

L'algèbre des polytopes et le g -théorème

Matthieu PIQUEREZ

4 mars 2021

- 1 Un peu d'histoire
- 2 g -théorème
- 3 Équidécomposabilité
- 4 Algèbre des polytopes
- 5 Applications : équidécomposition, volume mixte, g -théorème

Un peu d'histoire

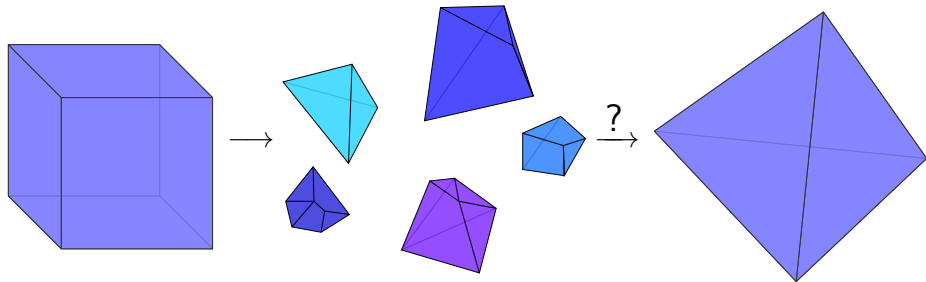
Équidécomposition

- 1807-1835 Wallace-Bolyai-Gerwien



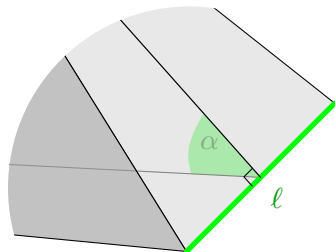
Équidécomposition

- 1807-1835 Wallace-Bolyai-Gerwien
- 1900 3^{ème} problème de Hilbert



Équidécomposition

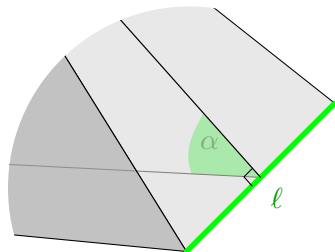
- 1807-1835 Wallace-Bolyai-Gerwien
- 1900 3^{ème} problème de Hilbert
- 1901 Invariant de Dehn, contre-exemple de Dehn



$$\sum_{e \in \text{tétraèdre}} \ell(e) \otimes \alpha(e) \neq \sum_{e \in \text{cube}} \ell(e) \otimes \alpha(e)$$

Équidécomposition

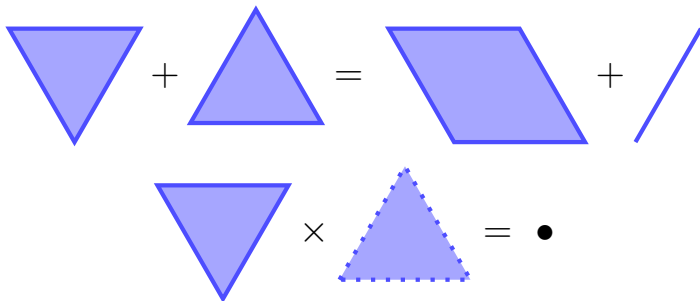
- 1807-1835 Wallace-Bolyai-Gerwien
- 1900 3^{ème} problème de Hilbert
- 1901 Invariant de Dehn, contre-exemple de Dehn
- 1965 Sydler : suffisance de l'invariant de Dehn



$$\sum_{e \in \text{tétraèdre}} l(e) \otimes \alpha(e) \neq \sum_{e \in \text{cube}} l(e) \otimes \alpha(e)$$

Équidécomposition

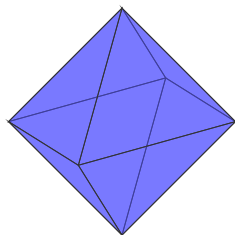
- 1807-1835 Wallace-Bolyai-Gerwien
- 1900 3^{ème} problème de Hilbert
- 1901 Invariant de Dehn, contre-exemple de Dehn
- 1965 Sydler : suffisance de l'invariant de Dehn
- 1989 (Peter) McMullen : algèbre des polytopes



Classification du nombre de faces des polytopes simpliciaux

Classification du nombre de faces des polytopes simpliciaux

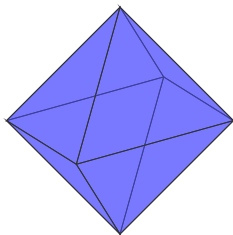
- 1905/1927 Équations de Dehn-Sommerville



f -vecteur : $(6, 12, 8, 1)$. Pour les polytopes simpliciaux : caractéristique d'Euler, d'autres relations linéaires

Classification du nombre de faces des polytopes simpliciaux

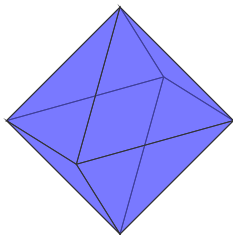
- 1905/1927 Équations de Dehn-Sommerville
- 1970 g -conjecture de McMullen



f -vecteur : $(6, 12, 8, 1)$. Pour les polytopes simpliciaux : caractéristique d'Euler, d'autres relations linéaires, une série d'inégalités

Classification du nombre de faces des polytopes simpliciaux

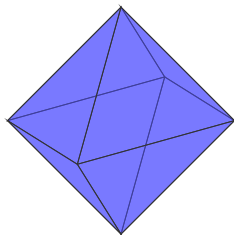
- 1905/1927 Équations de Dehn-Sommerville
- 1970 g -conjecture de McMullen
- 1980 Preuve de l'existence par Billera et Lee



f -vecteur : $(6, 12, 8, 1)$. Pour les polytopes simpliciaux : caractéristique d'Euler, d'autres relations linéaires, une série d'inégalités

Classification du nombre de faces des polytopes simpliciaux

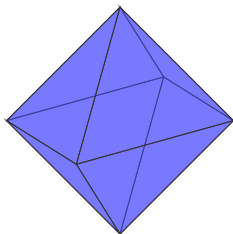
- 1905/1927 Équations de Dehn-Sommerville
- 1970 g -conjecture de McMullen
- 1980 Preuve de l'existence par Billera et Lee
- 1980 Preuve de la nécessité par Stanley \leftrightarrow cohomologie d'une variété



f -vecteur : $(6, 12, 8, 1)$. Pour les polytopes simpliciaux : caractéristique d'Euler, d'autres relations linéaires, une série d'inégalités

Classification du nombre de faces des polytopes simpliciaux

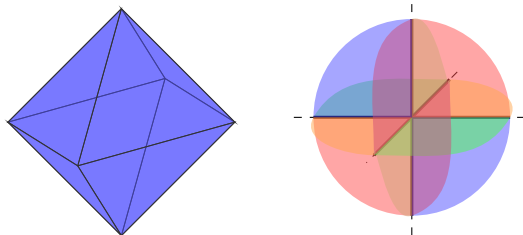
- 1905/1927 Équations de Dehn-Sommerville
- 1970 g -conjecture de McMullen
- 1980 Preuve de l'existence par Billera et Lee
- 1980 Preuve de la nécessité par Stanley \leftrightarrow cohomologie d'une variété
- 1993 Preuve combinatoire de la nécessité par McMullen avec l'algèbre des polytopes



f -vecteur : $(6, 12, 8, 1)$. Pour les polytopes simpliciaux : caractéristique d'Euler, d'autres relations linéaires, une série d'inégalités

Histoire récente

- 2002 extension par Karu aux polytopes (éventails) non simples (mais plus relié au f -vecteur)

