Rapport de stage : Théorie analytique des nombres

LECLERC Gaétan

11 juin 2018 - 27 juillet 2018

1 Introduction

Ce document est un rapport de stage effectué en fin de premiere année à l'ENS de Rennes, à la faculté des sciences de Luminy (Marseille) et encadré par Sary Drappeau. L'objectif premier de ce stage était de comprendre un texte de Selberg (Note on *a paper by L. G. Sathe*, 1953) traitant de théorie analytique des nombres.

Plus précisement, il s'agissait d'estimer $\sum_{n\leq x} d_z(n)$, $z \in \mathbb{C}$, avec $d_z(n)$ définie par :

$$\zeta^z(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{d_z(n)}{n^s}$$

Me retrouvant plongé dans un domaine absolument inconnu, je me suis beaucoup aidé du livre de Gérald Ténenbaum *Théorie analytique et probabiliste des nombres* pour le découvrir. Je propose dans ce rapport une introduction aux idées de la théorie des nombres : d'abord quelques techniques très élémentaires puis des techniques analytiques classiques.
Nous comprendrons tout d'abord pourquoi estimer $d_z(n)$ est bien plus difficile que d'estimer $d_k(n)$ avec $k \in \mathbb{N}$, puis nous expliquerons enfin en détail les idées de Selberg.
Ce rapport sera volontairement ponctué de nombreuses applications pour essayer de donner du recul, et pour montrer la grande richesse de la théorie.

Je remercie bien sûr mon encadrant Sary Drappeau pour m'avoir fait découvrir ce joli domaine.

2 Méthodes élémentaires

La plupart des résultats présenté ici sont extraits du livre de Gérald Ténembaum : *Théorie analytique et probabiliste des nombres.*

2.1 Fonctions arithmétiques

2.1.1 Définitions

Définition 1. On appelle *fonction arithmétique* une fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ à valeurs complexes. On dit qu'une fonction arithmétique f est *additive* ssi

$$n \wedge m = 1 \Rightarrow f(mn) = f(n) + f(m)$$

et l'on dit qu'elle est *multiplicative* ssi f(1)=1 et

$$n \wedge m = 1 \Rightarrow f(nm) = f(n)f(m)$$

La condition $f(1) = 1$ est une convention permettant d'exclure la fonction nulle des fonctions multiplicatives.

Ces classes de fonctions sont celles qui respectent la nature multiplicative de $\mathbb{N}$. En effet, on peut ecrire :

$$f(n) = \sum_{p^\nu \| n} f(p^\nu), \quad f(n) = \prod_{p^\nu \| n} f(p^\nu)$$

dans le cas ou f est respectivement additive, ou multiplicative.
(La notation $p^\nu \| n$ signifie : $p^\nu | n$ et $p^{\nu+1} \nmid n$.)

2.1.2 Exemples

Exemple 1. Voici quelques fonctions arithmétiques fondamentales :

- Les fonctions dénombrant le nombre total de facteurs premiers de n, comptés avec ou sans multiplicité :
$$\Omega(n) := \sum_{p^\nu \| n} \nu, \qquad \omega(n) := \sum_{p^\nu \| n} 1$$

- les fonctions "nombres de diviseurs" ou "somme des puissances a-iemes des diviseurs":
$$\tau(n) := \sum_{d|n} 1, \qquad \sigma_a(n) := \sum_{d|n} d^a$$

- La fonction indicatrice d'Euler :
$$\varphi(n) := \sum_{\substack{1 \le h \le n \\ h \wedge n = 1}} 1$$

- La fonction de Möbius définie par
$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = p_1 p_2 \dots p_k \text{ avec les } p_i \text{ distincts} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- La fonction de Von Mangoldt :
$$\Lambda(n) := \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^\nu \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est sous entendu et le sera souvent à partir de maintenant que p désigne un nombre premier. Dans la définition de μ, les p_i sont aussi premiers.

On remarque immédiatement que les fonctions Ω et ω sont additives.

Pour mettre en évidence le fait que τ est également additive, il faut lui trouver une formule :
on sait que les diviseurs de $n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}$ sont les entiers de la forme $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$,
avec $0 \le \alpha_i \le \nu_i$.
On compte donc $(\nu_1 + 1)(\nu_2 + 1) \dots (\nu_k + 1)$ diviseurs de n.
D'où le théorème suivant :

Théorème 1. *La fonction "nombre de diviseurs " τ est multiplicative. On a*
$$\tau(n) = \prod_{p^\nu \| n} (\nu + 1)$$

Les fonctions σ_k seront examinées plus loin. Pour la fonction de Möbius, on voit facilement que si n possède un facteur carré, $\mu(n) = 0$, et sinon $\mu(n) = (-1)^{\omega(n)}$. Ceci amène au constat suivant :

Théorème 2. *La fonction de Möbius est multiplicative.*

2.1.3 Séries de Dirichlet

Définition 2. Soit f une fonction arithmétique. on appelle série de Dirichlet (formelle) associée à f la série :

$$D(f,s) := \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$$

Le calcul formel donne alors:

$$D(f,s) + D(g,s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)+g(n)}{n^s}$$

$$D(f,s)D(g,s) = \sum_{n\geq 1} \frac{h(n)}{n^s}$$

avec

$$h(n) = \sum_{dd'=n} f(d)g(d')$$

On note alors $h = f * g$, et on appelle h la *convolution de Dirichlet* de f et g. On vérifie alors que l'ensemble des séries de Dirichlet muni de ces lois est un anneau commutatif unitaire. L'unité est la série

$$D(\delta, s) = 1$$

associée à la fonction

$$\delta(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On observe alors que ceci permet de donner une structure d'anneau naturelle à l'ensemble $\mathbb{A}$ des fonctions arithmétiques, isomorphe à l'anneau des séries de Dirichlet :

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$$
$$(f*g)(n) = \sum_{dd'=n} f(d)g(d') = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$

Théorème 3. *Les inversibles de $\mathbb{A}$ sont les fonctions f telles que $f(1) \neq 0$*

Démonstration. En effet, si f est une telle fonction arithmétique, le système d'équation donné par $f * g = \delta$ est triangulaire et s'inverse facilement : $g(1) = f(1)^{-1}$, puis pour $n > 1$:

$$g(n) = -f(1)^{-1} \sum_{d|n, d\neq n} f(d/n)g(d)$$

Réciproquement, si $f(1) = 0$, écrire $f * g = \delta$ donne une contradiction : $f * g(1) = f(1)g(1) = 0$, alors que $\delta(1) = 1$. □

Théorème 4. *Un fonction arithmétique f est multiplicative ssi sa série formelle associée $D(f,s)$ peut s'écrire comme un produit eulerien, soit*

$$D(f,s) = \prod_p (1 + \sum_{\nu\geq 1} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}})$$

Démonstration. La relation précédente est équivalente, en développant le produit, à :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = 1 + \sum_{n>1} \frac{1}{n^s} \prod_{p^\nu \| n} f(p^\nu)$$

Ce qui signifie bien

$$f(1) = 1, \quad f(n) = \prod_{p^\nu \| n} f(p^\nu)$$

□

Ceci permet de montrer un résultat fondamental sur les fonctions multiplicatives et leurs liens avec les séries de Dirichlet :

Théorème 5. *Soient f,g deux fonctions arithmétiques multiplicatives.*
Alors $f * g$, et l'inverse pour la convolution de f, sont encore multiplicatives.

Démonstration. Soit f multiplicative et $\tilde{f}$ son inverse pour la convolution de Dirichlet.
Par hypothèse, on a:

$$D(f,s)D(\tilde{f},s)=1$$

De plus, on sait déjà que $\tilde{f}(1)=f(1)^{-1}=1$. D'autre part, pour p premier fixé :

$$(1+\sum_{\nu\geq 1}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}})(1+\sum_{\nu\geq 1}\frac{\tilde{f}(p^\nu)}{p^{\nu s}})=(\sum_{\nu\geq 0}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}})(\sum_{\nu\geq 0}\frac{\tilde{f}(p^\nu)}{p^{\nu s}})$$

$$=\sum_{\nu_1,\nu_2\geq 0}\frac{\tilde{f}(p^{\nu_1})f(p^{\nu_2})}{p^{(\nu_1+\nu_2)s}}=\sum_{\nu\geq 0}\frac{1}{p^{\nu s}}(\sum_{\nu_1+\nu_2=\nu}\tilde{f}(p^{\nu_1})f(p^{\nu_2}))$$

$$=\sum_{\nu\geq 0}\frac{(f*\tilde{f})(p^\nu)}{p^{\nu s}}=1$$

Ainsi, en faisant le produit pour tout p, on obtient :

$$D(f,s)\prod_p(1+\sum_{\nu\geq 1}\frac{\tilde{f}(p^\nu)}{p^{\nu s}})=1$$

Autrement dit, $D(\tilde{f},s)=\prod_p(1+\sum_{\nu\geq 1}\frac{\tilde{f}(p^\nu)}{p^{\nu s}})$. Donc $\tilde{f}$ est bien multiplicative.

De la même façon, si f et g sont deux fonctions multiplicatives, on peut écrire :

$$D(f*g,s)=D(f,s)D(g,s)=\prod_p(1+\sum_{\nu\geq 1}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}})(1+\sum_{\nu\geq 1}\frac{g(p^\nu)}{p^{\nu s}})=\prod_p(1+\sum_{\nu\geq 1}\frac{h(p^\nu)}{p^{\nu s}})$$

où $h(p^\nu)$ est définie par

$$h(p^\nu)=\sum_{0\leq j\leq\nu}f(p^j)g(p^{\nu-j})$$

Ceci montre bien que $f*g$ est multiplicative. □

2.1.4 Des relations classiques

Il est donc intéressant de chercher à exprimer les fonctions arithmétiques précédentes comme des convolutions simples, pour pouvoir exprimer les séries de Dirichlet associées entre elles. On voit par exemple que l'application constante 1 est multiplicative, de série formelle associée:

$$\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$$

Voici quelques relations utiles :

- On remarque que $\tau(n)=\sum_{d|n}1=(1*1)(n)$, ce qui donne la relation :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n)}{n^s}=\zeta^2(s)}$$

- Plus généralement, $d_k(n):=\sum_{n_1\dots n_k=n}1=(1*\cdots*1)(n)$ est multiplicative, et vérifie de plus :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{d_k(n)}{n^s}=\zeta^k(s)}$$

- En notant j l'identité, ie $j(n)=n$, on remarque que $\sigma(n)=\sum_{d|n}d=(1*j)(n)$, ce qui nous montre que σ est multiplicative, et que

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma(n)}{n^s}=(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s})(\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n^s})=\zeta(s)\zeta(s-1)}$$

- Il en va de même pour les $\sigma_a = 1 * j^a$:

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma_a(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-a)}$$

- On sait que μ est multiplicative. Donc $1*\mu$ l'est encore.
De plus :

$$(1*\mu)(p^\nu) = \sum_{0\leq j\leq \nu} \mu(p^j) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \nu \geq 1 \\ 1 & \text{si } \nu = 0 \end{array} \right\} = \delta(p^\nu)$$

Ainsi, $1*\mu$ et δ coïncident sur les puissances de nombres premiers, comme elles sont toutes les deux multiplicatives on obtient :

$$1*\mu = \delta, \quad \text{ie : } \sum_{d|n} \mu(n) = \delta(n)$$

Et donc :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}}$$

- Nous avons défini l'indictrice d'Euler comme ceci :

$$\varphi(n) = \sum_{1\leq m\leq n} \delta(n \wedge m)$$

Et on a vu précédemment que

$$\sum_{d|k} \mu(d) = \delta(k)$$

Cela donne donc :

$$\varphi(n) = \sum_{1\leq m\leq n} \sum_{d|n\wedge m} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{m\leq n,\ m=0[d]} 1 = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}$$

Autrement dit :

$$\varphi = \mu * j$$

Ce qui prouve que φ est multiplicative, et que :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}}$$

De plus, le calcul de $\varphi(p^\nu)$ grâce à la formule précédente permet alors de montrer que : $\varphi(n) = n\prod_{p|n}(1-1/p)$.

- Terminons avec une relation importante, concernant la fonction de Von Mangolt :
Définissons $\Lambda = \mu * \ln$, et montrons que cette définition est équivalente à celle donnée précédemment. On a, si $n \geq 1$:

$$(\mu * \ln)(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\ln(n/d) = \ln(n)\delta(n) - \sum_{d|n} \mu(d)\ln(d) = -\sum_{d|n} \mu(d)\ln(d)$$

Autrement dit

$$\Lambda = -\mu \ln *1$$

De plus, si $n \wedge m = 1$, on a encore :

$$\Lambda(nm) = -\sum_{d|nm} \mu(d)\ln(d) = -\sum_{h|n}\sum_{k|m} \mu(hk)\ln(hk)$$

$$= -\sum_{h|n} \mu(h) \sum_{k|m} \mu(k)(\ln h + \ln k)$$

$$= -\sum_{h|n} \mu(h)(\ \delta(m)\ln h - \Lambda(m)) = \delta(m)\Lambda(n) + \delta(n)\Lambda(m)$$

Ce qui signifie que si n n'est pas une puissance d'un nombre premier, $\Lambda(n) = 0$. On vérifie alors bien que

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^\nu \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, $\Lambda(p^\nu) = -\sum_{d|p^\nu} \mu(d)\ln(d) = \ln(p)$, puisque $\mu(p^\nu) = 0$ dès que $\nu \geq 2$.

