversion seront vus en Spé). Pour ce faire, on va majorer, pour tout θ, $\left|S_n(\theta) - e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}}\right|$. On a (on note $\varphi(\theta) = ae^{i\theta}+be^{-i\theta}$) :

$$\begin{aligned}
\left|S_n(\theta) - e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}}\right| &= \left|\sum_{k\geq n+1}\frac{\varphi(\theta)^k}{k!}\right| \\
&\leq \frac{|\varphi(\theta)|^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{k\geq n+1}\frac{|\varphi(\theta)|^{k-n-1}}{(n+2)(n+3)\dots(k-1)k} \\
&\leq \frac{|\varphi(\theta)|^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{k\geq 0}\frac{|\varphi(\theta)|^k}{k!} = \frac{|\varphi(\theta)|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|\varphi(\theta)|}
\end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité, on notera que $n+2 \geq 1$, $n+3 \geq 2$, $n+4 \geq 3$, etc.

On a une majoration plutôt simple, maintenant, éliminons la dépendance en θ. On note que $|\varphi(\theta)| \leq |a+b|$ (on pourrait avoir une majoration plus fine mais peu importe), d'où :

$$\left|S_n(\theta) - e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}}\right| \leq \frac{|a+b|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|a+b|}$$

Il vient alors :

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}} - S_n(\theta)\, d\theta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}} - S_n(\theta)\right| d\theta$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|a+b|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|a+b|} d\theta$$
$$\le \frac{|a+b|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|a+b|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Finalement, on a deux expressions de la limite de $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(\theta) d\theta$ quand $n \to +\infty$. Par unicité de la limite :

$$\sum_{n \ge 0} \frac{a^n b^n}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}} d\theta$$

Notamment, pour un réel positif t : $\sum_{k \ge 0} \frac{t^k}{(k!)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\sqrt{t}\cos\theta} d\theta$.

On notera que la présente technique fonctionne pour plein d'autres exemple, et qu'il faut retenir qu'avec des "décroissances exponentielles", on peut largement abuser de majoration grossières via des inégalités triangulaires sans (trop) craindre d'obtenir une inégalité trop lâche.

Retour à la Khôlle : Section 1.30.1.

2.89 Khôlle 89 : Escargot de Gardner, Suite de Sylvester

Exercise 2.267 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.268 (Problème principal)**.** La solution est ici.

On s'attachera à utiliser l'équivalent de la série harmonique pour obtenir un approximation du temps nécessaire (la formule apparaissant en fin de vidéo) : $t = e^{L/v}$.

Exercise 2.269 (Question subsidiaire)**.** On remarque que $(s_n)_n$ est une suite d'entiers strictement croissante, donc elle tend vers $+\infty$ (elle est supérieure à $(n)_n$).

Ensuite, on a : $s_{n+1} - 1 = \prod_k s_k = s_n(s_n - 1)$, d'où une croissante plus rapide que $n!$: on a tout d'abord $s_n - 1 \ge n$ par récurrence immédiate, donc $s_{n+1} \ge n \cdot s_n$, et ainsi $s_n \ge n!$ par récurrence. Il s'ensuit que la série de terme général $\frac{1}{s_n}$ converge (vers moins que e d'ailleurs).

En outre, on a aussi :

$$\frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1} = \frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_n(s_n - 1)} = \frac{s_n - 1}{s_n(s_n - 1)} = \frac{1}{s_n}$$

Comme toutes les séries concernées convergent, on peut Calculer la somme par télescopage :

$$\sum_{k \ge 0} \frac{1}{s_n} = \sum_{k \ge 0} \frac{1}{s_n - 1} - \sum_{k \ge 0} \frac{1}{s_{n+1} - 1} = \frac{1}{s_0 - 1} - \lim_{+\infty} \frac{1}{s_{n+1} - 1} = 1$$

On va montrer par récurrence que $\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{s_j}$ est la meilleure approximation de 1 par k fraction égyptiennes. Ce fait et vérifié pour $k=1$ car il n'existe pas de fraction unitaire plus proche de 1 que $\frac{1}{2}$. Cela revient à montrer que s_k est égal à $m=\min\left\{n\in\mathbb{N}\ ;\ \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{s_j}+\frac{1}{n}<1\right\}$. Or on sait calculer $\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{s_j}$ par télescopage : $\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{s_j}=1-\frac{1}{s_k-1}$. Il vient $\frac{1}{m}<\frac{1}{s_k-1}$, donc $m>s_k-1$ et $s_k=m$ par minimalité.