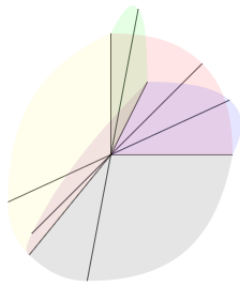


Histoire récente

- 2002 extension par Karu aux polytopes (éventails) non simples (mais plus relié au f -vecteur)
- 2012 Panina présente l'algèbre des polytopes à Lyon

Histoire récente

- 2002 extension par Karu aux polytopes (éventails) non simples (mais plus relié au f -vecteur)
- 2012 Panina présente l'algèbre des polytopes à Lyon
- 2015 Adiprasito, Huh et Katz prouvent un résultat analogue pour certains éventails non complets résolvant ainsi plusieurs conjectures combinatoires (polynôme chromatique)

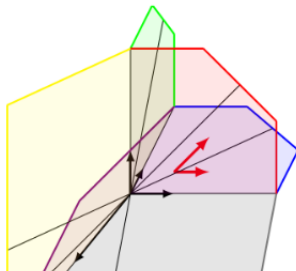


Histoire récente

- 2002 extension par Karu aux polytopes (éventails) non simples (mais plus relié au f -vecteur)
- 2012 Panina présente l'algèbre des polytopes à Lyon
- 2015 Adiprasito, Huh et Katz prouvent un résultat analogue pour certains éventails non complets résolvant ainsi plusieurs conjectures combinatoires (polynôme chromatique)
- 2018 Adiprasito démontre le g -théorème pour les sphères simpliciales

Histoire récente




- 2002 extension par Karu aux polytopes (éventails) non simples (mais plus relié au f -vecteur)
- 2012 Panina présente l'algèbre des polytopes à Lyon
- 2015 Adiprasito, Huh et Katz prouvent un résultat analogue pour certains éventails non complets résolvant ainsi plusieurs conjectures combinatoires (polynôme chromatique)
- 2018 Adiprasito démontre le g -théorème pour les sphères simpliciales
- (2019) Amini-P. : le résultat d'Adiprasito, Huh et Katz est lié à la cohomologie d'une variété tropicale



g -théorème

f -vecteurs et h -vecteurs

- P polytope (convexe) de dimension d ,
- f_i nombre de faces de dimension i ,
- $F(x) = \sum_i f_i x^i$,
- $H(x) = \sum_i h_i x^i := F(x - 1)$.

P	$F(x)$	$H(x)$
	$4 + 6x + 4x^2 + x^3$	$1 + x + x^2 + x^3$
	$8 + 12x + 6x^2 + x^3$	$1 + 3x + 3x^2 + x^3$
	$10 + 15x + 7x^2 + x^3$	$1 + 4x + 4x^2 + x^3$

Théorème (g -théorème)

Un vecteur entier (h_0, \dots, h_d) est le h -vecteur d'un polytope simple si et seulement si

- (positif) $h_i \geq 0$,
- (symétrique, Dehn-Sommerville) $h_i = h_{d-i}$,
- (caractéristique d'Euler) $h_0 = 1$,
- (unimodal) $h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{\lfloor d/2 \rfloor}$,
- une autre série d'inégalités.

Un peu de théorie de Hodge

Soit X est une variété complexe projective lisse de dimension complexe d .

$$H^0 \quad H^1 \quad H^2 \quad \dots \quad H^{2d-1} \quad H^{2d}$$

$$\text{Dualité de Poincaré : } H^k \simeq H^{2d-k}$$

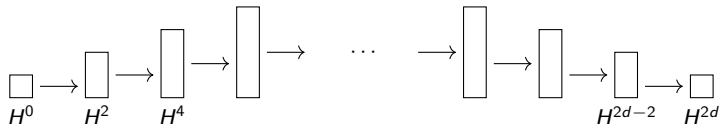
$$\text{Stanley : } h_i = \dim(H^{2i}(\mathbb{P}_{\Sigma_P}))$$

Théorème de Lefschetz

H^i est une algèbre graduée.

Il existe $\ell \in H^2$ tel que

$$H^k \xrightarrow[\cdot \ell^{d-k}]{} H^{2d-k}.$$

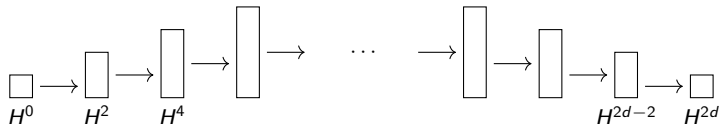


Théorème de Lefschetz

H^i est une algèbre graduée.

Il existe $\ell \in H^2$ tel que

$$H^k \xrightarrow[\cdot \ell^{d-k}]{} H^{2d-k}.$$



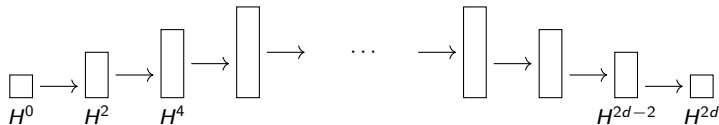
$$h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{\lfloor d/2 \rfloor} = h_{\lceil d/2 \rceil} \geq \dots \geq h_{d-1} \geq h_d.$$

Théorème de Lefschetz

H^i est une algèbre graduée.

Il existe $\ell \in H^2$ tel que

$$H^k \xrightarrow[\cdot \ell^{d-k}]{} H^{2d-k}.$$

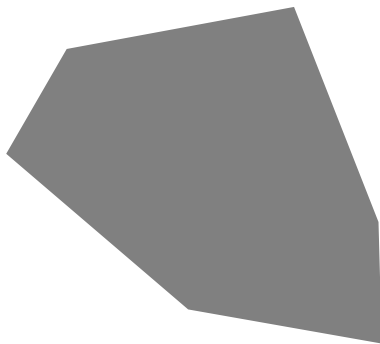


$$h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{\lfloor d/2 \rfloor} = h_{\lceil d/2 \rceil} \geq \dots \geq h_{d-1} \geq h_d.$$

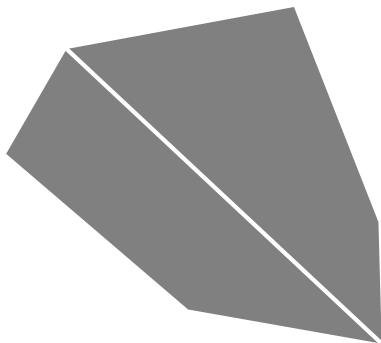
L'algèbre est engendrée par $H^2 \rightarrow$ toutes les autres inégalités.