La relation qui vient d'être démontrée implique donc :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = (\sum_{n\geq 1} \frac{-\ln(n)}{n^s})(\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}}$$

2.2 Ordres moyens

Un des objectifs de la théorie des nombres est d'estimer, voire de calculer, des fonctions arithmétiques telles que présentées ci dessus. S'il est faisable d'obtenir une formule pour $f(n)$ connaissant sa décomposition en facteur premier, celà ne nous renseigne que peu sur son comportement asymptotique : même en connaissance des formules de la partie précédente, il est difficile d'estimer, pour n grand, l'ordre de grandeur de $\Omega(n)$ par exemple.
En fait, la plupart des fonctions usuelles ont un comportement erratique fort : cela nous empêche en pratique d'en obtenir des estimations directes. Une manière de "lisser" ce comportement est, non pas d'étudier f, mais d'étudier ses valeurs moyennes, on considèrera donc plutôt la quantité $A(x) := \sum_{n\leq x} f(n)$. On parle alors d'*ordre moyen*.

Plus précisément, on appelle ordre moyen de f toute fonction "simple" g telle que $\sum_{n\leq x} f(n) \sim \sum_{n\leq x} g(n)$.
Nous allons donner rapidement quelques exemples de techniques élémentaires pour obtenir facilement des ordres moyens, avant de passer aux méthodes analytiques dans la partie suivante.

La technique la plus simple consiste en une simple interversion de somme. Par exemple :

- Un ordre moyen de la fonction somme des diviseurs σ est $\frac{\pi^2}{6}x$. En effet,

$$\sum_{n\leq x} \sigma(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} d = \sum_{d\leq x}\sum_{md\leq x} m = \frac{1}{2}\sum_{d\leq x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor (\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + 1) = \frac{x^2}{2}\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^2} + O(x\sum_{d\leq x}\frac{1}{d})$$

  Ce qui donne, grâce aux estimations classiques $\sum_{n\leq x} 1/d^2 = \frac{\pi^2}{6} + \underset{x\to\infty}{O}(1/x)$
  et $\sum_{d\leq x} 1/d = \underset{x\to\infty}{O}(\ln x)$:

$$\boxed{\sum_{n\leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{6}\frac{x^2}{2} + \underset{x\to\infty}{O}(x\ln x)}$$

- Un ordre moyen de l'indicatrice d'Euler φ est $\frac{6}{\pi^2}x$. En effet, en partant de la formule de convolution

$$\varphi(n) = \sum_{md=n} \mu(d)m$$

  on a :

$$\sum_{n\leq x} \varphi(n) = \sum_{d\leq x}\mu(d)\sum_{m\leq x/d} m = \frac{1}{2}\sum_{d\leq x}\mu(d)\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor (\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + 1) = \frac{x^2}{2}\sum_{d\leq x}\frac{\mu(n)}{d^2} + O(x\sum_{d\leq x}\frac{1}{d})$$

  Ce qui donne, de la même manière que précédement,

$$\boxed{\sum_{n\leq x} \varphi(n) = \frac{6}{\pi^2}\frac{x^2}{2} + \underset{x\to\infty}{O}(x\ln x)}$$

Cette méthode, appliquée brutalement, ne permet parfois pas d'obtenir des estimations très précises : on peut parfois améliorer la méthode grâce à une technique appliquée par Dirichlet appellée principe de l'hyperbole.

Théorème 6. *Soient f,g deux fonctions arithmétiques et F et G leur foncions sommatoires respectives. On a, pour $1 \leq y \leq x$:*

$$\sum_{n\leq x} f*g(n) = \sum_{n\leq y} g(n)F(x/n) + \sum_{m\leq x/y} f(m)G(x/m) - F(x/y)G(y)$$

Démonstration. Le membre de gauche s'écrit :

$$\sum_{md\leq x} f(m)g(d) = \sum_{md\leq x, d\leq y} f(m)g(d) + \sum_{md\leq x, d>y} f(m)g(d)$$
$$= \sum_{d\leq y} g(d)F(x/d) + \sum_{m\leq x/y} f(m)(G(m/d) - G(y))$$

On obtient le résultat voulu en développant le dernier terme. □

Ceci nous permet d'obtenir des estimations plus précises qu'avec une simple interversion de somme. On obtient par exemple, pour la fonction "nombre de diviseurs" :

Corollaire 7.

$$\boxed{\sum_{n\leq x} \tau(n) = x(\ln x + 2\gamma - 1) + \underset{x\to\infty}{O}(\sqrt{x})}$$

Démonstration. On applique le principe de l'hyperbole à : $f = g = 1$, $F(x) = G(x) = \lfloor x \rfloor$ et $y = \sqrt{x}$ On obtient :

$$\sum_{n\leq x} \tau(n) = 2\sum_{m\leq \sqrt{x}} \lfloor x/m \rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 = 2x \sum_{m\leq\sqrt{x}} \frac{1}{m} - x + \underset{x\to\infty}{O}(\sqrt{x})$$

L'estimation $\sum_{m\leq\sqrt{x}} \lfloor x/m \rfloor = \frac{1}{2}\ln x + \gamma + \underset{x\to\infty}{O}(1/\sqrt{x})$ permet alors de conclure. □

Il existe de nombreuses autres techniques élémentaires donnant de très bonnes estimations : mentionnons par exemple toutes les techniques de crible (Crible combinatoire de Brun, le grand crible, crible de Selberg) ainsi que la méthode de Van Der Corput. Mais il existe aussi d'autres méthodes, basées sur l'étude de la série de Dirichlet associée à une fonction arithmétique par exemple. Ces méthodes forment la classe des techniques dites analytiques : l'objectif de la suite de ce rapport est de développer certaines de ces méthodes.

3 Méthodes analytiques usuelles

3.1 Séries de Dirichlet

Il est nécessaire avant d'espérer utiliser les séries de Dirichlet dans nos études prochaines d'avoir à notre disposition un minimum de résultats de base les concernants.

Dans toute la suite du rapport, on notera la variable complexe $s = \sigma + i\tau$.

Définition 3. Soit f une fonction arithmétique. On appelle série de Dirichlet associée à f la fonction de la variable complexe définie par $F(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ en tout point de convergence de la série.

Théorème 8. *Soit f,g,h des fonctions arithmétiques, de séries de Dirichlet respectives F,G,H, telles que $f*g = h$. La série $H(s)$ converge dans tout domaine de convergence absolue commun aux séries F et G, et on a dans ce cas : $H(s) = F(s)G(s)$.*

Démonstration. Si F et G convergent absolument au point s, alors

$$\sum_{n\leq x} \left|\frac{h(n)}{n^s}\right| = \sum_{md\leq x} \left|\frac{f(m)g(d)}{m^s d^s}\right| \leq \sum_{m\leq x} \left|\frac{f(m)}{m^s}\right| \sum_{d\leq x} \left|\frac{g(d)}{d^s}\right|$$

Ce qui implique la convergence absolue de H. La relation voulue $H(s) = F(s)G(s)$ découle ensuite d'un produit de Dirichlet. □

Nous avons vu plus tôt une propriété de factorisation sur les séries de Dirichlet formelles dans le cas où f est une fonction multiplicative. Le théorème suivant fournis une condition suffisante pour qu'elle reste vraie dans un cadre analytique.

Théorème 9. *Soit f une fonction multiplicative et s un nombre complexe. Si*

$$\sum_p \sum_{\nu\geq 1} \left| \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}} \right| < \infty$$

alors la série de Dirichlet $F(s)$ est absolument convergente et on a

$$F(s) = \prod_p (1 + \sum_{\nu\geq 1} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}})$$

Démonstration. On remarque en premier lieu que la condition fait converger le produit infini : $M = \prod_p (1 + \sum_{\nu\geq 1} \left|\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right|)$. On écrit alors, pour $x \geq 1$:

$$\sum_{n\leq x} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{P^+(n)\leq x} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| = \prod_p (1 + \sum_{\nu\geq 1} \left| \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}} \right|) \leq M$$

où $P^+(n)$ désigne le plus grand facteur premier de n.
Ceci prouve l'absolue convergence de la série $F(s)$.
Enfin, on écrit :

$$\left| \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} - \prod_{p\leq x} \sum_{\nu\geq 0} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}} \right| = \left| \sum_{P^+(n)>x} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n>x} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \underset{x\to\infty}{\to} 0$$

□

Corollaire 10. *Pour $\sigma > 1$, on a*

$$\boxed{\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}}$$

Cette formule très simple met en évidence le lien fort entre la fonction ζ et la répartition des nombres premiers. Elle constitue une des formules essentielles de la théorie analytique des nombres.

Intéressons nous maintenant à l'allure des domaines de convergence de ces séries. Il s'agit en fait de demi-plans : dans la pratique, à une série de Dirichlet est associée une abscice de convergence σ_c telle que si $\sigma > \sigma_c$, alors $F(s)$ converge. Par exemple dans le cas de ζ, on a $\sigma_c = 1$.

Théorème 11. *Soit f une fonction arithmétique et F sa série de Dirichlet associée. Supposons l'existence d'un $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0 \in \mathbb{C}$ tel que $F(s_0)$ converge. Alors pour tout $\sigma > \sigma_0$, $F(s)$ converge.*

Démonstration. Soit s tel que $\sigma > \sigma_0$. On va montrer que $F(s)$ converge par le critère de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $A > 0$ tel que $\left|\sum_{n\leq N} \frac{f(n)}{n^{s_0}}\right| \leq A$ pour tout N. On a, par transformation d'Abel, pour p et q fixés :

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{f(n)}{n^s} = (\sum_{n=p}^{q} \frac{f(n)}{n^{s_0}}) \frac{1}{(q+1)^{s-s_0}} + \sum_{n=p}^{q} (\sum_{k=p}^{n} \frac{f(k)}{k^{s_0}})(\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}})$$

D'où :

$$\left| \sum_{n=p}^{q} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \frac{2A}{(q+1)^{\sigma-\sigma_0}} + 2A \sum_{n=p}^{q} \left| \frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}} \right|$$

Or

$$\left| \frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}} \right| = \left| \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} (s-s_0) e^{(s-s_0)t} dt \right| \leq |s-s_0| \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} e^{(\sigma-\sigma_0)t} dt = \frac{|s-s_0|}{|\sigma-\sigma_0|} (\frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma-\sigma_0}})$$

On obtient ainsi :

$$\left|\sum_{n=p}^{q}\frac{f(n)}{n^s}\right| \leq \frac{2A}{(q+1)^{\sigma-\sigma_0}} + 2A\frac{|s-s_0|}{|\sigma-\sigma_0|}\left(\frac{1}{p^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{(q+1)^{\sigma-\sigma_0}}\right) < \varepsilon$$

Pour $p \leq q$ assez grands. □

Ceci montre que le domaine de convergence des séries de Dirichlet sont des demi-plans : On parle *d'abscice de convergence* σ_c.

On parle aussi souvent *d'absice de convergence absolue* σ_a, qui est la borne inférieure des σ pour lesquels $F(\sigma)$ converge absolument. Il est à peu près clair que si $F(\sigma_1)$ converge absolument, alors tout $F(\sigma_2)$ avec $\sigma_2 > \sigma_1$ converge aussi absolument : le domaine de convergence absolue est donc lui aussi un demi-plan.
On remarque alors que, pour une série de Dirichlet, on a :

$$\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$$

En effet, si $\sum_{n\geq 1} f(n)/n^{\sigma_c+\varepsilon}$ converge, on peut ecrire $f(n) \ll_\varepsilon n^{\sigma_c+\varepsilon}$. Par conséquent, $f(n)/n^{\sigma_c+1+2\varepsilon} \ll 1/n^{1+\varepsilon}$, d'où $\sigma_a \leq \sigma_c + 1 + 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Nous allons à présent donner une propriété d'holomorphie des séries de Dirichlet.

Théorème 12. *Soit $F(s) = \sum_{n\geq 1} f(n)/n^s$ une série de Dirichlet. Alors F(s) converge uniformément sur tout compact de leur demi-plan de convergence. Ainsi, F est holomorphe sur le domaine $\sigma > \sigma_c$,et de plus :*

$$F^{(k)}(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{f(n)(-\ln n)^k}{n^s}$$

Démonstration. Soit K un compact, et $\sigma_K := \min\{\mathrm{Re}(s) | s \in K\}$. Soit $\sigma_a < \sigma_0 < \sigma_K$. On reprend alors la sommation d'Abel de la partie précedente : avec cette fois $A > 0$ tel que $\left|\sum_{n\leq N}\frac{f(n)}{n^{\sigma_0}}\right| \leq A$, on obtient en faisant tendre q vers l'infini :

$$\left|\sum_{n=p}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\right| \leq 2A\frac{|s-\sigma_0|}{\sigma-\sigma_0}\frac{1}{p^{\sigma-\sigma_0}} \leq \frac{d(\sigma_0,K)}{\sigma_K-\sigma_0}\frac{2A}{p^{\sigma_K-\sigma_0}}$$

Ceci constitue bien une majoration uniforme en $s \in K$ du reste de la série. Comme chaqu'un des termes $s \mapsto f(n)/n^s$ sont holomorphes, on en déduit par convergence uniforme sur tout compact que F l'est dans le domaine ouvert $\sigma > \sigma_c$.

□

Terminons enfin avec un résultat qui nous permet de mieux comprendre le comportement des séries de Dirichlet dans leur domaines de convergence :

Théorème 13. *Soit $F(s) = \sum_{n\geq 1} f(n)/n^s$ une série de Dirichlet d'abscice de convergence σ_c. Soient $\sigma_0 > \sigma_c$ et $\varepsilon > 0$. On a uniformément pour $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_c + 1$*

$$F(s) \ll |\tau|^{(\sigma_c+1)-\sigma+\varepsilon}$$

Où la notation $f \ll g$ signifie que $f = O(g)$.