Enfin, on calcule que $s_0=2$, $s_1=3$, $s_2=7$, $s_3=43$ et $s_4=1807$. Dès lors : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}=1-\frac{1}{1807-1}=1-\frac{1}{1806}$. Comme on a là la meilleur approximation par défaut par 4 fractions égyptiennes de 1, si on prend un nombre dans $]1-\frac{1}{1806};1[$, il ne peut s'écrire comme la somme de 4 fractions égyptiennes ou moins car cela fournirait une meilleur approximation par défaut de 1.

Retour à la Khôlle : Section 1.30.2.

2.90 Khôlle 90 : Série de Bernoulli, Suites croissantes

Exercise 2.270 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.271 (Problème principal)**.** Il importe de démontrer d'abord que $f(x;t)$ est bien définie. On remarque que le degré de B^k est k et que son coefficient dominant est 1. De fait : $\left|B_k(x)\frac{t^k}{k!}\right|\in O\left(\frac{(xt)^k}{k!}\right)$. La série de terme général $\frac{(xt)^k}{k!}$ converge avec $\sum_{k\geq 0}\frac{(xt)^k}{k!}=e^{xt}$. De fait, $|f(x;t)|\leq e^{xt}$.

Ensuite, grâce au (gros) théorème qu'on a admis, on peux calculer, en fixant x et t :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x;t)=\sum_{k\geq 0}B_k'(x)\frac{t^k}{k!}=\sum_{k\geq 0}B_k(x)\frac{t^{k+1}}{k!}=tf(x;t)$$

On en déduit en résolvant l'équation différentielle que $f(x;t)=\lambda(t)e^{xt}$ où $\lambda(t)$ désigne une fonction qui ne dépend que de t (pas de x). On peut maintenant utiliser l'intégration (là encore, c'est un gros théorème) :

$$\int_0^1 f(x;t)\mathrm{d}x=\sum_{k\geq 0}\frac{t^k}{k!}\int_0^1 B_k(x)\mathrm{d}x=1$$

On fera attention au fait que, si $k=0$, $\int_0^1 B_k=1$ et 0 si $k\geq 1$. D'un autre côté :

$$\int_0^1 f(x;t)\mathrm{d}x=\lambda(t)\left[\frac{1}{t}e^{xt}\right]_0^1=\lambda(t)\frac{e^t-1}{t}$$

On obtient finalement la fonction génératrice des polynômes de Bernoulli :

$$f(x;t)=\frac{te^{xt}}{e^t-1}$$

Ces polynômes ont plein d'application pratiques car $(p+1)\sum_{k=0}^{n} k^p = B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)$, entre autre. Cette série permet de calculer facilement les coefficients de polynômes de Bernoulli ou de les manipuler tous ensemble pour certaines démonstrations. Par exemple, on peut remarquer que $B_{2k+1}(0) = 0$ pour $k \geq 1$. En effet, $f(0,t) - B_1(0)t = \frac{t}{e^t-1} + \frac{1}{2}t$ est paire, donc son développement en 0 (à n'importe qu'elle ordre), n'a que des coefficients de rang pair. Or on connaît son développement en 0 : $f(0,t) - \frac{1}{2}t = B_0(0) + \sum_{k=3}^{n} B_k(0)\frac{t^k}{k!} + o(t^n)$. Donc tous les $B_k(0)$ pour k impair (supérieur à 3) est nul.

Les théorèmes évoqués sont au programme de deuxième année, voire pour cela les suites de fonctions, les séries de fonction et les séries entières.

Exercise 2.272 (Question subsidiaire)**.** Pour $\mathbf{q} \in S$, on a $\forall i,\ q_i \geq 2$, donc $\frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_k} \leq \frac{1}{2^k}$, donc la série de terme général $\frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_k}$ converge car c'est un terme positif majorée par un terme convergent.

On obtient en particulier que $\Phi(\mathbf{q}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-1/2} = 1$. Donc $\Phi : S \to]0,1]$ (et 1 est atteint).