Équidécomposabilité

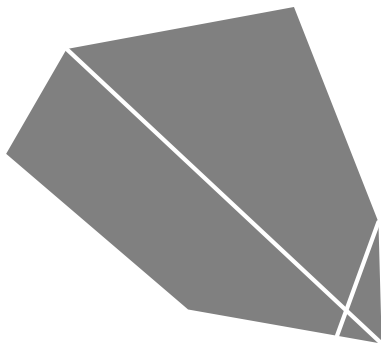
Congruence ciseaux



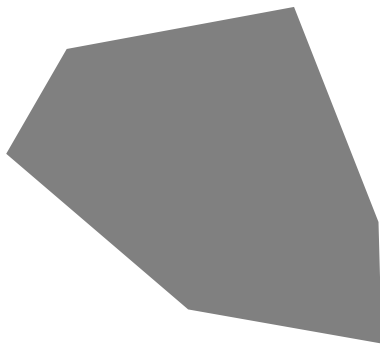
Congruence ciseaux



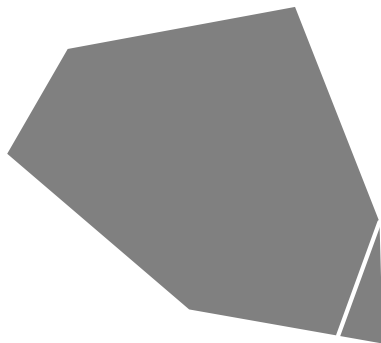
Congruence ciseaux



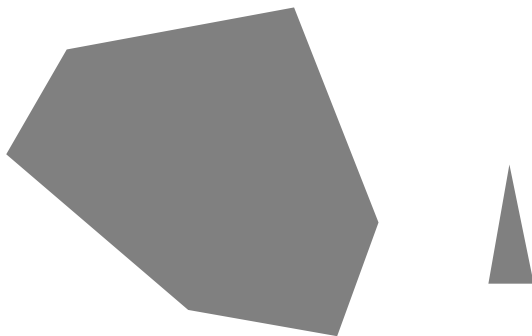
Congruence ciseaux



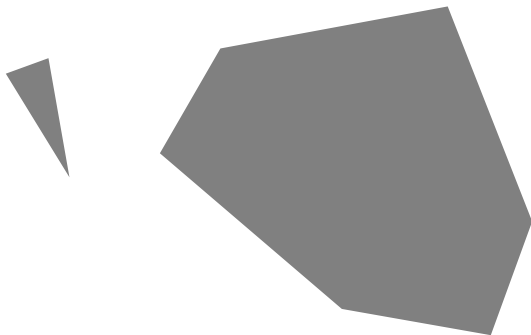
Congruence ciseaux



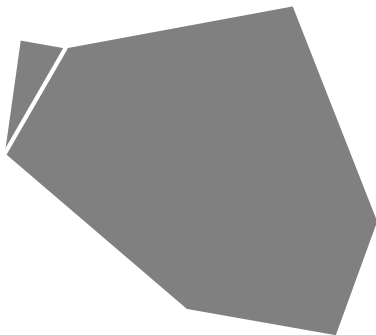
Congruence ciseaux



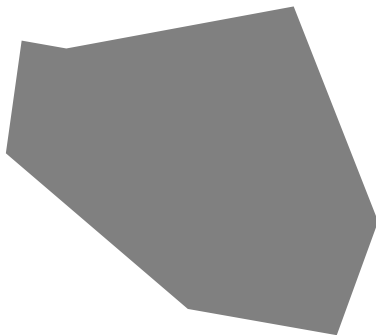
Congruence ciseaux



Congruence ciseaux



Congruence ciseaux



Théorème (Wallace-Bolyai-Gerwien)

Deux polygones (pas forcément convexes) sont équidécomposables si et seulement s'ils ont la même aire.

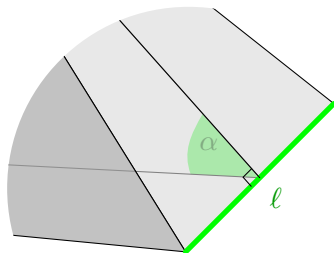
Théorème (Wallace-Bolyai-Gerwien)

Deux polygones (pas forcément convexes) sont équidécomposables si et seulement s'ils ont la même aire.

Question (Troisième problème de Hilbert)

Deux polytopes de dimension 3 de même volume sont-ils équidécomposable ?

Invariant de Dehn



$$l \otimes \alpha \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$$

$$\text{Dehn}(P) = \sum_{e \text{ arête de } P} l(e) \otimes \alpha(e).$$

Exemples

Exemple

Pour un cube de côté 1 :

$$12 \times \left(1 \otimes (\pi/2)\right) = 6 \times \left(1 \otimes \pi\right) = 0.$$

Exemples

Exemple

Pour un cube de côté 1 :

$$12 \times \left(1 \otimes (\pi/2)\right) = 6 \times \left(1 \otimes \pi\right) = 0.$$

Exemple

Pour un tétraèdre de volume 1.

$$6 \times \left(\sqrt[3]{6\sqrt{2}} \otimes \arccos(1/3)\right) = 6\sqrt[3]{6\sqrt{2}} \otimes \arccos(1/3).$$

Exemples

Exemple

Pour un cube de côté 1 :

$$12 \times (1 \otimes (\pi/2)) = 6 \times (1 \otimes \pi) = 0.$$

Exemple

Pour un tétraèdre de volume 1.

$$6 \times (\sqrt[3]{6\sqrt{2}} \otimes \arccos(1/3)) = 6\sqrt[3]{6\sqrt{2}} \otimes \arccos(1/3).$$

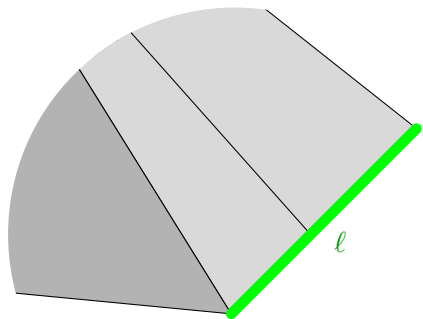
$\ell \otimes \alpha = (\ell/q) \otimes (q\alpha)$ pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$. Donc $\ell \otimes \alpha = 0$ si et seulement si α/π est rationnel.

Proposition

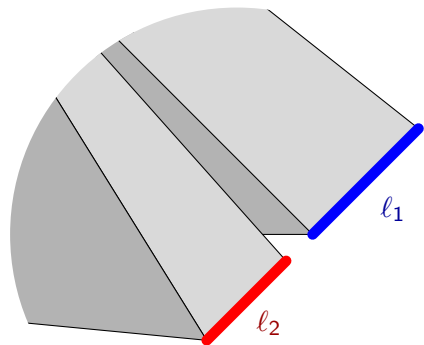
$\arccos(1/3)/\pi$ n'est pas rationnel.

En particulier, $\text{Dehn}(\text{Cube}) \neq \text{Dehn}(\text{Tétraèdre})$.

Invariance



Invariance



Algèbre des polytopes

Définition

Soit \mathcal{P} l'ensemble de tous les polytopes convexes non vides de \mathbb{R}^d .

L'algèbre des polytopes Π sur \mathbb{R}^d est le groupe engendré par $[P]$ pour tout

$P \in \mathcal{P}$ quotienté par

Définition

Soit \mathcal{P} l'ensemble de tous les polytopes convexes non vides de \mathbb{R}^d .

L'algèbre des polytopes Π sur \mathbb{R}^d est le groupe engendré par $[P]$ pour tout

$P \in \mathcal{P}$ quotienté par

- (T) $[P + t] = [P]$ où t est un vecteur de translation,

Définition

Soit \mathcal{P} l'ensemble de tous les polytopes convexes non vides de \mathbb{R}^d .

L'algèbre des polytopes Π sur \mathbb{R}^d est le groupe engendré par $[P]$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ quotienté par

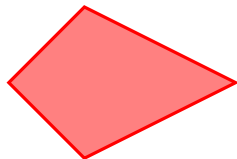
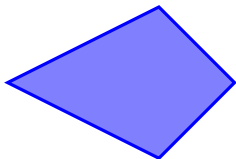
- (T) $[P + t] = [P]$ où t est un vecteur de translation,
- (V) Si $P, Q \in \mathcal{P}$ et $P \cup Q \in \mathcal{P}$, alors $[P \cup Q] + [P \cap Q] = [P] + [Q]$.

Définition

Soit \mathcal{P} l'ensemble de tous les polytopes convexes non vides de \mathbb{R}^d .