Démonstration. On peut supposer que $0 < \varepsilon < \sigma_0 - \sigma_c$. Toujours par sommation d'Abel, on va cette fois-ci utiliser le fait que $f(n) \ll n^{\sigma_c+\varepsilon}$:

$$F(s) = \sum_{n\leq N}\frac{f(n)}{n^s} + \left(\sum_{n\leq N}\frac{f(n)}{n^{\sigma_c+\varepsilon}}\right)\frac{1}{N^{s-\sigma_c-\varepsilon}} + \sum_{n>N}\left(\sum_{k\leq n}\frac{f(n)}{n^{\sigma_c+\varepsilon}}\right)\left(\frac{1}{n^{s-\sigma_c-\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{s-\sigma_c-\varepsilon}}\right)$$

D'où :

$$|F(s)| \leq \sum_{n\leq N} \frac{|f(n)|}{n^\sigma} + (\sum_{n\leq N} \frac{|f(n)|}{n^{\sigma_c+\varepsilon}}) \frac{1}{N^{\sigma-\sigma_c-\varepsilon}}$$

$$+\frac{|s-\sigma_c-\varepsilon|}{\sigma-\sigma_c-\varepsilon} \sum_{n>N} (\sum_{k\leq n} \frac{|f(n)|}{n^{\sigma_c+\varepsilon}})(\frac{1}{n^{\sigma-\sigma_c-\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma-\sigma_c-\varepsilon}})$$

Et donc :

$$|F(s)| \ll N^{1+\sigma_c-\sigma+\varepsilon} + |s|N^{\sigma_c-\sigma+\varepsilon}$$

On obtient alors la majoration voulue en choisissant $N = 1 + \lfloor |\tau| \rfloor$. □

3.2 Formules de Perron

L'objectif de cette partie est de préciser le lien existant entre le comportement d'une série de Dirichlet et le comportement de la suite associée. De la même façon que la formule de Cauchy permet d'exprimer le terme général d'une série entière, la formule de Perron que nous allons bientôt démontrer permet d'exprimer les termes d'une suite en fonction d'une intégrale complexe portant sur la série de Dirichlet associée.

Si $(a_n)_n$ est une suite de nombres complexes, on commence par prolonger la notation de sorte que $a_x = 0$ si $x \notin \mathbb{N}$. On introduit la *fonction sommatoire normalisée*

$$A^*(x) = \sum_{n<x} a_n + \frac{1}{2} a_x$$

On note aussi $A(x) = \sum_{n\leq x} a_n$.

On peut alors énoncer la formule de Perron :

Théorème 14. *Soit $\kappa > \max(0, \sigma_c)$. On a*

$$A^*(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} F(s) \frac{x^s}{s} ds$$

Où l'intégrale est semi-convergente lorsque $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ et converge en valeur principale lorsque $x \in \mathbb{N}$.

La démonstration repose sur un lemme, qui est un calcul effectif d'inversion de Laplace concernant la fonction

$$h(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Lemme 15. *Pour tout κ, T, T' positifs, on a pour $x \neq 1$:*

$$\left| h(x) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} \frac{x^s}{s} ds \right| \leq \frac{x^\kappa}{2\pi |\ln x|} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right)$$

Et en 1 :

$$\left| h(1) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s} \right| \leq \frac{\kappa}{T+\kappa}$$

Démonstration. Commençons par traiter le cas $x > 1$. Soit k un entier assez grand et $\mathcal{R}_k$ le rectangle de sommets $\kappa - iT'$, $\kappa + iT$,$\kappa - k + iT$,$\kappa - k - iT'$. Par la formule des résidus, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{R}_k} \frac{x^s}{s} ds = 1 = h(x)$$

De plus, on a :

$$\left| \int_{\kappa+iT}^{\kappa-k+iT} \frac{x^s}{s} ds \right| \leq \int_{\kappa-k}^{\kappa} \frac{x^\sigma}{|T|} d\sigma \leq \frac{x^\kappa}{T |\ln x|}$$

De même,

$$\left|\int_{\kappa-k-iT'}^{\kappa-iT'} \frac{x^s}{s} ds\right| \leq \frac{x^\kappa}{T'|\ln x|}$$

Et enfin :

$$\left|\int_{\kappa-k+iT}^{\kappa-k-iT'} \frac{x^s}{s} ds\right| \leq \frac{x^{\kappa-k}}{k-\kappa} \int_{\kappa-k+iT}^{\kappa-k-iT'} |ds| = \frac{x^{\kappa-k}}{k-\kappa}(T+T')$$

On déduit alors le résultat annoncé en faisant tendre k vers l'infini.
Le cas $0 < x < 1$ se fait de la même manière, en changeant k en $-k$. Enfin, si $x = 1$, on remarque que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s} = \frac{1}{2i\pi}(\log(\kappa+iT) - \log(\kappa-iT)) = \frac{1}{2\pi}(\arg(\kappa+iT - \arg(\kappa-iT))) = \frac{1}{\pi} \arctan(T/\kappa)$$

La majoration souhaitée découle alors de l'encadrement, valable pour tout $y \geq 0$:

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(y) = \int_y^\infty \frac{dt}{1+t^2} \leq \frac{2}{1+y}$$

que l'on démontre facilement en intégrant l'inégalité $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{(1+t)^2}$.

□

Ce lemme nous renseigne donc directement sur l'erreur commise lorsque l'intégrale est tronquée. Nous somme à présent en mesure de démontrer le théorème précédent : nous allons simplement multiplier l'intégrale par les a_n puis sommer, et obtenir le résultat voulu.

Démonstration. Un premier cas facile est quand $\kappa > \sigma_a$. En effet dans ce cas, la série $F(s)$ est absolument et uniformement convergente en $\sigma = \kappa$, et on peut donc ecrire :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} F(s)\frac{x^s}{s} ds = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}$$

En appliquant le premier point du lemme, on obtient si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$:

$$\left|A^*(x) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} F(s)\frac{x^s}{s} ds\right| \leq \frac{x^\kappa}{2\pi}(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}) \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|}{|n|^\kappa |\ln(x/n)|}$$

Comme le facteur $|\ln(x/n)| = |\ln(x) - \ln(n)|$ est minoré indépendament de n, on obtient la premiere version du théorème en faisant tendre tendre T et T' indépendament vers l'infini.
Dans le cas où $x \in \mathbb{N}$, on fait la même manipulation que precedement en prennant $T = T'$ et en remplaçant le terme correspondant dans la somme a $n = x$ par $\kappa|a_n|/(T+\kappa)$.

Spposons a présent que $\sigma_c < \kappa \leq \sigma_a$. Comme on sait que $\sigma_c + 1 \geq 1$ pour les séries de dirichlet, on a $\kappa + 1 > \sigma_a$. On considere alors l'intégrale

$$\int_{\mathcal{R}} F(s)\frac{x^s}{s} ds$$

où $\mathcal{R}$ est le rectangle de sommets $\kappa + iT$, $\kappa + 1 + iT$, $\kappa + 1 - iT'$, $\kappa - iT'$.
Comme F est holomorphe sur le domaine considéré, le théorème des résidus montre que l'intégrale considérée est nulle.

De plus, les estimations obtenues a la section précédentes $F(s) \ll \tau^{1+\sigma_c-\sigma+\varepsilon}, s \in \mathcal{R}$ montrent que les parties horizontales tendent vers zéros quand T et T' tendent vers l'infini. Par exemple pour la partie du haut :

$$\int_{\rightarrow} F(s)\frac{x^s}{s} ds \ll T^{\sigma_c-\sigma+\varepsilon} x^\sigma \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

On a ainsi :

$$\int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} F(s)\frac{x^s}{s} ds = \int_{\kappa+1-iT'}^{\kappa+1+iT} F(s)\frac{x^s}{s} ds + \underset{T,T'\to\infty}{o(1)}$$

Ce qui conclue la preuve.

□

Dans la pratique, il est utile de disposer de versions effectives de la formule de Perron, c'est à dire de majorations explicites de la contribution du domaine $|\tau| \geq T$ à l'intégrale précédente. Nous allons donner deux formules de Perron effectives.
Remarquons que celles-ci ne s'appliqueront que pour $\kappa > 0$ et dans le domaine de convergence de convergence absolue de F, contrairement a la formule de Perron classique qui s'appliquait dès lors que $\kappa > 0$ soit dans le domaine de convergence de F.

Théorème 16. *Pour $\kappa > \max(0, \sigma_a)$, $T \geq 1$, et $x \geq 1$, on a*

$$A(x) = \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(x^\kappa \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|}{n^\kappa(1+T|\ln(x/n)|)}\right)$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour $\kappa > 0$ fixé, on a uniformément en $y > 0$,$T > 0$:

$$\left|h(y) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{y^s}{s}ds\right| \ll y^\kappa/(1+T|\ln y|)$$

En effet, en appliquant cette estimation avec $y = x/n$, en mutipliant par a_n, puis en sommant sur $n \geq 1$, on obtient exactement la formule annoncée.

Lorsque $T|\ln(y)| > 1$, la majoration souhaitée découle de la premiere majoration du Lemme. Lorque $T|\ln(y)| < 1$, on peut écrire :

$$\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{y^s}{s}ds = y^\kappa \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s} + y^\kappa \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} (y^{i\tau}-1)\frac{ds}{s}$$

où la seconde intégrale vérifie :

$$\left|\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} (y^{i\tau}-1)\frac{ds}{s}\right| \ll \int_0^T |(\tau(\ln y)/s|d\tau \ll T|\ln y| \leq 1$$

puisque $|y^{i\tau} - 1| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{|\tau \ln y|^n}{n!} \leq |\tau \ln y|(e-1)$.
De plus, la seconde inégalité du Lemme nous assure que l'intégrale de gauche est $\ll y^\kappa$.
Cela termine la démonstration.

□

Ce théorème constitue la *première formule de Perron effective.* Nous allons maintenant enoncer la *deuxieme formule de perron effective*:

Corollaire 17. *Soit $F(s) = \sum_{n\geq 1} a_n/n^s$ une série de Dirichlet d'absice de convergence absolue finie σ_a. On suppose qu'il existe un reel $\alpha \geq 0$ tel que*

$$\sum_{n\geq 1} |a_n|n^{-\sigma} \ll (\sigma - \sigma_a)^\alpha \qquad (\sigma_a < \sigma \leq \sigma_a + 1)$$

Et on se donne une fonction B croissante au sens large telle que

$$|a_n| \leq B(n) \qquad (n \geq 1)$$

Alors on a, pour $x \geq 2$, $T \geq 2$, $\sigma \leq \sigma_a$, $\kappa := \sigma_a - \sigma + 1/\ln x$:

$$\sum_{n\leq x} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s+\omega)\frac{x^\omega}{\omega}d\omega + O\left(x^{\sigma_a-\sigma}\frac{(\ln x)^\alpha}{T} + \frac{B(2x)}{x^\sigma}(1+x\frac{\ln T}{T})\right)$$

Démonstration. On applique la premiere formule de perron effetive a la série $\sum b_n/n^\omega$ avec $b_n := a_n/n^s$. La contribution dans le O() des entiers n n'appartenant pas a $[\frac{x}{2}, 2x]$ est

$$\ll x^\kappa T^{-1}\sum_{n\geq 1} |a_n|n^{-\kappa-\sigma} \ll x^{\sigma_a-\sigma}T^{-1}(\ln x)^\alpha$$

Lorsque $\frac{x}{2} \leq n \leq 2x$, on écrit $n = N + h$ où N est l'entier le plus proche de x.
On a $|\ln(x/n)| \gg |h|/x$. D'où la contribution supplémentaire

$$x^{-\sigma} \sum_{x/2 \leq n \leq 2x} \frac{|a_n|}{1 + T|\ln(x/n)|} \ll \frac{B(2x)}{x^\sigma} \sum_{0 \leq h \leq x+1} \frac{1}{1 + Th/x}$$

$$\ll \frac{B(2x)}{x^\sigma} \left(1 + \sum_{1 \leq h \leq x/T} 1 + \sum_{x/T \leq h \leq x+1} \frac{x}{Th} \right) \ll \frac{B(2x)}{x^\sigma} \left(1 + x \frac{\ln T}{T} \right)$$

□

Ces formules très utiles ont le défaut de ne pas converger absolument : il est pourtant souvent utile de travailler avec des intégrales absolument convergentes. Cela necessite de lisser encore un peu plus la fonction $A(x)$:

Théorème 18. *Pour $\kappa > \max(0, \sigma_c)$ et $x \geq 1$, on a*

$$\int_0^x A(t)dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} F(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds$$

Démonstration. On a :

$$\int_0^x \sum_{n \leq t} a_n dt = \sum_{n \leq x} \int_n^x a_n dt = \sum_{n \leq x} a_n (x - n)$$

Et donc, avec la formule de Perron

$$\sum_{n \leq x} a_n n^\omega = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} F(s) \frac{x^{s+\omega}}{s(s+\omega)} ds$$

on obtient pour $\omega = 1$:

$$\int_0^x A(t)dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} F(s) x^{s+1} (\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}) ds = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} F(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds$$

□

3.3 Autour de Zeta

Nous avons donc des formules nous permettant d'exprimer la somme des premiers termes d'une suite en fonction de sa série de dirichlet associée. Mais cette intégrale se calcule rarement directement !
Dans le cas ou notre série F possède un prolongement méromorphe, il est possible de traiter l'intégrale par l'introduction d'un contour débordant du demi-plan de convergence de façon à entourer un pôle de F. Nous allons voir ici que la fonction ζ possède un tel prolongement : l'étudier est une étape fondamentale pour pouvoir obtenir des renseignement sur toutes les fonctions arithmétiques qu'elle permet d'exprimer.
Pour que le corps de ce rapport de stage reste court, je ne peux malheureusement pas me permettre de mettre les démonstrations ici.