Ensuite, soient deux suites $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in S$. Supposons que $\mathbf{q} < \mathbf{p}$, c'est-à-dire qu'il existe j tel que $q_j < p_j$ et $q_i = p_i$ pour $i < j$. Alors, on note $R = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{q_1 \cdots q_k} = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{p_1 \cdots p_k}$ et $Q = q_1 \cdots q_{j-1} = p_1 \cdots p_{j-1}$:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 \cdots q_k} = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{q_1 \cdots q_k} + \frac{1}{q_1 \cdots q_j} + \sum_{k=j+1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 \cdots q_k} > R + \frac{1}{Qq_j} + 0$$

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_1 \cdots p_k} = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{p_1 \cdots p_k} + \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{1}{p_1 \cdots p_k} \leq R + \frac{1}{Q} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_j^k} = R + \frac{1}{Q(p_j - 1)}$$

Comme $q_j + 1 \leq p_j$, on a donc $\Phi(\mathbf{p}) \leq R + \frac{1}{Q(p_j-1)} \leq R + \frac{1}{Qq_j} < \Phi(\mathbf{q})$: l'application Φ est strictement décroissante.

Dès lors, Φ est injective. Reste à prouver qu'elle est surjective.

Pour ce faire, prenons $x \in]0,1]$. Essayons de construire $\mathbf{q} \in S$ tel que $\Phi(\mathbf{q}) = x$. Construisons déjà le premier terme : q_1. Si $\frac{1}{q_1} > x$, alors $\Phi(\mathbf{q}) \geq \frac{1}{q_1} > x$. Si $\frac{1}{q_1}$ est fixé, alors, comme dans le raisonnement précédent, la plus grande valeur que $\Phi(\mathbf{q})$ peut atteindre est $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1(q_1-1)}$ (atteinte en prenant tous les termes égaux à q_1), ce qui vaut $\frac{1}{q_1-1}$. Donc si $\Phi(\mathbf{q}) = x$, alors $\frac{1}{q_1-1} \geq x < \frac{1}{q_1}$. On en déduit que $q_1 = \min\left\{n \geq 2 \ ; \ \frac{1}{n} < x\right\}$.

Supposons maintenant qu'on a construit $(q_1, \ldots, q_m)$. Alors, on peut noter $R = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{q_1 \cdots q_k}$ et $Q = q_1 \cdots q_m$. On peut fixer $q_{m+1} = \min\left\{n \geq q_m \ ; \ \frac{1}{n} < Q(x-R)\right\}$ (un tel ensemble est une partie non-vide de $\mathbb{N}$, donc admet bien un minimum). Reste à prouver que $\mathbf{q}$ construit par ce processus vérifie bien $\mathbf{q} \in S$ et $\Phi(\mathbf{q}) = x$.

Par construction, $\mathbf{q}$ est bien croissante car $q_{m+1} > q_m$.

Ensuite, on sait que, pour m fixé, $\frac{1}{q_m} < Q(x-R) \leq \frac{1}{q_m - 1}$, donc $x \in$

$\left[R+\frac{1}{Qq_m}; R+\frac{1}{Q(q_m-1)}\right[$. Dès lors :

$$0 \leq x - \left(R+\frac{1}{Qq_m}\right) \leq \left(R+\frac{1}{Q(q_m-1)}\right) - \left(R+\frac{1}{Qq_m}\right) = \frac{1}{Qq_m(q_m-1)}$$

Or on sait que $Q \geq 2^{m-1}$ car $Q = q_1\dots q_{m-1}$ et pour tout i, on a $q_i \geq 2$. Donc on a bien la convergence $\frac{1}{Qq_m(q_m-1)} \to 0$, et $\Phi(\mathbf{q}) = x$ via cette construction.

On a montré que $\Phi : S \to]0;1]$ est une bijection. Cela prouve que S (et par extensions $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) n'est pas dénombrable.

Notons S_{stat} le sous-ensemble de S constitué de suite d'entiers croissantes et stationnaires.On veut montrer que $\Phi : S_{\text{stat}} \to \mathbb{Q}\cap]0;1]$ est une bijection (et est bien définie).