L'algèbre des polytopes Π sur \mathbb{R}^d est le groupe engendré par $[P]$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ quotienté par

- (T) $[P + t] = [P]$ où t est un vecteur de translation,
- (V) Si $P, Q \in \mathcal{P}$ et $P \cup Q \in \mathcal{P}$, alors $[P \cup Q] + [P \cap Q] = [P] + [Q]$.

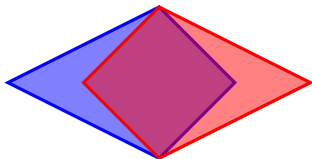


Définition

Soit \mathcal{P} l'ensemble de tous les polytopes convexes non vides de \mathbb{R}^d .

L'algèbre des polytopes Π sur \mathbb{R}^d est le groupe engendré par $[P]$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ quotienté par

- (T) $[P + t] = [P]$ où t est un vecteur de translation,
- (V) Si $P, Q \in \mathcal{P}$ et $P \cup Q \in \mathcal{P}$, alors $[P \cup Q] + [P \cap Q] = [P] + [Q]$.

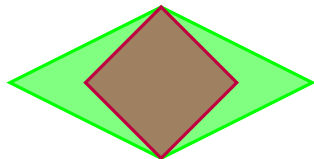


Définition

Soit \mathcal{P} l'ensemble de tous les polytopes convexes non vides de \mathbb{R}^d .

L'algèbre des polytopes Π sur \mathbb{R}^d est le groupe engendré par $[P]$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ quotienté par

- (T) $[P + t] = [P]$ où t est un vecteur de translation,
- (V) Si $P, Q \in \mathcal{P}$ et $P \cup Q \in \mathcal{P}$, alors $[P \cup Q] + [P \cap Q] = [P] + [Q]$.

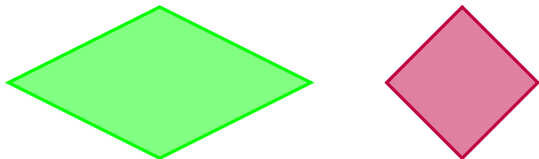


Définition

Soit \mathcal{P} l'ensemble de tous les polytopes convexes non vides de \mathbb{R}^d .

L'algèbre des polytopes Π sur \mathbb{R}^d est le groupe engendré par $[P]$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ quotienté par

- (T) $[P + t] = [P]$ où t est un vecteur de translation,
- (V) Si $P, Q \in \mathcal{P}$ et $P \cup Q \in \mathcal{P}$, alors $[P \cup Q] + [P \cap Q] = [P] + [Q]$.



Définition

Soit \mathcal{P} l'ensemble de tous les polytopes convexes non vides de \mathbb{R}^d .

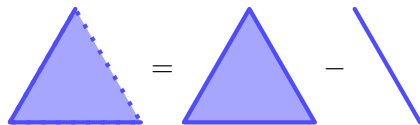
L'algèbre des polytopes Π sur \mathbb{R}^d est le groupe engendré par $[P]$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ quotienté par

- (T) $[P + t] = [P]$ où t est un vecteur de translation,
- (V) Si $P, Q \in \mathcal{P}$ et $P \cup Q \in \mathcal{P}$, alors $[P \cup Q] + [P \cap Q] = [P] + [Q]$.

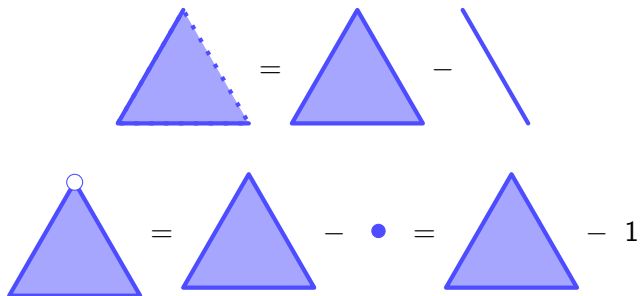
$$[\emptyset] = 0$$

Une fonction $\mathcal{P} \rightarrow G$ qui induit un morphisme de groupe $\Pi \rightarrow G$ est appelée une *valuation*.