Théorème 19. *La fonction ζ est prolongeable en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant pour seule singularité un pôle simple, en $s = 1$, de résidus 1.*

On peut montrer que ζ est d'*ordre fini* : si σ est fixé, alors il existe $\xi > 0$ tel que

$$\forall |\tau| \geq 1, \zeta(\sigma + i\tau) \ll |\tau|^\xi$$

On note alors $\mu(\sigma)$ la borne inférieure des ξ vérifiants la condition ci dessus : $\mu(\sigma)$ est donc le plus petit réel tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall |\tau| \geq 1, \zeta(\sigma + i\tau) \ll |\tau|^{\mu(\sigma) + \varepsilon}$$

Théorème 20. *On a :*

- $\forall \sigma \leq 0,\ \mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$
- $\forall 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2},\ \mu(\sigma) \leq \frac{1}{6}(3 - 4\sigma)$
- $\forall \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1,\ \mu(\sigma) \leq \frac{1}{3}(1 - \sigma)$
- $\forall \sigma \geq 1,\ \mu(\sigma) = 0$

En particulier, on a les valeurs remarquables : $\mu(0) = \frac{1}{2}$, $\mu(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$ et $\mu(1) = 0$. Il existe une hypothèse classique, que l'on appelle l'hypothèse de Lindelöf, qui consiste a dire que le véritable graphe de μ est composé de deux demi-droites : $\mu(\sigma) = \max(\frac{1}{2} - \sigma, 0)$.

Voici d'autres estimations connues :

Théorème 21. *Pour tout $c \geq 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a dans le domaine $|\tau| \geq 2, \sigma \geq 1 - c/\ln|\tau|$:*

$$\zeta^{(k)}(s) \ll (\ln|\tau|)^{(k+1)}$$

Ces estimations nous permettrons d'étudier les séries faisant apparaitre des produits et des dérivées de ζ. Mais quand est-il, par exemple, de l'étude la fonction de Von Mangolt, qui apparait dans $-\zeta'/\zeta$? Nous avons besoin de savoir quand est ce que cette fonction a un sens, et pour cela, nous n'avons d'autres choix que d'essayer de savoir où sont les zéros de ζ.

La recherche des zéros de ζ est un problème célèbre et très difficile. On sait déjà que ζ s'annule sur tout les entiers négatifs pairs : on appelle ces zéros les zéros triviaux de ζ. On essaie depuis longtemps de démontrer que tout les zéros non triviaux se situe sur l'axe $\sigma = \frac{1}{2}$: cette conjecture est la fameuse Hypothèse de Riemann.
Si celle-ci n'est pas encore démontrée, nous ne somme pas pour autant démunis d'informations sur la localisation des zéros de ζ : on sait par exemple que les seuls points d'annulation de ζ sur $\sigma \leq 0$ sont les zéros triviaux, et on sait que ζ ne s'annule pas sur $\sigma \geq 1$.

Un partie de la recherche autour de la fonction ζ consiste donc à chercher à agrandir cette region sans zéros de ζ, et d'obtenir des estimations de la fonction sur ces régions.
Nous pouvons alors conclure cette partie en énonçant les résultats suivants :

Théorème 22. *Il existe une constante positive c telle que ζ ne possède aucun zéros dans la région définie par :*

$$\sigma \geq 1 - c/\ln(2 + |\tau|)$$

Une remarque : Cette région étant convexe et ne contenant pas de zéros, on peut y définir $\log\zeta$ classiquement par $\log\zeta(s) = \int_2^s \frac{\zeta'(\omega)}{\zeta(\omega)} d\omega + \ln(\frac{\pi^2}{6})$ par exemple.

Théorème 23. *Il existe $c \geq 0$ tel que l'on ait, pour $|\tau| \geq 3$ et $\sigma \geq 1 - c/\ln|\tau|$:*

- $\zeta'(s)/\zeta(s) \ll \ln|\tau|$
- $1/\zeta(s) \ll \ln|\tau|$
- $|\log\zeta(s)| \leq \ln\ln|\tau| + O(1)$

3.4 Applications

Dans cette partie, je vais présenter trois exemples d'applications des formules de Perron.
Nous allons commencer par obtenir une estimation de $\sum_{n \leq x} \mu(n)$.
Nous allons ensuite etudier les fameux d_k introduits en début du rapport.
Enfin, nous terminerons sur un résultat concernant Λ, qui nous permettra d'obtenir le théorème des nombres premiers.

3.4.1 Estimation de $\sum_{n\leq x}\mu(n)$

On s'intéresse ici à μ, et à la série associée $\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}$. Nous voulons appliquer la seconde formule de Perron effective : au voisinage de 1, $\frac{1}{\zeta(s)}$ s'annule, il n'y a donc pas de pôle.
De plus, on sait que $\mu(n)\leq 1$, donc on choisit comme fonction B croissante la fonction 1. On obtient alors :

$$\sum_{n\leq x}\mu(n)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{x^s}{\zeta(s)s}ds+O(\frac{x\ln T}{T})$$

avec $\kappa=1+1/\ln x$. On pose alors, pour une constante c suffisament petite pour que l'on puisse utiliser l'estimation concernant $1/\zeta$, le chemin Γ comme étant la ligne brisée passant par les points $\kappa-iT$; $1-c/\ln T-iT$, $1-c/\ln T+iT$ et $\kappa+iT$.

Comme $1/\zeta$ est holomorphe sur le domaine convexe considéré, on a :

$$\sum_{n\leq x}\mu(n)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{x^s}{\zeta(s)s}ds+O(\frac{x\ln T}{T})$$

On a alors, pour la partie verticale :

$$|\int_\uparrow\frac{x^s}{\zeta(s)s}ds|\leq\int_\uparrow\frac{x^{\mathrm{Re}(s)}}{|\zeta(s)s|}|ds|\ll\int_2^T\ln\tau\frac{x^{1-c/\ln T}}{\tau}d\tau\ll(\ln T)^2x^{1-c/\ln T}$$

Et pour les parties horizontales, celle du haut par exemple :

$$|\int_\rightarrow\frac{x^s}{\zeta(s)s}ds|\leq\int_\rightarrow\frac{x^{\mathrm{Re}(s)}}{|\zeta(s)s|}|ds|\leq\int_{1-c/\ln T}^{1+1/\ln x}\ln T\frac{x^\sigma}{T}d\sigma\ll(\ln T)^2x^{1-c/\ln T}\ll\frac{x\ln T}{T}$$

Nous avons donc démontré que

$$\sum_{n\leq x}\mu(n)=O(\frac{x\ln T}{T}+(\ln T)^2x^{1-c/\ln T})$$

Le choix de $T=e^{\sqrt{c\ln x}}$ donne alors :

$$\frac{x\ln T}{T}+(\ln T)^2x^{1-c/\ln T}=x(\sqrt{c\ln x})e^{-c\sqrt{\ln x}}+cx(\ln x)e^{-c\ln x/\sqrt{c\ln x}}$$
$$\ll x\ln xe^{-\sqrt{c\ln x}}\ll xe^{-\sqrt{(c/2)\ln x}}$$

Et nous avons donc montré l'existence d'une constante c_0 telle que

$$\boxed{\sum_{n\leq x}\mu(n)=O(xe^{-\sqrt{c_0\ln x}})}$$

3.4.2 Estimation de $\sum_{n\leq x}d_k(n)$

Intéressons nous à présent à la fonction d_k, pour k entier positif fixé, définie par $d_1(n)=1$ et $d_{k+1}=d_k*1$, de série correspondante $\sum_{n\geq 1}\frac{d_k(n)}{n^s}=\zeta^k(s)$. Comme nous disposons déjà de bonnes estimations pour $d_0=\delta$,$d_1=1$ et $d_2=\tau$, nous supposerons $k\geq 3$.
En terme combinatoire, $d_k(n)$ est le nombre de façon de décomposer un entier n sous la forme $n=n_1n_2...n_k$.
De la même manière qu'au dessus, nous souhaitons utiliser la seconde formule de Perron effective, mais celle-ci nécessite la connaissance d'une fonction B croissante telle que $d_k(n)\leq B(n)$. Comme l'estimation que nous voulons obtenir est plutôt précise, nous allons devoir travailler un peu pour obtenir un B convenable.

Lemme 24. *La fonction "somme des diviseurs" vérifie, pour n assez grand :*

$$\tau(n)\leq e^{\ln n/\ln\ln n}$$

Démonstration. On sait que $\tau(n) = \prod_{p^\nu \| n} (\nu + 1)$. Soit $2 \leq t \leq n$ un paramètre. On a :

$$\tau(n) = \prod_{p^\nu \| n} (\nu + 1) \leq \prod_{p^\nu \| n, p \leq t} (\nu + 1) \prod_{p^\nu \| n, p > t} 2^\nu$$

De plus, si $p^\nu \| n$, alors $p^\nu \leq n$ et donc $\nu \leq \frac{\ln n}{\ln p} \leq \frac{\ln n}{\ln 2}$. D'où :

$$\tau(n) \leq \left(1 + \frac{\ln n}{\ln 2}\right)^t \prod_{p^\nu \| n, p > t} 2^\nu$$

Comme $1 < \ln(p)/\ln(t)$ dans le deuxième produit, on peut écrire :

$$\tau(n) \leq \left(1 + \frac{\ln n}{\ln 2}\right)^t (\prod_{p^\nu \| n} p^\nu)^{\ln 2/\ln t} = \left(1 + \frac{\ln n}{\ln 2}\right)^t n^{\ln 2/\ln t} \leq \exp\left(t \ln\ln n + \frac{\ln 2. \ln n}{\ln t}\right)$$

Pour le choix de $t = \ln n/(\ln\ln n)^3$, on obtient :

$$\tau(n) \leq \exp\left(\frac{\ln n}{(\ln\ln n)^2} + \frac{\ln 2. \ln n}{\ln\ln n - 3\ln\ln\ln n}\right)$$

$$\leq \exp\left(\frac{\ln 2 \ln n}{\ln\ln n}\left(1 + O\left(\frac{\ln\ln\ln n}{\ln\ln n}\right)\right)\right)$$

D'où l'on déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour $n \geq n_0(\varepsilon)$, $\tau(n) \leq e^{(\ln 2 + \varepsilon)\ln n/\ln\ln n}$. Cela implique bien le résultat annoncé.

$\square$

On observe donc en particulier que : $\forall \varepsilon > 0, \tau(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$. Ceci nous permet d'obtenir immédiatement une majoration pour les d_k : en effet, on sait déjà que $d_2(n) = \tau(n) \ll n^\varepsilon$, et par récurence, si $d_{k-1}(n) \ll n^\varepsilon$, alors :

$$|d_k(n)| \leq \sum_{d|n} d_k(d) \ll \sum_{d|n} n^\varepsilon = \tau(n) n^\varepsilon \ll n^{2\varepsilon}$$

Nous avons les informations nécessaires pour commencer la preuve. La fonction ζ^k possédant un pôle d'ordre k en 1, on obtient, par la seconde formule de Perron effective, pour le choix de $B(x) = x^\varepsilon$:

$$\sum_{n \leq x} d_k(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \zeta^k(s) \frac{x^s}{s} ds + O_k(x^\varepsilon(1 + \frac{x}{T} \ln T))$$

avec $\kappa = 1 + 1/\ln x$.

On introduit la ligne brisée Γ passant par les points $\kappa - iT$; $\varepsilon - iT$, $\varepsilon + iT$,$\kappa + iT$. Le théorème des résidus nous donne alors :

$$\sum_{n \leq x} d_k(n) = \mathrm{Res}(\zeta^k(s) x^s/s, 1) + \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \zeta^k(s) \frac{x^s}{s} ds + O_k(\frac{x^{(1+\varepsilon)}}{T} \ln T + x^\varepsilon)$$

On évalue le résidu grace à la formule, dans le cas ou f possède un pôle d'ordre k en a :

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} \left(f(z)(z-a)^k\right)\Big|_{z=a}$$

Dans notre cas les dérivées successives de x^s par rapport à s font descendre des puissances de $\ln x$. On voit facilement qu'il existe un polynôme P_{k-1} de degré $k-1$ tel que :

$$\mathrm{Res}(\zeta^k(s) x^s/s, 1) = x P_{k-1}(\ln x)$$

Il reste encore à majorer les termes intégrals. On a, pour la partie verticale :

$$|\int_{\uparrow}\zeta^k(s)\frac{x^s}{s}ds| \leq \int_{\uparrow}|\zeta(s)|^k\frac{x^{\mathsf{Re}(s)}}{|s|}|ds|$$
$$\ll \int_2^T \tau^{k\mu(\varepsilon)}\frac{x^\varepsilon}{\tau}d\tau \ll x^\varepsilon T^{k/2}$$

Et pour la partie horizontale (du haut par exemple), en utilisant $\mu(\sigma) \leq (1-\sigma)/2$ sur [0,1] :

$$|\int_{\rightarrow}\zeta^k(s)\frac{x^s}{s}ds| \leq \int_{\rightarrow}|\zeta(s)|^k\frac{x^{\mathsf{Re}(s)}}{|s|}|ds|$$
$$\leq \int_\varepsilon^\kappa |\zeta(\sigma+iT)|^k\frac{x^\sigma}{T}d\sigma \ll \int_\varepsilon^\kappa T^{k(1-\sigma)/2+\varepsilon}\frac{x^\sigma}{T}d\sigma$$
$$\leq T^{k/2-1+\varepsilon}\int_\varepsilon^\kappa \left(\frac{x}{T^{k/2}}\right)^\sigma d\sigma \ll \frac{x}{T}T^\varepsilon$$

On a donc démontré :

$$\sum_{n\leq x} d_k(n) = xP_{k-1}(\ln x) + O_{\varepsilon,k}(x^\varepsilon + \frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\ln T + x^\varepsilon T^{k/2} + \frac{x}{T}T^\varepsilon)$$

On souhaite alors choisir T de la forme $T = x^\delta$. On constate par une petite étude de fonction que le δ optimal vaut $\delta_k = \frac{2}{2+k}$, solution de $\delta k/2 = 1-\delta$. On obtient enfin l'expression suivante :

$$\sum_{n\leq x} d_k(n) = xP_{k-1}(\ln x) + O_{k,\varepsilon}x^{(1-\delta_k+\varepsilon)}$$

De plus, comme on remarque que $\delta_k > 1/k$ pour $k \geq 3$ et connaissant les estimations pour $k = 1, 2$, on peut écrire de manière générale :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n\leq x} d_k(n) = xP_{k-1}(\ln x) + O_k(x^{1-1/k})}$$

3.4.3 Estimation de $\sum_{n\leq x}\Lambda(n)$

On termine enfin par l'étude de $\psi(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)$, qui nous conduira au théorème des nombres premiers. La série associée est $-\zeta'/\zeta$.
On sait aussi que $\Lambda(n) \leq \ln n$.
Enfin, le pôle de $-\zeta'/\zeta$ en 1 est d'ordre 1.
On peut donc appliquer la seconde formule de Perron avec ces paramètres : on obtient

$$\psi(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\zeta^k(s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\ln x\left(1+\frac{x\ln T}{T}\right)\right)$$

avec toujours $\kappa = 1 + 1/\ln x$. Soit c_0 une constante positive assez petite, de sorte que 1 soit la seule singularité de $-\zeta'/\zeta$ dans le rectangle $|\tau| \leq T, 1 - c_0/\ln T \leq \sigma \leq \kappa$.