Premièrement, soit $\mathbf{q} = (q_1;\dots;q_{m-1};q_m;q_m;\dots) \in S_{\text{stat}}$. Calculons $\Phi(\mathbf{q})$. Comme avant, on note $R = \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{q_1\dots q_k}$ et $Q = q_1\dots q_{m-1}$, qui sont tous les deux des rationnels. Alors :

$$\Phi(\mathbf{q}) = R + \frac{1}{Q}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{q_m^k} = R + \frac{1}{Q(q_m-1)} \in \mathbb{Q}$$

Réciproquement, prenons $\mathbf{q} \in S$ qui n'est pas stationnaire et notons $x = \Phi(\mathbf{q})$, on veut démonter que $x \notin Q$. Supposons que $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, alors, comme $\mathbf{q}$ est croissante mais pas stationnaire, elle tend vers $+\infty$ (et donc est non bornée). En particulier, il existe m tel que $b < q_m$. On sait alors que $x \in \left]R+\frac{1}{Qq_m}; R+\frac{1}{Q(q_m-1)}\right[$. Or QR est un entier car $QR = q_1\dots q_{m-1}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{q_1\dots q_k} = \sum_{k=1}^{m-1} q_1\dots q_k \in \mathbb{N}$. Donc $Qa - QRb \in \mathbb{N}$, alors que, comme $b < q_m$:

$$Qa - QRb \in \left]\frac{b}{q_m}; \frac{b}{q_m-1}\right[\subset [0;1[$$

On en conclut que $\Phi(\mathbf{q}) \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $\mathbf{q} \in S_{\text{stat}}$. Comme Φ est une bijection $S \to]0;1]$, on en déduit qu'elle se restreint à une bijection $S_{\text{stat}} \to \mathbb{Q}\cap]0;1]$. Cela montre en particulier que S_{stat} est dénombrable.

Retour à la Khôlle : Section 1.30.3.

2.91 Khôlle 91 : Inégalité duale, Famille très obtuse

Exercise 2.273 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.274 (Problème principal)**.** On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz avec :

$$(x+2y+3z)^2 = \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)^2 \leq \left\|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\|^2 \left\|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\|^2 \leq 1 \cdot (1^2+2^2+3^2) = 14$$

Le cas d'égalité est obtenu lorsque $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Inversement, φ est bien un produit scalaire (on peut regarder l'exercice sur les produits scalaires issus de matrices 2×2), donc on peut l'utiliser pour regarder l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur le produit scalaire ente $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$:

$$(x+y+z)^2 = \varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)^2 \leq \left\|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\|_{\varphi}^2 \left\|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\|_{\varphi}^2 \leq 1\times\left(1^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = \frac{11}{6}$$

Exercise 2.275 (Question subsidiaire)**.** L'angle ne change pas en renormalisant les vecteurs, donc on peut choisir u_1, u_2, u_3 de norme 1.

Si u_1, u_2 et u_3 sont sur une même droite, i.e. $\dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = 1$, alors $u_i = \pm u_j$ car les vecteurs sont unitaires. Donc l'angle entre u_i et u_j est 0 si $u_i = u_j$ ou π si $u_i = -u_j$. Mais si deux des angles valent π, alors le troisième vaut 0 : disons que $\widehat{u_1, u_2} = \widehat{u_1, u_3} = \pi$, alors $u_2 = -u_1 = u_3$, donc $\widehat{u_2, u_3} = 0$.

En dimension 2, les vecteurs unitaires correspondent à des points du cercle unité. il n'est pas possible de placer 3 points à strictement plus d'un tiers de cercle les uns des autres (un dessin fonctionne).

En dimension 3, considérons u_3', le projeté orthogonal de u_3 dans le plan $P = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Complétons (u_1) et une base orthonormée (u_1, e_2) de P. On a $u_3' = (u_3|u_1)u_1 + (u_3|e_2)e_2$. Donc $(u_3'|u_1) = (u_3|u_1)$. Mais par un raisonnement analogue : $(u_3'|u_2) = (u_3|u_2)$. Donc on a trois vecteurs u_1, u_2, u_3' en dimension 2 avec des angles de strictement plus que $\frac{2\pi}{3}$: ce n'est pas possible.

Finalement, comme on n'a que trois vecteurs, l'espace qu'ils engendre est de dimension au plus 3 : on a traité tous les cas.

On pourra aussi essayer de montrer qu'une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ qui est obtuse, i.e. $(u_i|u_j) \leq 0$, vérifie toujours $p \leq n+1$ où $n = \dim \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$.

Retour à la Khôlle : Section 1.31.1.