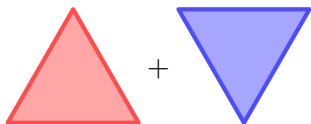
Notations



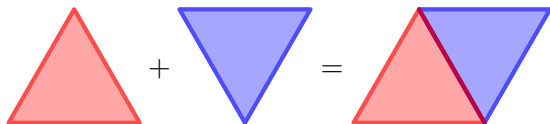
Notations



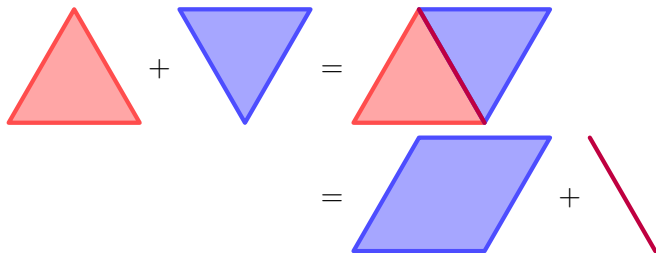
Exemples



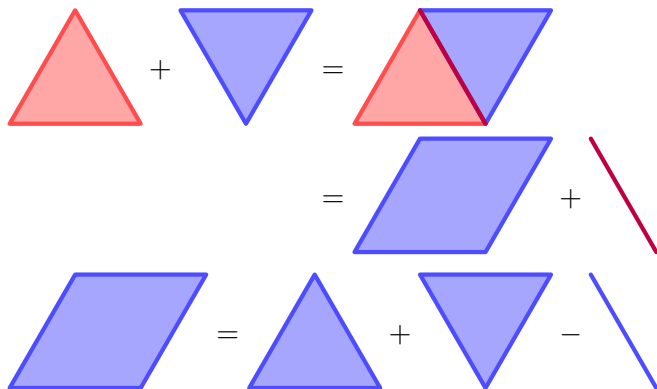
Exemples



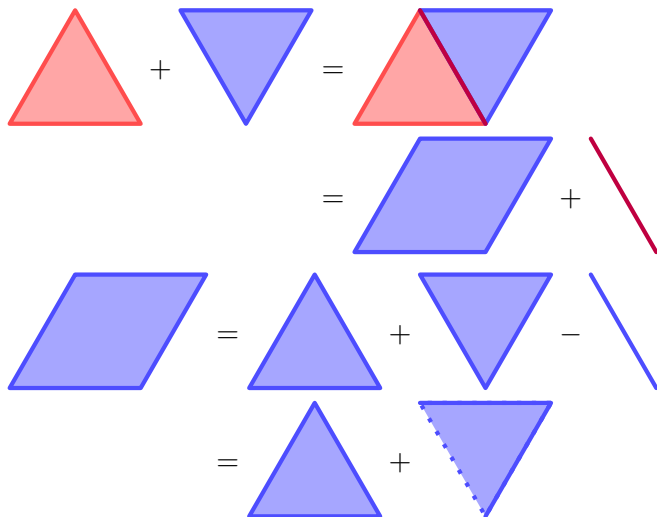
Exemples



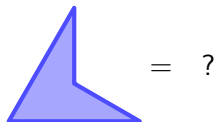
Exemples



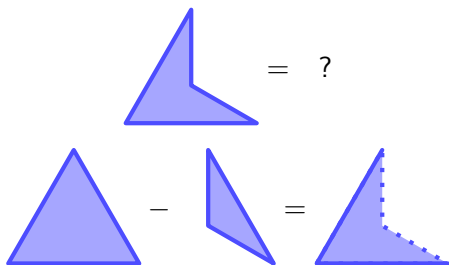
Exemples



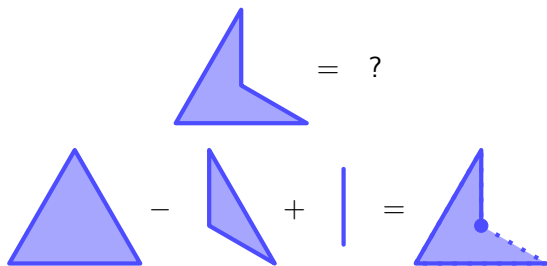
Exemples



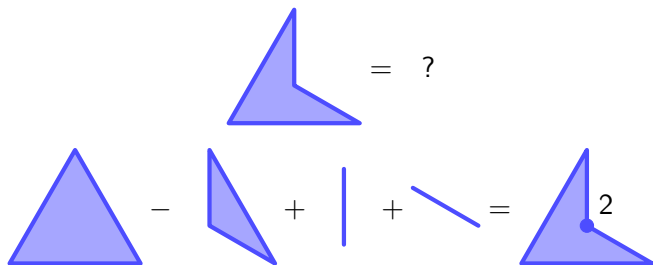
Exemples



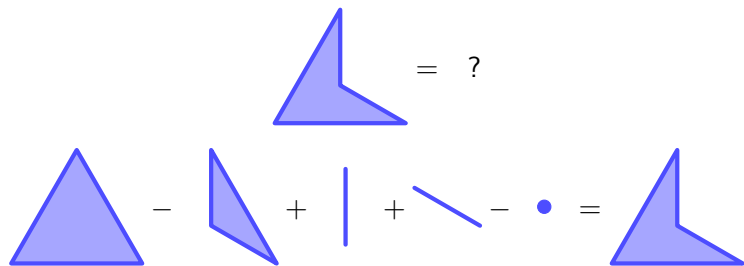
Exemples



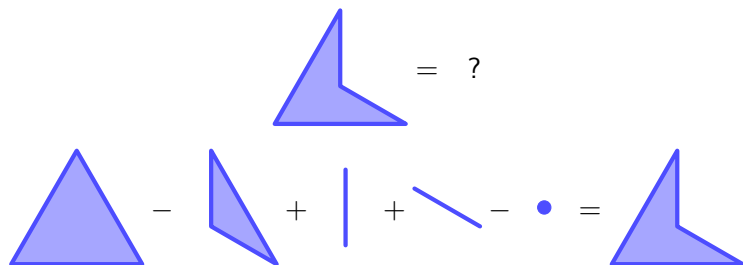
Exemples



Exemples



Exemples



Proposition

Ces notations définissent bien un unique objet dans l'algèbre des polyèdres.

Multiplication

Définition

Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. Alors $[P] \cdot [Q] = [P + Q]$ où $P + Q$ est la somme de Minkowski :

$$P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

Multiplication

Définition

Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. Alors $[P] \cdot [Q] = [P + Q]$ où $P + Q$ est la somme de Minkowski :

$$P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}.$$



Multiplication

Définition

Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. Alors $[P] \cdot [Q] = [P + Q]$ où $P + Q$ est la somme de Minkowski :

$$P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

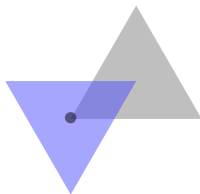


Multiplication

Définition

Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. Alors $[P] \cdot [Q] = [P + Q]$ où $P + Q$ est la somme de Minkowski :

$$P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

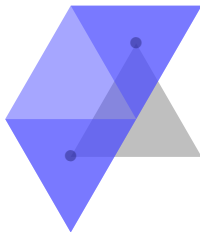


Multiplication

Définition

Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. Alors $[P] \cdot [Q] = [P + Q]$ où $P + Q$ est la somme de Minkowski :

$$P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

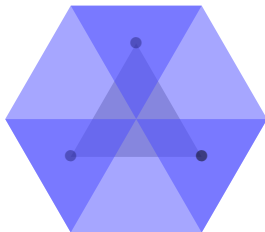


Multiplication

Définition

Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. Alors $[P] \cdot [Q] = [P + Q]$ où $P + Q$ est la somme de Minkowski :

$$P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

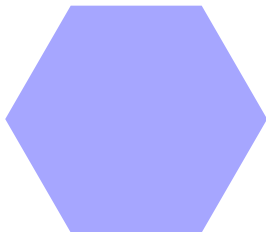


Multiplication

Définition

Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. Alors $[P] \cdot [Q] = [P + Q]$ où $P + Q$ est la somme de Minkowski :

$$P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

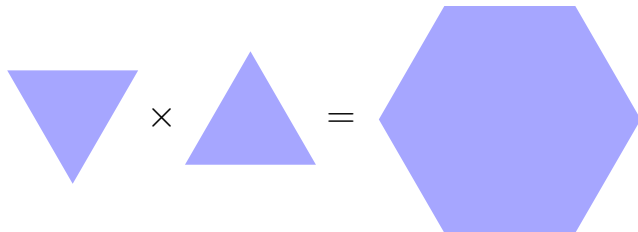


Multiplication

Définition

Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. Alors $[P] \cdot [Q] = [P + Q]$ où $P + Q$ est la somme de Minkowski :

$$P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}.$$



Multiplication

Définition

Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. Alors $[P] \cdot [Q] = [P + Q]$ où $P + Q$ est la somme de Minkowski :

$$P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

On étend la multiplication par linéarité sur Π .

Multiplication

Définition

Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. Alors $[P] \cdot [Q] = [P + Q]$ où $P + Q$ est la somme de Minkowski :

$$P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

On étend la multiplication par linéarité sur Π .

$$1 = \bullet$$

Multiplication

Définition

Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. Alors $[P] \cdot [Q] = [P + Q]$ où $P + Q$ est la somme de Minkowski :

$$P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}.$$

On étend la multiplication par linéarité sur Π .

$$1 = \bullet$$

Exercice

Montrer que la multiplication est bien définie.

Exemples et contre-exemples

The diagram illustrates the multiplication of two line segments, each with an endpoint. The first segment is a horizontal blue line with a small white circle at its right end. This is followed by a multiplication symbol '×'. The second segment is identical to the first. This is followed by a not-equal symbol '≠'. The final segment is a longer horizontal blue line, also with a small white circle at its right end, representing the result of the multiplication.

Exemples et contre-exemples

$$\text{---} \circ \times \text{---} \circ \neq \text{---} \text{---} \circ$$

$$\text{---} \circ \times \text{---} \circ = \left(\text{---} - 1 \right)^2$$

Exemples et contre-exemples

$$\text{---} \circ \times \text{---} \circ \neq \text{-----} \circ$$

$$\text{---} \circ \times \text{---} \circ = \text{---}^2 - 2 \cdot \text{---} + 1$$

Exemples et contre-exemples

$$\text{---} \circ \times \text{---} \circ \neq \text{-----} \circ$$

$$\text{---} \circ \times \text{---} \circ = \text{-----} - 2 \cdot \text{---} \circ + 1$$