On calcule le résidu en 1 : comme ζ admet un pôle d'ordre 1 en 1, on sait que $\mathrm{Res}(\zeta'/\zeta, 1) = -1$, et ensuite comme x^s/s est holomorphe au voisinage de 1 :

$$\mathrm{Res}((\zeta'/\zeta)(s)\frac{x^s}{s}, 1) = \frac{x^1}{1}\mathrm{Res}(\zeta'/\zeta, 1) = -x$$

On peut donc écrire, pour Γ la ligne brisée passant par $\kappa - iT$; $1-c_0/\ln T - iT$, $1-c_0/\ln T + iT$ et $\kappa + iT$:

$$\psi(x) = x + \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \zeta^k(s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\ln x\left(1+\frac{x\ln T}{T}\right)\right)$$

La majoration $\zeta'(s)/\zeta(s) \ll \ln T$ donne alors, pour la partie verticale :

$$|\int_{\uparrow}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds| \leq \int_{\uparrow}|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}|\frac{x^{\mathsf{Re}(s)}}{|s|}|ds|$$

$$\ll (\ln T) \int_2^T \frac{x^{1-c_0/\ln \tau}}{\tau} d\tau \ll x(\ln T)^2 \exp(-c_0 \frac{\ln x}{\ln T})$$

Et pour la partie horizontale (du haut) :

$$|\int_{\rightarrow} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds| \leq \int_{\rightarrow} |\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}| \frac{x^{\mathsf{Re}(s)}}{|s|} |ds|$$
$$\ll \frac{\ln T}{T} \int_{1-c_0/\ln T}^{1+\ln x} x^\sigma d\sigma \ll x \frac{\ln T}{T}$$

On a donc démontré :

$$\psi(x) = x + O\left(\ln x(1 + \frac{x \ln T}{T}) + x(\ln T)^2 \exp(-c_0 \frac{\ln x}{\ln T})\right)$$

En choisissant $T = e^{\sqrt{\ln x}}$, on obtient finalement, en notant $c = \sqrt{c_0}/2$:

$$\boxed{\psi(x) = x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}})}$$

3.4.4 Le théorème des nombres premiers

Nous somme en mesure d'obtenir rapidement le théorème des nombres premiers. Etablir une estimation précise de ψ revient à avoir un théorème des nombres premiers précis : nous allons le comprendre dans les lignes qui suivent.

L'objectif est d'approcher $\pi(x) := \sum_{p \leq x} 1$.

Commençons par travailler l'expression de $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^\nu \leq x} \ln p = \sum_{p \leq x} \ln p + \sum_{2 \leq \nu \leq \ln x} \sum_{p^\nu \leq x} \ln p = \sum_{p \leq x} \ln p + O(\sqrt{x}(\ln x)^2)$$

Et comme d'autre part $\psi(x) = x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}})$, on obtient :

$$\sum_{p \leq x} \ln p = x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}})$$

Nous somme presque au théorème des nombres premiers, il reste à relier correctement $\pi(x)$ a $\sum_{p \leq x} \ln p$ et nous aurons finis. On a :

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{p \leq x} \ln p \frac{1}{\ln p} = \sum_{p \leq x} (\ln p)(\frac{1}{\ln x} + \int_p^x \frac{dt}{t \ln^2 t})$$
$$= \frac{1}{\ln x} \sum_{p \leq x} \ln p + \sum_{p \leq x} \int_p^x \frac{\ln p}{t \ln^2 t} dt = \frac{1}{\ln x} (\sum_{p \leq x} \ln p) + \int_2^x (\sum_{p \leq t} \ln p) \frac{dt}{t \ln^2 t}$$

En utilisant l'estimation de la somme précédente, le grand $O()$ étant uniforme, on obtient :

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}) + O(\int_2^x \frac{e^{-c\sqrt{\ln t}}}{\ln^2 t} dt)$$

Le terme principal est appelé écart logarithmique intégral :

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}$$

Il ne reste plus qu'à majorer convenablement le dernier grand $O()$.

On a :

$$\int_2^x \frac{e^{-c\sqrt{\ln t}}}{\ln^2 t} dt = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{e^{-c\sqrt{\ln t}}}{\ln^2 t} dt + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{e^{-c\sqrt{\ln t}}}{\ln^2 t} dt \ll \sqrt{x} + x \frac{e^{-\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}}{\ln^2 x} \ll xe^{-c_0\sqrt{\ln x}}$$

Pour $c_0 = \frac{c}{\sqrt{2}}$. On a donc enfin démontré le théorème des nombres premiers :

$$\boxed{\psi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(xe^{-c_0\sqrt{\ln x}})}$$

4 La méthode de Selberg

L'objectif de mon stage était de comprendre l'article publié par Selberg le 4 Avril 1953 : *Note on a paper by L. G. Sathe.* Dans ce texte Selberg propose une technique permettant d'obtenir, en un coup, des estimations pour $\pi_k(x) := \#\{p_1p_2...p_k \leq x | p_i \text{ distincts}\}$, pour $\rho_k(x) := \#\{n \leq x | \omega(n) = k\}$ et pour $\eta_k(x) := \#\{n \leq x | \Omega(n) = k\}$.
Pour ce faire, il developpe une méthode permetant de traiter le cas ou la fonction F possede des singularitées qui ne sont pas des pôles.

4.1 Puissances complexes de ζ

Selberg commence par chercher une estimation de d_z, suite définie par $\zeta^z(s) = \sum \frac{d_z(n)}{n^s}$.
Commençons par comprendre un peu mieux ce que ζ^z signifie.
Nous avons déjà justifié que, sur une zone contenant le demi-plan ($\sigma > 1$), l'expression $\log \zeta$ a un sens. Plus précisement, dans la région $\sigma \geq 1 - c/\ln(2 + |\tau|)$ pour un c assez petit, on a posé :

$$\log \zeta(s) = \int_2^s \frac{\zeta'(\omega)}{\zeta(\omega)} d\omega + \ln(\frac{\pi^2}{6})$$

On peut alors naturellement définir ζ^z, pour n'importe quel $z \in \mathbb{C}$, de la façon suivante :

$$\zeta^z(s) := e^{z \log \zeta(s)}$$

Pourquoi une puissance complexe de ζ serait-elle encore une série de dirichlet ?
Souvenons nous du developement en produit eulerien de ζ. Il donne, si $\sigma > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

On constate alors que l'application $L : s \mapsto -\sum_p \log(1 - p^{-s})$, où les log sont pris en détermination principale, est holomorphe sur la région $\sigma > 1$, et qu'elle vérifie $e^L = \zeta$. Il s'agit donc aussi d'un logarithme de ζ. On note enfin que $L(2) = \ln(\frac{\pi^2}{6}) = \log \zeta(2)$. Ceci démontre que ces deux fonctions sont en fait égales, et on a donc montré, pour $\sigma > 1$:

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log(1 - p^{-s})$$

Ceci nous permet d'obtenir une autre expression de ζ^z : En effet, on peut maintenant ecrire le developement en produit eulerien suivant :

$$\zeta^z(s) = e^{-z \sum_p \log(1-p^{-s})} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-z} = \prod_p \left(1 + \sum_{\nu \geq 1} \frac{z(z+1)\dots(z+\nu-1)}{\nu!} p^{-\nu s} \right)$$

Ce qui signifie bien que $\zeta^z(s)$ est une série de dirichlet, que l'on notera $\sum \frac{d_z(n)}{n^s}$. De plus, le produit eulerien nous dit que d_z est multiplicative, définie par :

$$d_z(p^\nu) = \frac{z(z+1)\dots(z+\nu-1)}{\nu!}$$

Nous avons déjà obtenus des estimations de d_z dans le cas ou $z \in \mathbb{N}$, dans le cas $z = -1$ (on retrouve la fonction de moebius μ). Mais les techniques appliquées ne sont plus valides ici : ζ^z possede des singularités qui ne sont pas des pôles !

4.2 Résultats préliminaires

La méthode utilisée par Selberg nécéssite quelques résultats sur la fonction Γ d'Euler.

Définition 4. On note, pour $\sigma > 0$:

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

Commençons par quelques remarques : Cette intégrale vérifie clairement les hypotheses du théorème de convergence dominée sur tout compact du domaine de définition.
On voit donc sans mal que Γ est une application holomorphe sur le domaine $\sigma > 0$.

Une intégration par partie permet de montrer la formule classique :

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

Il est alors intéréssant de noter que cette relation fonctionnelle nous indique naturellement un prolongement méromorphe de Γ : on peut en effet poser

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}, \forall n > \mathrm{Re}(-s), \Gamma(s) := \frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\dots(s+n-1)}$$

Ceci définit alors bien un prolongement méromorphe de Γ, avec des pôles simples en $-\mathbb{N}$ de résidus $\mathrm{Res}(\Gamma, n) = \frac{(-1)^n}{n!}$.
Pour obtenir le résultat que je souhaite finalement obtenir dans cette partie, je vais avoir besoin de la formule des compléments. J'en présente ici une démonstration classique.

Théorème 25.

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},\ \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

Démonstration. Nous allons montrer la formule pour $s = \sigma \in]0,1[$, ce qui nous permettra d'utiliser la formule intégrale pour Γ dans la preuve. Le résultat pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ viendra alors de l'unicité des prolongements méromorphes.

Soit donc $s \in]0,1[$. On a :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty (\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt)u^{-s}e^{-u}du = \int_0^\infty \int_0^\infty (vu)^{s-1}e^{-vu}u^{-s}e^{-u}\ u\ dv\ du$$

grâce au changement de variable $t = vu$. Par Fubini, on a alors :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_{(R_+)^2} v^{s-1}e^{-(1+v)u}d\lambda_2(v,u) = \int_0^\infty \frac{v^{s-1}}{1+v}dv$$

On effectue enfin le changement de variable $v = e^x$ et on se ramene donc a calculer :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{sx}}{1+e^x}dx$$

Pour ce faire, on introduit le rectangle $\mathcal{C}_R$ de sommets $-R$,R,$R+2i\pi$, $R+2i\pi$. D'après le théorème des résidus, on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{sz}}{1+e^z}dz = \mathrm{Res}(e^{sz}/(1+e^z), i\pi)$$

Puisque la seule singularité de l'intégrande dans le rectangle est en $i\pi$.
Le calcul du résidus donne :

$$(z-i\pi)\frac{e^{sz}}{1+e^z} \underset{z\to i\pi}{\longrightarrow} -e^{is\pi}$$

On peut donc écrire

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{sz}}{1+e^z}dz = -e^{is\pi}$$

On souhaite a présent faire tendre R vers l'infini.
On a, pour les parties verticales, puisque $s \in]0,1[$:

$$\left|\int_R^{R+2i\pi} \frac{e^{sz}}{1+e^z}dz\right| \leq 2\pi\frac{e^{sR}}{1+e^R} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\left|\int_{-R+2i\pi}^{-R} \frac{e^{sz}}{1+e^z}dz\right| \leq 2\pi e^{-sR} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, la partie horizontale supérieure vérifie :

$$\int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} \frac{e^{sz}}{1+e^z}dz = \int_R^{-R} \frac{e^{sx+2i\pi s}}{1+e^{x+2i\pi}}dx = -e^{2i\pi s}\int_{-R}^{R} \frac{e^{sx}}{1+e^x}dx$$

On obtient donc, en faisant tendre R vers l'infini :

$$(1-e^{2i\pi})\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{sx}}{1+e^x}dx = -e^{is\pi}$$

Ce qui nous permet de conclure :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{sx}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

□

L'objectif de cette partie préliminaire était d'obtenir ce que l'on apelle la formule de Hankel pour la fonction Γ. Cette formule nous donne une formule intégrale de $1/\Gamma$ définie sur $\mathbb{C}$ tout entier. Elle servira dans la méthode de Selberg que nous verrons plus loins.

Définition 5. On appelle contour de Hankel un contour définit de la manière suivante : Pour $R > 0$ donné, il s'agit du chemin passant par la demi-droite $]-\infty,-R]$ avec argument $-\pi$, puis passant par le cercle de centre 0 et de rayon R, et enfin passant par la demi-droite $]-\infty,-R]$ avec argument $+\pi$.