2.92 Khôlle 92 : Déformation du produit, Hyperplan médiateur

Exercise 2.276 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.277 (Problème principal)**.** $(\cdot|\cdot)_{P,\lambda}$ est linéaire à gauche. En outre, on a, comme P est auto-adjoint :

$$(y|x)_{P,\lambda} = \langle y, x\rangle - \lambda\langle y, Px\rangle = \langle x, y\rangle - \lambda\langle x, Py\rangle = (x|y)_{P,\lambda}$$

Ainsi, $(\cdot|\cdot)_{P,\lambda}$ est symétrique. Cela montre que $(\cdot|\cdot)_{P,\lambda}$ est bilinéaire.

Soit $x \in E$, alors, d'après Cauchy-Schwartz et l'inégalité sur la norme de P :

$$(x|x)_{P,\varepsilon} = ||x||^2 - \varepsilon\langle x, Px\rangle \geq ||x||^2 - \varepsilon||Px|| \, ||x|| \geq ||x||^2 - ||x|| \, ||x|| = 0$$

Ainsi, $(\cdot|\cdot)_{P,\varepsilon}$ est positive. Vérifions qu'elle est définie positive. Soit $u \neq 0$ tel que $(x|x)_{P,\varepsilon} = 0$, alors, par Cauchy-Schwartz :

$$\frac{1}{\varepsilon}||x||^2 = \langle x, Px\rangle \leq ||x|| \, ||Px||$$

Il s'ensuit que : $\frac{||Px||}{||x||} \geq \frac{1}{\varepsilon}$, donc la norme de P est plus grande que $\frac{1}{\varepsilon} > 1$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, on en déduit que $(\cdot|\cdot)_{P,\varepsilon}$ est bien définie positive : c'est un produit scalaire.

Exercise 2.278 (Question subsidiaire)**. Il est fortement conseillé de faire des dessins !** On obtient la construction de la médiatrice et du plan médiateur.

On a la suite d'équivalence :

$$\begin{aligned}
& x \in H \\
\Longleftrightarrow\ & ||u - x|| = ||v - x|| \\
\Longleftrightarrow\ & (u - x|u - x) = (v_x|v_x) \\
\Longleftrightarrow\ & ||u||^2 - 2(u|x) + ||x||^2 = ||v||^2 - 2(v|x) + ||x||^2 \\
\Longleftrightarrow\ & (u|x) = (v|x) \\
\Longleftrightarrow\ & (u - v|x) = 0
\end{aligned}$$

On a utilisé l'hypothèse $||u|| = ||v||$. Ainsi, on a bien $H = \{u - v\}^{\perp}$. On en déduit que H est un hyperplan, que sa dimension est $\dim E - 1$, et qu'on peut fabriquer une base orthogonale de E en prenant une base orthogonale de H, disons $(e_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ et en lui adjoignant un vecteur normal à H, par exemple $u - v$. Alors, la symétrie orthogonale à H est l'application linéaire s_H qui s'exprime dans cette base par :

$$\begin{gathered}
\forall i, s_H(e_i) = e_i \\
s_H(u - v) = -(u - v)
\end{gathered}$$

On exprime maintenant u dans cette base : $u = \sum_i \frac{(u|e_i)}{||e_i||^2} e_i + \frac{(u|u-v)}{||u-v||^2}(u - v)$. Dès lors, on peut calculer $s_H(u)$:

$$\begin{aligned}
s_H(u) &= \sum_i \frac{(u|e_i)}{||e_i||^2} s_H(e_i) + \frac{(u|u - v)}{||u - v||^2} s_H(u - v) \\
&= \sum_i \frac{(u|e_i)}{||e_i||^2} e_i - \frac{(u|u - v)}{||u - v||^2}(u - v) \\
&= \sum_i \frac{(v|e_i)}{||e_i||^2} e_i + \frac{(v|u - v)}{||u - v||^2}(u - v) \\
&= v
\end{aligned}$$

Pour le terme de gauche, on a utilisé $e_i \perp (u - v)$, donc $(u|e_i) - (v|e_i) = 0$. Pour le deuxième terme, on a utilisé $(v|u - v) = (v|u) - \|v\|^2 = -\left(\|u\|^2 - (v|u)\right) = -(u - v|u)$.

Retour à la Khôlle : Section 1.31.2.