Exemples et contre-exemples

$$\text{---} \circ \times \text{---} \circ \neq \text{-----} \circ$$

$$\text{---} \circ \times \text{---} \circ = \text{---} \circ - \text{---} + 1$$

Exemples et contre-exemples

$$\text{---} \circ \times \text{---} \circ \neq \text{-----} \circ$$

$$\text{---} \circ \times \text{---} \circ = \underset{\circ}{-1} + 1$$

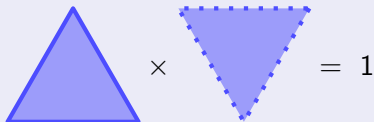
Exemples et contre-exemples

$$\text{---} \circ \times \text{---} \circ \neq \text{---} \text{---} \circ$$

$$\text{---} \circ \times \text{---} \circ = 0$$

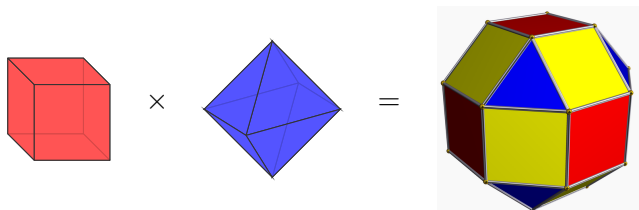
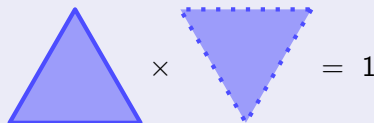
Exemples et contre-exemples

Exercice


$$\triangle \times \triangle_{\text{dotted}} = 1$$

Exemples et contre-exemples

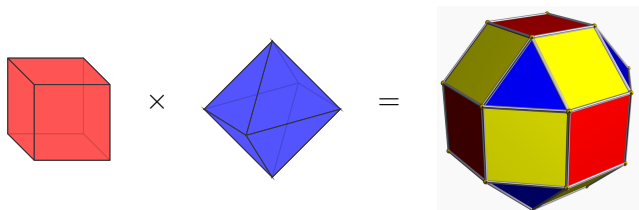
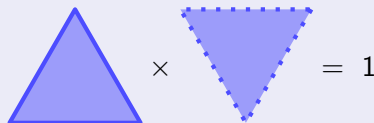
Exercice



Le petit rhombicuboctaèdre a été créé par le logiciel Stella de Robert Webb :
<http://www.software3d.com/Stella.php>.

Exemples et contre-exemples

Exercice



$$\text{Rhombi}_2 \approx \text{Cube}_2 + \text{Octa}_2 + \text{Cube}_1 \times \text{Octa}_1$$

Opérateur de dilatation

Définition

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\Delta(\lambda)[P] = [\lambda P]$, où λP est l'homothétie de P par le facteur λ .

Opérateur de dilatation

Définition

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\Delta(\lambda)[P] = [\lambda P]$, où λP est l'homothétie de P par le facteur λ .

Proposition

$\Delta(\lambda)$ est un morphisme d'algèbre pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Delta(\lambda)([P] \cdot [Q]) = (\Delta(\lambda)[P]) \cdot (\Delta(\lambda)[Q])$$

Opérateur de dilatation

Définition

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\Delta(\lambda)[P] = [\lambda P]$, où λP est l'homothétie de P par le facteur λ .

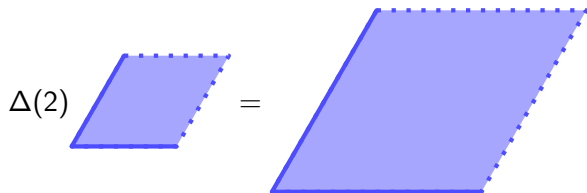
Proposition

$\Delta(\lambda)$ est un morphisme d'algèbre pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

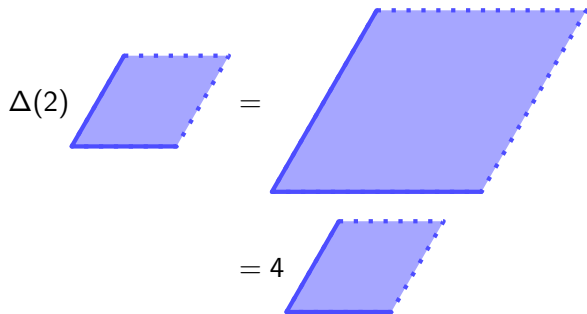
Exemple

Si $n \in \mathbb{N}$, $\Delta(n)[P] = [P]^n$.

Exemples



Exemples

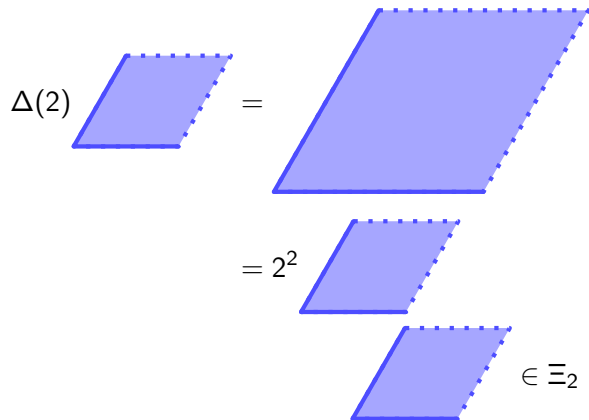


Exemples

$$\Delta(2) = \text{[Diagram of a parallelogram]} = \text{[Diagram of a larger parallelogram]} = 2^2 \text{ [Diagram of a smaller parallelogram]}$$

The diagram illustrates the decomposition of a 2-simplex $\Delta(2)$. On the left, a small blue parallelogram is labeled $\Delta(2)$. This is followed by an equals sign and a larger blue parallelogram. A second equals sign follows, leading to a smaller blue parallelogram with the label 2^2 placed to its left. All parallelograms have solid blue outlines and dashed blue outlines on their top and right sides.

Exemples



Exemples

$$\begin{aligned} \Delta(2) &= \text{[Diagram: a parallelogram with solid bottom and left sides, and dashed top and right sides]} \\ &= 2^2 \text{ [Diagram: a smaller parallelogram with solid bottom and left sides, and dashed top and right sides]} \\ &\in \Xi_2 \text{ [Diagram: a parallelogram with solid bottom and left sides, and dashed top and right sides]} \\ \forall \lambda > 0, \quad \lambda \cdot \text{[Diagram: a parallelogram with solid bottom and left sides, and dashed top and right sides]} &:= \Delta(\sqrt{\lambda}) \text{ [Diagram: a parallelogram with solid bottom and left sides, and dashed top and right sides]} \end{aligned}$$

Structure d'algèbre

Définition

L'espace de poids r de Π est par définition

$$\Xi_r := \left\{ x \in \Pi \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(n)x = n^r x \right\}.$$

Structure d'algèbre

Définition

L'espace de poids r de Π est par définition

$$\Xi_r := \left\{ x \in \Pi \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(n)x = n^r x \right\}.$$

Théorème

L'algèbre des polytopes est (presque) une \mathbb{R} -algèbre graduée :

- $\Pi = \bigoplus_{r=0}^d \Xi_r$,
- $\Xi_0 = \mathbb{Z} \cdot 1$ et Ξ_r est un \mathbb{R} -espace vectoriel pour $r \geq 1$,
- $\Xi_i \cdot \Xi_j = \Xi_{i+j}$,
- *compatibilité, etc.*

Structure d'algèbre

Définition

L'espace de poids r de Π est par définition

$$\Xi_r := \left\{ x \in \Pi \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(n)x = n^r x \right\}.$$

Théorème

L'algèbre des polytopes est (presque) une \mathbb{R} -algèbre graduée :

- $\Pi = \bigoplus_{r=0}^d \Xi_r$,
- $\Xi_0 = \mathbb{Z} \cdot 1$ et Ξ_r est un \mathbb{R} -espace vectoriel pour $r \geq 1$,
- $\Xi_i \cdot \Xi_j = \Xi_{i+j}$,
- *compatibilité, etc.*

$$[P]_0 = 1, \quad [P]_d = \text{Vol}_d(P) \cdot [\text{cube semi-ouvert}], \quad [P]_k = 0 \text{ pour } k > d.$$

Esquisse de preuve

Pour tout $P \in \mathcal{P}$, il suffit de décomposer $[P]$ en $[P]_0 + \cdots + [P]_d$ avec $[P]_k \in \Xi_k$.