Théorème 26. *Soit $\mathcal{H}$ un contour de Hankel. Alors pour tout complexe z, on a*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{H}} s^{-z}e^s \mathrm{d}s.$$

Démonstration. L'intégrale est absolument convergente et uniformement convergente sur tout compact. Elle définit donc une fonction entière de z qui est indépendante de R, d'après le théorème des résidus, puisque la seule singularité de l'intégrande est en $s = 0$.
Lorsque $\mathrm{Re}(s) < 1$, l'intégrale sur la partie circulaire $|s| = R$ du contour de Hankel tends vers zéro avec R (mais n'est pas nulle attention : s^{-z} n'est pas holomorphe dans tout le domaine entouré). De plus, l'intégrale restante sur la demie droite $]-\infty,-R]$ tends vers

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{\infty}(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z})\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^z e^{\sigma}} = \frac{\sin \pi z}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^z e^{\sigma}} = \frac{sin\pi z}{\pi}\Gamma(1-z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$$

La formule voulue est donc établie lorque $\mathrm{Re}(z) < 1$, donc pour tout z, par prolongement analytique. □

Corollaire 27. *Notons, pour $X > 1$, $\mathcal{H}(X)$ la partie du contour de Hankel située dans le demi-plan $\sigma > -X$. Alors on a uniformement pour $z \in \mathbb{C}$:*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{H}(X)} s^{-z}e^s \mathrm{d}s = \frac{1}{\Gamma(z)} + O(47^{|z|}\Gamma(1+|z|)e^{-\frac{1}{2}X})$$

Démonstration. Pour $s = \sigma^{\pm i\pi}$, $\sigma > 1$, on à : $|s^{-z}e^s| \leq (e^{\pi}\sigma)^{|z|}e^{-\sigma}$. La difference entre le membre de gauche et l'intégrale est donc :

$$\ll e^{\pi|z|}\int_X^{\infty}\sigma^{|z|}e^{-\sigma}\mathrm{d}\sigma \leq e^{\pi|z|-\frac{1}{2}X}\int_0^{\infty}\sigma^{|z|}e^{-\frac{1}{2}\sigma}\mathrm{d}\sigma$$

Le changement de variables $\sigma = 2t$ fournit donc la majoration voulue puisque $2e^{\pi} < 47$. □

4.3 Estimation de $\sum_{n\leq x} d_z(n)$

Nous sommes enfin en mesure de présenter la méthode Selberg. Remarquons que les résultats obtenus et démontrés ici sont ceux de Selberg dans le papier original : Gerald Ténenbaum en donne des plus précis dans son livre, avec une démonstration qui est, de plus, plus courte. Notre premier objectif est d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 28. *Soit $A \geq 0$. On a, uniformement en $|z| \leq A, x \geq 2$:*

$$D_z(x) := \sum_{n\leq x} d_z(n) = \frac{x(\ln x)^{z-1}}{\Gamma(z)} + O(x(\ln x)^{z-2})$$

Une remarque avant de commencer : les constantes sous-entendues dans les grand O() obtenus ne dépendrons que de A.

Démonstration. On commence la preuve en appliquant une formule de Perron : on a

$$\int_0^x D_z(t)dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds$$

Le premier objectif de la preuve est de déformer le contour d'intégration de façon a obtenir :

$$\boxed{\int_0^x D_z(t)dt = \frac{1}{2i\pi}\int_L \zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds + O\left(\frac{x^2}{(\log x)^{3A+4}}\right)}$$

où $L = L(x)$ est le contour défini par le contour de Hankel tronqué entourant 1,de rayon $1/\ln x$, et de partie rectiligne allant de $1-c$ a $1-1/\ln x$, pour une bonne constante c.

Pour ce faire, nous introduisont le contour C constitué : De la courbe $\sigma = 1 - \frac{c}{1+\ln|\tau|}$ pour $\tau < -1$, du segment vertical $[1-c-i, 1-c]$, du contour de Hankel précédent, du segment vertical $1-c$ jusqu'a $1-c+i$, et enfin de la courbe symétrique a la premiere : $\sigma = 1-\frac{c}{1+\ln|\tau|}$ pour $\tau > 1$.

On constate grace au théorème des résidus que l'on a :

$$\int_0^x D_z(t)dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds = \frac{1}{2i\pi}\int_C \zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds$$

En effet, si on note C_T le contour C tronqué au domaine $|\tau| \leq T$, on a :

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds = \int_{C_T} \zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds$$
$$+\int_{2-iT}^{1-\frac{c}{1+\ln T}-iT} \zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds + \int_{1-\frac{c}{1+\ln T}+iT}^{2+iT} \zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds$$

Et les petits segments horizontaux vérifient, grâce a la majoration $\log\zeta \ll \ln\ln|\tau| + O(1)$:

$$\ll (\ln T)^{|z|}\frac{x^2}{T^2} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

On a donc bien montré, en faisant tendre T vers l'infini, que

$$\int_0^x D_z(t)dt = \frac{1}{2i\pi}\int_C \zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds$$

Il faut encore montrer que, dans cette intégrale, la contribution principale est apportée par le contour de Hankel L.

Les petits segments verticaux dans l'intégrale sur C vérifient, par exemple pour celle du dessus

$$\int_{1-c}^{1-c+i} \zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds \ll x^{2-c} = O\left(\frac{x^2}{(\log x)^{3A+4}}\right)$$

Et les parties courbes vérifient, par exemple pour celle du dessus aussi :

$$\left|\int_{\nearrow}\zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds\right| \ll \int_1^{\infty}|\zeta^z(1-\frac{c}{1+\ln\tau}+i\tau)|\frac{x^{2-\frac{c}{1+\ln\tau}}}{\tau^2}d\tau$$

$$\ll x^2\int_1^{\infty}\frac{(\ln\tau)^{|z|}}{\tau^2}x^{-c/(1+1\ln\tau)}d\tau = x^2\int_0^{\infty}t^{|z|}x^{-c/(1+t)}e^{-t}dt$$

Soit, en posant $\phi_{x,z}(t) = |z|\ln t - (c\ln x)/(1+t) - t/2$:

$$\left|\int_{\nearrow}\zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds\right| \ll x^2\int_0^{\infty}e^{\phi_{x,z}(t)}e^{-t/2}dt$$

On prouve alors par une étude de fonction que $\max\phi_{x,z} \underset{x\to\infty}{\sim} -\sqrt{c\ln x}$. On a donc, pour x assez grand, $\max\phi_{x,z} \leq -\sqrt{\frac{c}{2}\ln x}$, et ainsi :

$$\left|\int_{\nearrow}\zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds\right| \ll x^2e^{-\sqrt{\frac{c}{2}\ln x}} = O\left(\frac{x^2}{(\log x)^{3A+4}}\right)$$

Ce grand O() a été montré a partir d'un certain rang X en x, mais est en réalité valide pour tout $x \geq 2$, puisque les fonctions considérées en x sont continues et ne s'annullent pas sur $[2, X]$.

Nous avons donc réussis a montrer que les parties autre que l'intégrale sur le contour de Hankel etaient négligeables, ie :

$$\int_0^x D_z(t)dt = \int_L \zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds + O\left(\frac{x^2}{(\log x)^{3A+4}}\right)$$

La seconde étape consiste a montrer que l'on peut "dériver" cette estimation, et obtenir :

$$\boxed{D_z(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_L \zeta^z(s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A+2}}\right)}$$

Pour celà, nous allons avoir besoin de pouvoir mesurer l'écart $D_z(y) - D_z(x)$.
On a, pour $y \geq x$:

$$|D_z(y) - D_z(x)| \leq \sum_{x\leq n\leq y}|d_z(n)| \leq \sum_{x\leq n\leq y}d_{\lfloor|z|\rfloor+1}(n) = O((y-x)(\ln y)^{|z|}) + O(y^{1-1/(1+|z|)})$$

où on a utilisé l'estimation $D_k(x) = xP_{k-1}(\ln x) + O(x^{1-1/k})$ démontré en partie 3.4.2, et le fait que

$$|d_z(n)| = |\prod_{p^\nu\|n}\frac{z(z+1)\ldots(z+\nu-1)}{\nu!}| \leq \prod_{p^\nu\|n}\frac{k(k+1)\ldots(k+\nu-1)}{\nu!} = d_k(n)$$

pour $k = \lfloor|z|\rfloor + 1$.

De celà, on peut écrire, pour un certain paramètre h que l'on fera bientot bouger avec x :

$$\left|D_z(x) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h}D_z(t)dt\right| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|D_z(x) - D_z(t)|dt = h.O(\ln(x+h)^{|z|}) + O((x+h)^{1-1/(1+|z|)})$$

On choisit alors $h = x/(\ln x)^{2A+2}$, et on obtient :

$$D_z(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}D_z(t)dt + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{2A+2}}(\ln x)^{|z|}\right) + O(x^{1-1/(1+|z|)})$$

ie

$$D_z(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}D_z(t)dt + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A+2}}\right)$$

Ce résultat explicite le liens entre le résultat sur $\int_0^x D_z(t)dt$ que nous possedons et celui sur $D_z(x)$ que l'on cherche a démontrer. En utilisant, donc, le résultat obtenus a la première étape de la preuve, on a :

$$D_z(x)=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{L(x+h)}\zeta^z(s)\frac{(x+h)^{s+1}}{s(s+1)}ds-\frac{1}{2i\pi}\int_{L(x)}\zeta^z(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds\right)+O\left(\frac{1}{h}\frac{x^2}{(\ln x)^{3A+4}}\right)+O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A+2}}\right)$$

Et comme l'intégrale sur le contour de Hankel ne dépends pas du rayon, l'intégrale $L(x+h)$ est en fait une intégrale $L(x)$ et on obtient :

$$D_z(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{L(x)}\frac{\zeta^z(s)}{s(s+1)}\frac{(x+h)^{s+1}-x^{s+1}}{h}ds+O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A+2}}\right)$$

On souhaite aprocher $((x+h)^{s+1}-x^{s+1})/h$ uniformement par $(s+1)x^s$.
On peut l'écrire, pour u et s borné on a la majoration uniforme

$$|(1+u)^s-1-su|\ll|u|^2$$

, ce qui nous donne pour $s\in L(x)$ (rapellons que dans $L(x)$, $|s|\leq 1+1/\ln x$):

$$|(x+h)^{s+1}-x^{s+1}-(s+1)x^sh|=x^{s+1}|(1+\frac{h}{x})^{s+1}-1-(s+1)\frac{h}{x}|$$

$$\leq x^2e|(1+\frac{h}{x})^{s+1}-1-(s+1)\frac{h}{x}|\ll x^2(\frac{h}{x})^2=h^2$$

D'où $((x+h)^{s+1}-x^{s+1})/h=(s+1)x^s+O(h)$ où le grand O(h) est uniforme en s.
On injecte cette estimation dans l'intégrale pour obtenir :

$$D_z(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{L(x)}\zeta^z(s)\frac{x^s}{s}ds+O(h\int_L|\zeta^z(s)||ds|)+O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A+2}}\right)$$

Traitons le grand $O()$ qui vient d'apparaitre :

$$h\int_L|\zeta^z(s)||ds|=\frac{x}{(\ln x)^{2A+2}}\int_{L(x)}\frac{|(s-1)\zeta(s)|^z}{|s-1|^z}|ds|$$

et comme $s\mapsto(s-1)\zeta(s)$ est bornée au voisinage de 1 :

$$h\int_L|\zeta^z(s)||ds|\ll\frac{x}{(\ln x)^{2A+2}}\int_{L(x)}\frac{1}{|s-1|^z}|ds|$$

et comme $\frac{1}{|s-1|}\leq 1/\ln x$ pour $s\in L$, on obtient

$$h\int_L|\zeta^z(s)||ds|\ll\frac{x}{(\ln x)^{A+2}}$$

Nous avons donc enfin terminé cette sconde étape de la preuve, c'est a dire obtenir :

$$D_z(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{L(x)}\zeta^z(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A+2}}\right)$$

La dernière étape est la conclusion. On cherche a obtenir :

$$\boxed{D_z(x)=\frac{x(\ln x)^{z-1}}{\Gamma(z)}+O(x(\ln x)^{z-2})}$$

Pour celà, on écrit :

$$\int_{L(x)}\zeta^z(s)\frac{x^s}{s}ds=\int_{L(x)}\frac{1}{s}((s-1)\zeta(s))^z\frac{x^s}{(s-1)^z}ds=\int_{L(x)}f(s)\frac{x^s}{(s-1)^z}ds$$

avec $f:s\mapsto(s-1)\zeta(s))^z/s$ holomorphe au voisinage de 1, de valeur 1 en 1.
On effectue alors le changement de variable $s=1+\omega/\ln x$: Le domaine d'intégration devient un contour de Hankel $H=H(c\ln x)$ centré en 0, de rayon 1, et coupé en $\sigma>-c\ln x$.
On obtient donc :

$$D_z(x) = \frac{x(\ln x)^{z-1}}{2i\pi} \int_H f(1+\omega/\ln x) \frac{e^\omega}{\omega^z} d\omega + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A+2}}\right)$$

Comme dans cette intégrale le terme $\omega/\ln x$ est borné, on peut écrire uniformement en ω et en x : $f(1+\omega/\ln x) = f(1) + O(\omega/\ln x)$. Ce qui donne :

$$D_z(x) = \frac{x(\ln x)^{z-1}}{2i\pi} \int_H \frac{e^\omega}{\omega^z} d\omega + O\left(x(\ln x)^{z-2} \int_H \left|\frac{e^\omega}{\omega^{z+1}}\right| |d\omega|\right) + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{A+2}}\right)$$

Comme l'intégrale apparaissant dans le grand O() converge absolument quand x tends vers l'infini, on obtient l'estimation :

$$D_z(x) = \frac{x(\ln x)^{z-1}}{2i\pi} \int_H \frac{e^\omega}{\omega^z} d\omega + O\left(x(\ln x)^{z-2}\right)$$

Et nous avons enfin terminé la preuve, puisque l'on a vu dans la partie préliminaire que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_H \frac{e^\omega}{\omega^z} d\omega = 1/\Gamma(z) + O(47^{|z|}\Gamma(1+|z|)e^{-\frac{1}{2}c\ln x}) = 1/\Gamma(z) + O(x^{-c/2})$$

Ce qui nous permet bien de conclure,uniformement en $x \geq 2$ et $|z| \leq A$ que :

$$D_z(x) = \frac{x(\ln x)^{z-1}}{\Gamma(z)} + O\left(x(\ln x)^{z-2}\right)$$

□

4.4 Un résultat de stabilité

L'objectif a présent, est de montrer que cette estimation générale obtenue sur les D_z se "transfere" pour d'autres fonctions arithmétiques sous certaines conditions.