2.93 Khôlle 93 : Fonction de Leibnitz, Produit issu de matrice

Exercise 2.279 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.280 (Problème principal)**.** On regarde $\left(\sum_i a_i\right) MG^2$ grâce la définition de G, qu'on peut réécrire pour plus de clarté $\sum_i a_i G = \sum_i a_i A_i$:

$$\begin{aligned}
f(G) &= \sum_i a_i \left(\|G\|^2 + \|A_i\|^2 - 2(G|A_i)\right) \\
&= \sum_i a_i\|A_i\|^2 + \sum_i a_i\|G\|^2 - 2\left(G \,\middle|\, \sum_i a_i A_i\right) \\
&= \sum_i a_i\|A_i\|^2 + \sum_i a_i\|G\|^2 - 2\left(G \,\middle|\, \sum_i a_i G\right) \\
&= \sum_i a_i\|A_i\|^2 + \sum_i a_i\|G\|^2 - 2\sum_i a_i(G|G) \\
&= \sum_i a_i \left(\|A_i\|^2 - \|G\|^2\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut calculer que :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_i a_i\right) MG^2 &= \left(\sum_i a_i\right)\left(\|M\|^2 + \|G\|^2 - 2(M|G)\right) \\
&= \left(\sum_i a_i\right)\|M\|^2 + \sum_i a_i\|G\|^2 - 2\left(M \,\middle|\, \sum_i a_i G\right) \\
&= \left(\sum_i a_i\right)\|M\|^2 + \sum_i a_i\|G\|^2 - 2\left(M \,\middle|\, \sum_i a_i A_i\right) \\
&= \sum_i a_i\left(\|M\|^2 + \|A_i\|^2 - 2(M|A_i)\right) - \sum_i a_i\|A_i\|^2 + \sum_i a_i\|G\|^2 \\
&= \left(\sum_i a_i MA_i^2\right) - f(G)
\end{aligned}$$

On obtient bien la formule désirée.

En particulier, si on cherche l'ensemble des points M du plan tel que $aAM^2 + bBM^2 = k$, en supposant $a + b \neq 0$, on obtient que cela correspond aux points du plan tels que $(a+b)MG^2 = constante$, c'est donc un cercle de centre G (le barycentre de $\{(A;a);(B;b)\}$). Son rayon vaut $\sqrt{\frac{k - f(G)}{a+b}} = \sqrt{\frac{k - (aAG^2 + bBG^2)}{a+b}}$. Dans les cas extrêmes, ce cercle peut se réduire au point G où même à l'ensemble vide (théorème de Leibnitz).

Exercise 2.281 (Question subsidiaire)**.** Quoi qu'il arrive, φ est bi-linéaire et symétrique, avec $\varphi(0;0) = 0$, quelque soit les valeurs de a,b et c.

φ est définie positive si et seulement si $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) > 0$ pour tout $x_1; x_2$. Or on a :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

Pour $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient $a > 0$. Pour $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient $c > 0$. Ainsi, $tr(A) > 0$.

Pour le déterminant, on peut utiliser un argument de Cauchy : on regarde le polynôme de degré 2 $at^2 + 2bt + c = \varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right) > 0$. Comme ce polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (il est toujours > 0), son discriminant est strictement négatif, or $\Delta = 4b^2 - 4ac = -4\det(A)$. Donc $\det(A) > 0$.

Travaillons sur la réciproque maintenant. Si $\det(A) > 0$, alors $\varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ garde un signe (strict) constant quand t varie. En particulier, pour $t = 0$, on en déduit que ce polynôme est du signe de sa valeur en 0 : c. Or, comme $tr(A) = a + c > 0$ et $\det(A) = ac - b^2 > 0$, on en déduit $ac > 0$ d'où a et c de même signe et comme $a + c > 0$, $a > 0$ et $c > 0$, et finalement $\forall y; \varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right) > 0$. En outre, $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = a > 0$. Ainsi, soit $x_1; x_2 \in \mathbb{R}$. Si $x_2 \neq 0$, alors soit $t = \frac{x_1}{x_2}$, on a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, donc :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_2^2 \varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right) > 0$$

Si $x_2 = 0$, alors :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) > 0$$

On a prouvé que φ est un produit scalaire si et seulement si $tr(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.

Retour à la Khôlle : Section 1.31.3.