Esquisse de preuve

Pour tout $P \in \mathcal{P}$, il suffit de décomposer $[P]$ en $[P]_0 + \cdots + [P]_d$ avec $[P]_k \in \Xi_k$.

Lemme

$([P] - 1)^n = 0$ pour tout $n > d$.

Lemme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}([P] - 1)$ est bien défini : il existe un unique élément Q tel que $nQ = P$.

Esquisse de preuve

Pour tout $P \in \mathcal{P}$, il suffit de décomposer $[P]$ en $[P]_0 + \cdots + [P]_d$ avec $[P]_k \in \Xi_k$.

Lemme

$([P] - 1)^n = 0$ pour tout $n > d$.

Lemme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}([P] - 1)$ est bien défini : il existe un unique élément Q tel que $nQ = P$.

Donc les séries entières à coefficients dans \mathbb{Q} peuvent être appliqués formellement à $[P] - 1$.

Esquisse de preuve suite

Posons

$$p = \log([P]) = \log(1 + ([P] - 1)) = ([P] - 1) - \frac{1}{2}([P] - 1)^2 + \frac{1}{3}([P] - 1)^3 - \dots$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\Delta(n)p &= \Delta(n) \log(1 + ([P] - 1)) \\ &= \log(1 + \Delta(n)([P] - 1)) \\ &= \log(1 + (\Delta(n)[P] - 1)) \\ &= \log(1 + ([P]^n - 1)) \\ &= \log([P]^n)\end{aligned}$$

$$\Delta(n)p = n \log([P])$$

Donc $p \in \Xi_1$. De plus comme $([P] - 1)$ divise $\log([P])$, on obtient que $p^{d+1} = 0$. Donc $\exp(p)$ a un sens et

$$[P] = \exp(\log([P])) = \exp(p) = 1 + p + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3!}p^3 + \dots + \frac{1}{d!}p^d.$$

Donc on peut poser $[P]_k = \frac{1}{k!}p^k$.

Exemples

Exercice

Montrer que $\log(\triangle) =$

Exemples

Exercice

Montrer que $\log(\triangle) = \triangle - \text{trapezoid} - 1$

Exemples

Exercice

Montrer que $\log(\triangle) = \triangle - \text{trapezoid} - 1$

Exercice

Montrer que $\log(\triangle) + \log(\nabla) = \triangle$

Esquisse de preuve (lemmes en dimension 2)

$$\begin{aligned} \Delta(3) &= \text{triangle} \\ &= \text{triangle} + \text{rectangle} \\ &= 3 \cdot \text{triangle} + 3 \cdot \text{rectangle} \end{aligned}$$

The diagram illustrates the decomposition of a triangle into smaller triangles and squares. It shows three stages of the process:

- Top: A small blue triangle on the left is equated to a larger blue triangle on the right.
- Middle: The larger triangle is shown being decomposed into a smaller triangle and a square.
- Bottom: The decomposition is repeated, showing three small triangles and three squares.

Esquisse de preuve (lemmes en dimension 2)

$$\Delta(n) \cdot \text{triangle} = \binom{n}{1} \cdot \text{triangle} + \binom{n}{2} \cdot \text{square}$$
The diagram shows the equation $\Delta(n) \cdot \text{triangle} = \binom{n}{1} \cdot \text{triangle} + \binom{n}{2} \cdot \text{square}$. On the left, a large blue triangle is shown with a dotted line representing a diagonal cut. On the right, there are two terms: the first is a binomial coefficient $\binom{n}{1}$ multiplied by a smaller blue triangle, and the second is a binomial coefficient $\binom{n}{2}$ multiplied by a blue square. The dotted lines in the triangle and square indicate their relative positions and sizes.

Esquisse de preuve (lemmes en dimension 2)

$$\Delta(n) \cdot \text{triangle} = \binom{n}{1} \cdot \text{triangle} + \binom{n}{2} \cdot \text{square}$$

Par triangulation, on obtient

$$\Delta(n)[P] = 1 + \binom{n}{1}y_1 + \binom{n}{2}y_2$$

Esquisse de preuve (lemmes en dimension 2)

$$\Delta(n) \cdot \text{triangle} = \binom{n}{1} \cdot \text{triangle} + \binom{n}{2} \cdot \text{square}$$

Par triangulation, on obtient

$$\Delta(n)[P] = 1 + \binom{n}{1}y_1 + \binom{n}{2}y_2$$

En outre,

$$\Delta(n)[P] = [P]^n = (1 + ([P] - 1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ([P] - 1)^k$$

Esquisse de preuve (lemmes en dimension 2)

$$\Delta(n) \cdot \text{triangle} = \binom{n}{1} \cdot \text{triangle} + \binom{n}{2} \cdot \text{square}$$

Par triangulation, on obtient

$$\Delta(n)[P] = 1 + \binom{n}{1}y_1 + \binom{n}{2}y_2$$

En outre,

$$\Delta(n)[P] = [P]^n = (1 + ([P] - 1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ([P] - 1)^k$$

$M := \left(\binom{i}{j} \right)_{i,j}$ est une matrice triangulaire donc inversible.

$$\begin{pmatrix} \Delta(0)[P] \\ \Delta(1)[P] \\ \Delta(2)[P] \\ \Delta(3)[P] \\ \vdots \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ [P] - 1 \\ ([P] - 1)^2 \\ ([P] - 1)^3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Applications : équidécomposition, volume mixte, g -théorème

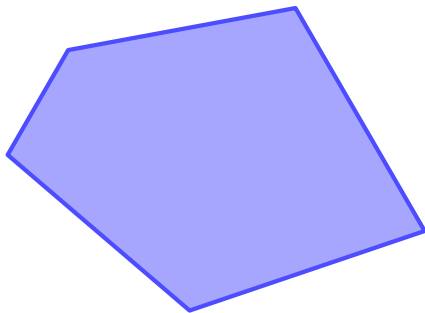
Équidécomposition : une famille d'invariants

Soient u un vecteur de \mathbb{R}^n et $P \in \mathcal{P}$. On définit

$$P_u = \{x \in P \mid \langle x, u \rangle \text{ maximal}\}$$

Soit $U = (u_1, \dots, u_k)$ une famille orthogonale.

$$P_U = (P_{(u_1, \dots, u_{k-1})})_{u_k}$$



Équidécomposition : une famille d'invariants

Soient u un vecteur de \mathbb{R}^n et $P \in \mathcal{P}$. On définit

$$P_u = \{x \in P \mid \langle x, u \rangle \text{ maximal}\}$$

Soit $U = (u_1, \dots, u_k)$ une famille orthogonale.

$$P_U = (P_{(u_1, \dots, u_{k-1})})_{u_k}$$

Définition (« Frame functionals »)

Si U est une famille orthogonale, on définit

$$f_U := \text{Vol}_{d-\text{card}(U)}(P_U)$$

Théorème (Séparation)

Les fonctions f_U forment un système complet d'invariants pour Π .

Pour U de taille k , f_U est nul sur Ξ^r pour $r \neq d - k$.

Équidécomposition : le groupe des cônes

Soit $\Sigma = \bigoplus \Sigma^k$, avec Σ^k le groupe engendré par les cônes (polyédraux convexes) de dimension au plus k modulo (V) et modulo les cônes de dimension au plus $k - 1$.