Théorème 29. *Soit $f(s,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_z(n)}{n^s}$ pour $\sigma > 1$, tel que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_z(n)|n^{-1}\ln(2n)^{B+3}$ soit uniformement borné pour $|z| \leq B$. Notons pour $\sigma > 1$:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_z(n)}{n^s} := \zeta^z(s) f(s,z)$$

Alors on a,uniformement en $|z| \leq B$, $x \geq 2$:

$$A_z(x) := \sum_{n=1}^{\infty} = \frac{f(1,z)}{\Gamma(z)} x(\ln x)^{z-1} + O(x(\ln x)^{z-2})$$

Démonstration. On sait que $d_z * b_z = a_z$. C'est grace a cette relation, et grace au fait que b_z ne croît pas trop violemment, que l'estimation obtenue pour les d_z va pouvoir se transmettre d'une certaine façon a a_z. En effet, on note que :

$$A_z(x) = \sum_{n\leq x} b_z * d_z(n) = \sum_{n\leq x} \sum_{d|n} b_z(d) d_z(n/d) = \sum_{d\leq x} \sum_{n=kd, k\leq x/d} b_z(d) d_z(k)$$

ie

$$A_z(x) = \sum_{d\leq x} b_z(d) D_z(x/d)$$

Ceci va nous permettre d'injecter l'estimation connue sur D_z (puisque celle-ci est uniforme) et obtenir des renseignements sur A_z.
Mais avant cela, notons qu'injecter brutalement l'estimation dans la somme donnera un probleme, a cause du terme en $\ln(x/n)^{z-1}$ qui est indéfini quand $n = x$ et $\text{Re}(z) < 1$: il est donc necessaire de se debarasser des termes trop proches de x avant tout.

On note que, pour $1 \leq y < 2$, $D_z(y) = 1$. Ce qui nous permet d'écrire :

$$A_z(x) = \sum_{n\leq x/2} b_z(n) D_z(x/n) + \sum_{x/2<n\leq x} b_z(n)$$

Et la somme de droite est négligeable, puisque :

$$\sum_{x/2<n\leq x} |b_z(n)| \leq \sum_{x/2<n\leq x} \frac{|b_z(n)|}{n} \ln(2n)^{B+2} \frac{n}{\ln(2n)^{B+2}} \ll \frac{x}{(\ln x)^{B+2}}$$

On s'est donc bien ramené a

$$A_z(x) = \sum_{n\leq x/2} b_z(n) D_z(x/n) + O(x(\ln x)^{z-2})$$

On peut a présent injecter l'estimation connue de D_z dans la somme :

$$A_z(x) = \sum_{n\leq x/2} b_z(n) \left(\frac{x(\ln x/n)^{z-1}}{n\Gamma(z)} + O\left(\frac{x}{n}(\ln x/n)^{\mathrm{Re}(z)-2}\right)\right) + O(x(\ln x)^{z-2})$$

ie

$$\boxed{A_z(x) = \frac{x}{\Gamma(z)} \sum_{n\leq x/2} \frac{b_z(n)}{n}(\ln x/n)^{z-1} + O\left(x\sum_{n\leq x/2} \frac{|b_z(n)|}{n}(\ln x/n)^{\mathrm{Re}(z)-2}\right) + O(x(\ln x)^{z-2})}$$

On est donc ramené a estimer deux sommes : Nous allons traiter la première, l'étude de la seconde étant absolument analogue. On sais ce que l'on veut obtenir : on espere reussir a montrer que les premiers termes de la somme seront les plus significatifs, de façon a faire effectivement apparaitre un $(\ln x)^{z-1}$. Celà nous incite a couper la somme en deux : en présence de logarithmes, couper en $\sqrt{x}$ est parfois intéréssant. On a donc :

$$x\sum_{n\leq x/2} \frac{b_z(n)}{n}(\ln x/n)^{z-1} = x\sum_{n\leq \sqrt{x}} \frac{b_z(n)}{n}(\ln x/n)^{z-1} + x\sum_{\sqrt{x}\leq n\leq x/2} \frac{b_z(n)}{n}(\ln x/n)^{z-1}$$

Traitons la somme de droite :

$$x\left|\sum_{\sqrt{x}\leq n\leq x/2} \frac{b_z(n)}{n}(\ln x/n)^{z-1}\right| \leq x\sum_{\sqrt{x}\leq n\leq x/2} \frac{|b_z(n)|}{n}(\ln x/n)^{\mathrm{Re}(z)-1}$$

Si $\mathrm{Re}(z)-1<0$, alors $(\ln x/n)^{\mathrm{Re}(z)-1} \leq \ln(2)^{\mathrm{Re}(z)-1} \ll 1$ On obtient dans ce cas :

$$x\sum_{\sqrt{x}\leq n\leq x/2} \frac{|b_z(n)|}{n}(\ln x/n)^{\mathrm{Re}(z)-1} \ll x\sum_{\sqrt{x}\leq n\leq x/2} \frac{|b_z(n)|}{n}\frac{(\ln 2n)^{B+2}}{(\ln 2n)^{B+2}} \ll \frac{x}{(\ln x)^{B+2}}$$

Si $\mathrm{Re}(z)-1>0$, alors $(\ln x/n)^{\mathrm{Re}(z)-1} \leq \ln(\sqrt{x})^{\mathrm{Re}(z)-1} \ll \ln(x)^{\mathrm{Re}(z)-1}$. On obtient dans ce cas :

$$x\sum_{\sqrt{x}\leq n\leq x/2} \frac{|b_z(n)|}{n}(\ln x/n)^{\mathrm{Re}(z)-1} \ll x(\ln x)^{\mathrm{Re}(z)-1} \sum_{\sqrt{x}\leq n\leq x/2} \frac{|b_z(n)|}{n} \ll x(\ln x)^{\mathrm{Re}(z)-2}$$

Nous avons donc reussis a montrer que :

$$x\sum_{n\leq x/2} \frac{b_z(n)}{n}(\ln x/n)^{z-1} = x\sum_{n\leq\sqrt{x}} \frac{b_z(n)}{n}(\ln x/n)^{z-1} + O(x(\ln x)^{z-2})$$

Maintenant que nous n'avons plus que les premiers termes, il faut essayer de faire apparaitre le comportement que l'on voulais. On a :

$$x\sum_{n\leq\sqrt{x}} \frac{b_z(n)}{n}(\ln x/n)^{z-1} = x(\ln x)^{z-1}\sum_{n\leq\sqrt{x}} \frac{b_z(n)}{n}\left(1-\frac{\ln n}{\ln x}\right)^{z-1}$$

Tout l'intéret d'avoir coupé la somme en $\sqrt{x}$ apparait alors : le terme $\frac{\ln n}{\ln x}$ étant dans la boule $B(0,1/2)$, on peut écrire uniformément dans la somme en n,x :

$$(1-\frac{\ln n}{\ln x}) = 1 + O(\frac{\ln n}{\ln x})$$

Ce qui nous donne :

$$x \sum_{n \le \sqrt{x}} \frac{b_z(n)}{n} (\ln x/n)^{z-1} = x(\ln x)^{z-1} \sum_{n \le \sqrt{x}} \frac{b_z(n)}{n} + O\left(x(\ln x)^{z-2} \sum_{n \le \sqrt{x}} \frac{|b_z(n)|}{n} \ln(2n) \right)$$

ie

$$x \sum_{n \le \sqrt{x}} \frac{b_z(n)}{n} (\ln x/n)^{z-1} = x(\ln x)^{z-1} \sum_{n \le \sqrt{x}} \frac{b_z(n)}{n} + O(x(\ln x)^{z-2})$$

L'étude de la somme présente dans le grand O() de l'encadré est très similaire a celle que l'on vient de faire, et finalement, en injectant les estimations que l'on vient d'obtenir dans le premier resultat encadré, on obtient :

$$\boxed{A_z(x) = \frac{x(\ln x)^{z-1}}{\Gamma(z)} \sum_{n \le \sqrt{x}} \frac{b_z(n)}{n} + O(x(\ln x)^{z-2})}$$

Il reste a montrer que $\sum_{n \le \sqrt{x}} b_z(n)/n$ converge assez vite vers $f(1, z)$: c'est en effet le cas, puisque :

$$f(1, z) - \sum_{n \le \sqrt{x}} b_z(n)/n = \sum_{n > \sqrt{x}} b_z(n)/n \ll 1/(\ln x)$$

Ce qui nous permet donc bien de conclure que,uniformement en $|z| \le B$,$x \ge 2$:

$$A_z(x) = \frac{f(1, z)}{\Gamma(z)} x(\ln x)^{z-1} + O(x(\ln x)^{z-2})$$

□

Le résultat precedent est fort : Il permet d'obtenir beaucoup de nouvelles informations sur toute les fonctions arithmétiques qui sont, d'une certaine manière, "proches" d'une des d_z. Mais Selberg ne s'arrete pas là, et agrandit encore de beaucoup le nombres de fonctions dont nous allons etre capable d'obtenir une estimation avec le théorème suivant:

Théorème 30. *Sous les hypothèses du théorème précédent, et si* $a_z(n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(n) z^k$ *pour* $|z| \le B$*, alors on a pour* $k \ge 1$ *:*

$$C_k(x) := \sum_{n \le x} c_k(n) = \frac{x}{\ln x} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} \left(\frac{f(1, z)}{\Gamma(1+z)} (\ln x)^z \right) \Bigg|_{z=0} + O\left(\frac{x(\ln \ln x)^k}{k!(\ln x)^2} \right)$$

Uniformement pour $k \le B \ln \ln x$*,* $x \ge 3$*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}(x)$ un cercle de centre 0 et de rayon $k/\ln \ln x$. Par la formule de Cauchy, on sait que

$$\forall k, \forall n, c_k(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{a_z(n)}{z^{k+1}} dz$$

Ce qui donne, en sommant :

$$C_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{A_z(x)}{z^{k+1}} dz$$

Comme par hypothèse, $|z| = k/\ln \ln x \le B$, on peut bien utiliser l'estimation uniforme obtenue au théorème précédent et on obtient :

$$C_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(1, z) x(\ln x)^{z-1}}{\Gamma(z) z^{k+1}} dz + O\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{x(\ln x)^{\mathrm{Re}(z)-2}}{|z|^{k+1}} |dz| \right)$$

Le terme principal donne exactement ce qu'on voulait grâce à la formule de Cauchy :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(1, z) x(\ln x)^{z-1}}{\Gamma(1+z) z^k} dz = \frac{x}{\ln x} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} \left(\frac{f(1, z)}{\Gamma(1+z)} (\ln x)^z \right) \Bigg|_{z=0}$$

Et pour le terme d'erreur, on obtient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{x(\ln x)^{\mathrm{Re}(z)-2}}{|z|^{k+1}}|dz| = \frac{x}{(\ln x)^2}\frac{(\ln\ln x)^k}{k^k}\int_{-\pi}^{\pi}(\ln x)^{k/\ln\ln x\cos t}dt$$

ie

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{x(\ln x)^{\mathrm{Re}(z)-2}}{|z|^{k+1}}|dz| = \frac{x}{(\ln x)^2}\frac{(\ln\ln x)^k}{k^k}\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos t}dt$$

Ce terme intégral se majore correctement grace a l'inégalité $\cos t \leq 1 - t^2/2$ vérifié sur $[-\pi/2, \pi/2]$, en faisant apparaitre une intégrale de Gauss. On obtient :

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos t}dt \leq \pi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{k\cos t}dt \leq \pi + e^k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-kt^2/2}dt \ll \frac{e^k}{\sqrt{k}}$$

Ce qui nous donne donc bien un terme d'erreur en

$$\frac{x}{(\ln x)^2}\frac{(\ln\ln x)^k}{k^k}\frac{e^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{x}{(\ln x)^2}\frac{(\ln\ln x)^k}{k!}$$

Grâce a la formule de Stirling.

□

Le prochain théorème est le dernier présenté par Selberg dans son papier. Il reformule sous certaines conditions le résultat précedent dans une forme plus explicite. Une fois ce théorème obtenu, nous aurons tout les résultats en mains pour obtenir, de manière systématique, de nombreuses estimations. Nous en ferons trois dans la partie suivante.