On a une application $\Pi \rightarrow \Sigma \otimes \mathbb{R}$

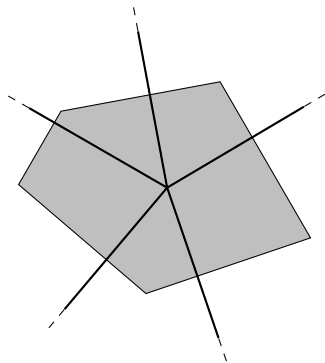
$$P \mapsto \sum_{F \text{ face de } P} \text{Vol}_{\dim(F)}(F) \otimes \text{conedual}(F).$$

Équidécomposition : le groupe des cônes

Soit $\Sigma = \bigoplus \Sigma^k$, avec Σ^k le groupe engendré par les cônes (polyédraux convexes) de dimension au plus k modulo (V) et modulo les cônes de dimension au plus $k - 1$.

On a une application $\Pi \rightarrow \Sigma \otimes \mathbb{R}$

$$P \mapsto \sum_{F \text{ face de } P} \text{Vol}_{\dim(F)}(F) \otimes \text{conedual}(F).$$

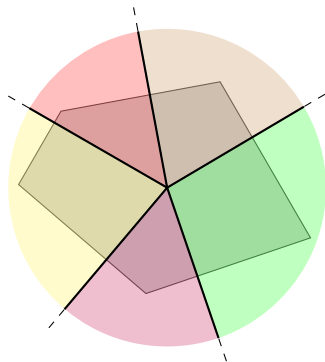


Équidécomposition : le groupe des cônes

Soit $\Sigma = \bigoplus \Sigma^k$, avec Σ^k le groupe engendré par les cônes (polyédraux convexes) de dimension au plus k modulo (V) et modulo les cônes de dimension au plus $k - 1$.

On a une application $\Pi \rightarrow \Sigma \otimes \mathbb{R}$

$$P \mapsto \sum_{F \text{ face de } P} \text{Vol}_{\dim(F)}(F) \otimes \text{conedual}(F).$$

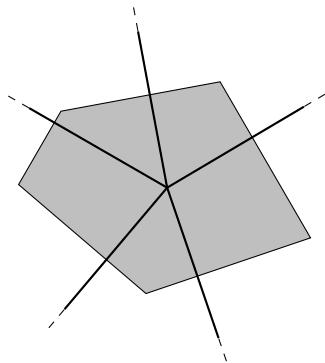


Équidécomposition : le groupe des cônes

Soit $\Sigma = \bigoplus \Sigma^k$, avec Σ^k le groupe engendré par les cônes (polyédraux convexes) de dimension au plus k modulo (V) et modulo les cônes de dimension au plus $k - 1$.

On a une application $\Pi \rightarrow \Sigma \otimes \mathbb{R}$

$$P \mapsto \sum_{F \text{ face de } P} \text{Vol}_{\dim(F)}(F) \otimes \text{conedual}(F).$$



Équidécomposition : autres cas

Soient $\tilde{\Pi} = \Pi / (P = 0 \mid \dim(P) < d)$ et $\tilde{\Sigma} = \Sigma / (C = 0 \mid C \text{ contient une droite})$.

Théorème

Le morphisme $\Pi \rightarrow \Sigma \otimes \mathbb{R}$ induit un morphisme injectif $\tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Sigma} \otimes \mathbb{R}$.

Équidécomposition : autres cas

Soient $\tilde{\Pi} = \Pi / (P = 0 \mid \dim(P) < d)$ et $\tilde{\Sigma} = \Sigma / (C = 0 \mid C \text{ contient une droite})$.

Théorème

Le morphisme $\Pi \rightarrow \Sigma \otimes \mathbb{R}$ induit un morphisme injectif $\tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Sigma} \otimes \mathbb{R}$.

Soient $\hat{\Pi} = \tilde{\Pi} / (\text{isométries})$ (on retrouve la congruence ciseaux) et $\hat{\Sigma} = \tilde{\Sigma} / (\text{isométries})$.

Théorème

Le morphisme $\Pi \rightarrow \Sigma \otimes \mathbb{R}$ induit un morphisme $\hat{\Pi} \rightarrow \hat{\Sigma} \otimes \mathbb{R}$.

Cas $d = 2 \leftrightarrow$ volume. Cas $d = 3 \leftrightarrow$ invariant de Dehn + volume.

Conjecture

Ce morphisme est injectif.

Volume mixte

Théorème (Volume mixte)

Soient $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$. Alors $\text{Vol}_d(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n)$ est un polynôme homogène de degré d en les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$\text{Vol}_d(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n) = \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^n \text{Vol}(P_{i_1}, \dots, P_{i_d}) \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_d}.$$

Volume mixte

Théorème (Volume mixte)

Soient $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$. Alors $\text{Vol}_d(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n)$ est un polynôme homogène de degré d en les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$\text{Vol}_d(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n) = \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^n \text{Vol}(P_{i_1}, \dots, P_{i_d}) \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_d}.$$

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned} [\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n]_d &= \left((\Delta(\lambda_1)[P_1]) \cdots (\Delta(\lambda_n)[P_n]) \right)_d \\ &= \left((1 + \lambda_1 [P_1]_1 + \dots + \lambda_1^d [P_1]_d) \cdots (1 + \lambda_n [P_n]_1 + \dots + \lambda_n^d [P_n]_d) \right)_d \end{aligned}$$

Le coefficient correspondant à $\lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_d^{k_d}$ est simplement le volume de

$$[P_1]_{k_1} \cdots [P_n]_{k_n} \in \Xi_d \quad \square$$

g -théorème

Soit P un polytope simple. On peut décrire P par $\ell_1, \dots, \ell_n \in (\mathbb{R}^n)^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \ell_1(x) \leq a_1, \dots, \ell_n(x) \leq a_n\}$$

En faisant varier légèrement a_1, \dots, a_n on obtient un « voisinage » $V \subset \mathcal{P}$ de P .

On pose $\Xi_k(P)$ l'espace engendré par les $[Q]_k$ pour $Q \in V$.

g -théorème

Soit P un polytope simple. On peut décrire P par $\ell_1, \dots, \ell_n \in (\mathbb{R}^n)^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \ell_1(x) \leq a_1, \dots, \ell_n(x) \leq a_n\}$$

En faisant varier légèrement a_1, \dots, a_n on obtient un « voisinage » $V \subset \mathcal{P}$ de P .

On pose $\Xi_k(P)$ l'espace engendré par les $[Q]_k$ pour $Q \in V$.

Théorème

On a $\dim(\Xi_k(P)) = h_k$ et $p = \log(P)$ donnent un isomorphisme

$$\Xi_k(P) \underset{\cdot p^{d-2k}}{\simeq} \Xi_{d-k}(P)$$

En particulier, le h -vecteur est positif, symétrique et unimodal.

Exercices et références

Des exercices et leurs corrections sont disponibles sur :

<https://plmbox.math.cnrs.fr/d/768a53d43a7f4f33ad77/>

Le TD1 est sur le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien et les invariants de Dehn. Le TD2 (moins lié la présentation) est sur la classification des polyèdres réguliers et semi-réguliers. Le TD3 est sur $\tilde{\Pi}$ où l'on ne se souvient pas des polytopes de dimensions inférieures. Le TD sur l'algèbre des polytopes propose quelques calculs avec l'algèbre des polytopes, ainsi que des pistes de démonstration pour certaines propriétés évoquées ci-dessus.

Les deux principaux articles sur l'algèbre des polytopes et son lien avec le g -théorème :



McMullen, Peter, The polytope algebra, *Advances in Mathematics* Volume 78, Issue 1 (1989) : 76-130.

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870889900297>



McMullen, Peter, On simple polytopes, *Inventiones mathematicae* 113.2 (1993) : 419-444. <http://eudml.org/doc/144133>