Théorème 31. *Sous les hypothèses du théorème precedent, et si la dérivée seconde de* $\frac{f(1,z)}{\Gamma(1+z)}$ *est uniformément bornée pour* $|z| \leq B$*, on a pour* $k \geq 1$ *:*

$$C_k(x) = \frac{x}{\ln x}\frac{f(1, \frac{k-1}{\ln\ln x})}{\Gamma(1+\frac{k-1}{\ln\ln x})}\frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} + O\left(\frac{x}{\ln x}\frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{k}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

Démonstration. La cas $k = 1$ est compris dans le théorème précédent : en effet

$$\frac{x}{\ln x}\frac{d^{(0)}}{dz^{(0)}}\left(\frac{f(1,z)}{\Gamma(1+z)}(\ln x)^z\right)\Bigg|_{z=0} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right) = \frac{x}{\ln x}\frac{f(1,0)}{\Gamma(1)} + O\left(\frac{x}{\ln x\ln\ln x}\right)$$

On suppose donc que $k > 1$. Comme le terme d'erreur du théorème précédent est déjà assez bon, nous avons juste a estimer l'intégrale dans le terme

$$\frac{x}{\ln x}\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(1,z)}{\Gamma(1+z)}\frac{(\ln x)^z}{z^k}dz$$

On choisit cette fois çi un rayon de $(k-1)/\ln\ln x$. Soit $g(z) = \frac{f(1,z)}{\Gamma(1+z)}$ et $r = \frac{k-1}{\ln\ln x}$. On remarque que :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}(z-r)\frac{(\ln x)^z}{z^k}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{(\ln x)^z}{z^{k-1}}dz + \frac{r}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{(\ln x)^z}{z^k}dz$$

$$= \frac{1}{(k-2)!}\frac{d^{(k-2)}}{dz^{(k-2)}}\left(\frac{f(1,z)}{\Gamma(1+z)}(\ln x)^z\right)\Bigg|_{z=0} - \frac{r}{(k-1)!}\frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}}\left(\frac{f(1,z)}{\Gamma(1+z)}(\ln x)^z\right)\Bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{(\ln\ln x)^{k-2}}{(k-2)!} - \frac{k-1}{\ln\ln x}\frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} = 0$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}g(z)\frac{(\ln x)^z}{z^k}dz = \frac{g(r)}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{(\ln x)^z}{z^k}dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}(g(z)-g(r)-g'(r)(z-r))\frac{(\ln x)^z}{z^k}dz$$

ie

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}g(z)\frac{(\ln x)^z}{z^k}dz = g(r)\frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}(g(z)-g(r)-g'(r)(z-r))\frac{(\ln x)^z}{z^k}dz$$

Le terme principal est celui que nous voulions, il reste a présent a montrer que le terme intégral est

$$\ll \frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{k}{(\ln\ln x)^2}$$

Pour celà, on remarque que

$$g(z)-g(r)-g'(r)(z-r) = -\int_r^z g''(\omega)(\omega-z)d\omega$$

Ce qui nous donne :

$$|g(z)-g(r)-g'(r)(z-r)| \leq \|g''\|_{\infty,\Delta(0,B)}|z-r|^2$$

Et donc on peut écrire :

$$\left|\int_{\mathcal{C}}(g(z)-g(r)-g'(r)(z-r))\frac{(\ln x)^z}{z^k}dz\right| \ll \int_{\mathcal{C}}|z-r|^2\frac{(\ln x)^{\mathrm{Re}(z)}}{|z|^k}|dz|$$

$$= r^{3-k}\int_{-\pi}^{\pi}|e^{it}-1|e^{(k-1)\cos t}dt = 2r^{3-k}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos t)e^{(k-1)\cos t}dt$$

$$\ll r^{3-k}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\cos t)e^{(k-1)\cos t}dt$$

En utilisant l'inégalité valable sur $[-\pi/2,\pi/2]$: $1-t^2/\pi \leq \cos t \leq 1-t^2/2$, on obtient :

$$\ll r^{3-k}e^{k-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}t^2e^{-(k-1)t^2/2}dt \ll r^{3-k}\frac{e^{k-1}}{(k-1)\sqrt{k-1}}$$

Et on conclut la preuve en remplaçant r par sa valeur et en utilisant stirling :

$$= \frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(\frac{k-1}{e})^{k-1}\sqrt{k-1}}\frac{k-1}{(\ln\ln x)^2} \ll \frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{k}{(\ln\ln x)^2}$$

□

4.5 Applications

4.5.1 Estimation de $\pi_k(x) := \#\{p_1p_2...p_k \leq x | p_i$ distincts$\}$

Le théorème que nous venons de démontrer nous permet d'obtenir de manière très efficace de nombreuses estimations. Dans cette partie et les deux suivantes, nous allons montrer l'applicabilité des théorèmes pour une fonction bien choisie, et en déduire toute une famille d'estimations.
Plus spécifiquement, l'objectif est ici d'obtenir un developement asymptotique pour la fonction π_k "nombre d'entiers ayant exactement k facteurs premiers de multiplicité 1", qui est la généralisation naturelle de la fonction π.
Nous obtiendrons alors un résultat qui sera un des points culminants de ce rapport : une loi de Poisson apparait naturellement.

Soit

$$f(s,z) = \prod_p (1+\frac{z}{p^s})(1-\frac{1}{p^s})^z$$

Un devellopement limité simple montre que le terme général de ce produit est, pour tout s, z : $1+O_z(p^{-2s})$, ce qui assure la convergence de ce produit pour $\mathrm{Re}s > 1/2$.

Quel est le a_z associé a cette fonction ? On a, pour $s>1$:

$$\zeta^z(s)f(s,z) = \prod_p (1+\frac{z}{p^s}) = \sum_{n\geq 1}\frac{a_z(n)}{n^s}$$

et donc l'expression de a_z se déduit du devellopement du produit eulerien : on obtient

$$a_z(n) = \begin{cases} 0 & \text{si un carré divise } n \\ z^k & \text{si } n = p_1 p_2 \dots p_k \end{cases}$$

Ainsi, on peut réécrire a_z sous la forme :

$$a_z(n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{n=p_1 p_2 \dots p_k}(n) z^k$$

Où l'indicatrice est a comprendre comme "n s'écrit comme produit de k facteurs premiers distincts". On obtient alors, avec les notations des théorèmes, que $c_k(n) = \mathbb{1}_{n=p_1 p_2 \dots p_k}(n)$, et que par conséquent :

$$C_k(x) = \sum_{n \leq 1} c_k(n) = \#\{n \leq x | n = p_1 p_2 \dots p_k, (p_i)_i \text{ distincts}\}$$

Ainsi, prouver l'applicabilité des théorèmes précédents nous donneras immédiatement un developement asymptotique de π_k.

La premiere étape est de montrer l'applicabilité du théorème 29 : on veut montrer que, pour toute constante B, $\sum_{n \geq 1} |b_z(n)| n^{-1} \ln(2n)^{B+3}$ est uniformément bornée en $|z| \leq B$.
Pour cela, on doit avoir quelques informations sur b_z : dans la pratique, en obtenir une bonne majoration est suffisant pour conclure.
On sait que :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{b_z(n)}{n^s} = \prod_p (1 + \frac{z}{p^s})(1 - \frac{1}{p^s})^z = \prod_p (1 + \sum_{\nu \geq 1} \frac{b(p^\nu)}{p^{\nu s}})$$

Ainsi b_z est multiplicative, et déterminée par la relation :

$$1 + \sum_{\nu \geq 1} b_z(p^\nu) \zeta^\nu = (1 + z\zeta)(1 - \zeta)^z$$

On note alors en faisant un petit dévellopement asymptotique du terme a droite que $b_z(p)$ est nul : on s'en était déjà aperçu précédement lors de l'étude de la convergence du produit. Pour les autres termes, la formule de Cauchy appliquée en un cercle de rayon R donne :

$$b_z(p^\nu) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(1 + z\zeta)(1 - \zeta)^z}{\zeta^{\nu+1}} d\zeta$$

Ainsi,

$$|b_z(p^\nu)| \leq \sup_{\zeta \in C} |(1 + z\zeta)(1 - \zeta)^z| \frac{1}{R^\nu}$$

Appliqué en $R = 1/\sqrt{2}$, on obtient, pour tout $|z| \leq B$:

$$|b_z(p^\nu)| \leq M 2^{\nu/2}, \qquad M := \sup_{\zeta \in C, |z| \leq B} |(1 + z\zeta)(1 - \zeta)^z|$$

Ce qui nous permet d'obtenir ce que l'on voulais, puisque l'on peut a présent écrire, pour $|z| \leq B$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|b_z(n)|}{n} (\ln 2n)^{B+3} \ll_B \sum_{n \geq 1} \frac{|b_z(n)|}{n^{3/4}}$$

$$= \prod_p (1 + \sum_{\nu \geq 2} \frac{|b_z(p^\nu)|}{p^{3\nu/4}}) \leq \prod_p (1 + M \sum_{\nu \geq 2} \frac{2^{\nu/2}}{p^{3\nu/4}}) < \infty$$

Puisque

$$\sum_p \sum_{\nu \geq 2} \left(\frac{2^{2/3}}{p} \right)^{3\nu/4} = \sum_p \frac{2}{p^{3/4}(p^{3/4} - \sqrt{2})} < \infty$$

Nous pouvons donc déjà écrire le dévelopement asymptotique sous la forme donnée par le théorème 30 : pour notre fonction f, on peut écrire :

$$\pi_k(x) == \frac{x}{\ln x}\frac{1}{(k-1)!}\left.\frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}}\left(\frac{f(1,z)}{\Gamma(1+z)}(\ln x)^z\right)\right|_{z=0} + O\left(\frac{x(\ln\ln x)^k}{k!(\ln x)^2}\right)$$

Montrons a présent que la dérivée seconde de $f(1,z)/\Gamma(1+z)$ est uniformement bornée sur $|z| \leq B$. Nous allons en fait montrer que $z \mapsto f(1,z)$ est entière, celà prouvera l'assertion précédente, puisque $1/\Gamma$ l'est aussi.

Montrons donc que

$$f : z \mapsto \prod_p (1+\frac{z}{p})(1-\frac{1}{p})^z$$

est holomorphe sur tout domaine $|z| < B$. On a, pour un tel z :

$$f(1,z) = e^{g(z)} \qquad , \ g(z) := \sum_p \left(\log(1+\frac{z}{p}) + z\log(1+\frac{1}{p})\right)$$

Si p est assez grand ($p > B$), le terme général de la série $g(z)$ peut s'écrire :

$$-\sum_{k\geq 1}\left(\frac{z}{p}\right)^k \frac{(-1)^k}{k} + z\ln(1-\frac{1}{p})$$

et on a alors :

$$\left|-\sum_{k\geq 1}\left(\frac{z}{p}\right)^k \frac{(-1)^k}{k} + z\ln(1-\frac{1}{p})\right| = \left|-\sum_{k\geq 2}\left(\frac{z}{p}\right)^k \frac{(-1)^k}{k} + z\ln(1-\frac{1}{p}) + \frac{z}{p}\right| \leq \frac{B}{p^2} + \sum_{k\geq 2}\left(\frac{B}{p}\right)^k \frac{1}{k}$$

Qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, g converge normalement sur le domaine $|z| \leq B$, et comme pour tout p, $z \mapsto \log(1+\frac{z}{p}) + z\log(1+\frac{1}{p})$ est holomorphe, g est aussi holomorphe.

Ce qui termine donc la preuve du fait que $f(1,z)$ est une fonction entière. On peut donc enfin appliquer le théorème 31 et écrire, uniformement en $k \leq B\ln\ln x$, $x \geq 1$:

$$\pi_k(x) = \frac{x}{\ln x}\frac{f(1,\frac{k-1}{\ln\ln x})}{\Gamma(1+\frac{k-1}{\ln\ln x})}\frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} + O\left(\frac{x}{\ln x}\frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{k}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

Pour terminer, puisque $f(1,z)/\Gamma(1+z)$ est holomorphe au voisinage de 0, on peut ré-écrire ce developpment de façon un peu moins précise mais plus explicite de la façon suivante : comme $(k-1)/\ln\ln x \leq B$, on peut écrire $f(1,z)/\Gamma(1+z) = f(1,0) + O(z)$

Ce qui permet donc d'obtenir ce résultat final :

$$\boxed{\pi_k(x) = \frac{x}{\ln x}\frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} + O\left(\frac{x}{\ln x}\frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{k}{(\ln\ln x)}\right)}$$

Ce résultat appelle quelques commentaires. Supposons que l'on ne garde que le terme principal du devellopement asymptotique obtenu : on reconnait l'écriture formelle d'une loi de Poisson de parametre $\ln\ln x$! Plus précisement, a x fixé, la fonction comptant de le nombres d'entiers de la forme $p_1p_2\dots p_k$ semble suivre une loi de Poisson. Cela suggere que, pour x grand, cette répartition s'approche de plus en plus a celle d'une Gaussienne !
On peut le comprendre naturellement de cette façon : il y a peu de nombres premiers, tout comme, par symétrie, il a y peu de nombres ayant beaucoup de diviseurs. Le compromis le plus effectué par les entiers,quand on regarde entre 0 et x, semble alors etre d'avoir *en moyenne* $\ln\ln x$ diviseurs.

4.5.2 Estimation de $\rho_k(x) := \#\{n \leq x | \omega(n) = k\}$

Cette fois-ci, nous cherchons un dévelopement asymptotique de $\rho_k(x) := \#\{n \leq x|\omega(n) = k\}$: le nombre d'entiers plus petits que x divisibles par exactement k nombres premiers distincts.
On introduit pour cela :

$$f(s,z) = \prod_p (1+\frac{z}{p^s-1})(1-\frac{1}{p^s})^z$$

De même que precedement, un developement limité du terme général donne $1 + O_z(p^{-2s})$, ce qui assure la convergence du produit pour $\mathrm{Re}(s) > 1/2$.

De même que precedemment, calculons la suite a_z associée a cette fonction. Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, on peut écrire :

$$\zeta^z(s)f(s,z) = \prod_p (1 + \frac{z}{p^s - 1}) = \prod_p (1 + \sum_{\nu \geq 0} \frac{z}{p^{\nu s}})$$

On reconnait donc ici une série de dirichlet de suite a_z associée multiplicative telle que $a_z(p^\nu) = z$ pour $\nu \geq 1$. En d'autres termes, on a :

$$a_z(n) = z^{\omega(n)}$$

Que l'on peut aussi re-ecrire sous la forme :

$$a_z(n) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{\omega(n)=k\}}(n) z^k$$

Ce qui donne donc bien ce que l'on voulait:

$$C_k(x) = \#\{n \leq x | \omega(n) = k\}$$

A présent, montrons l'applicabilité du théorème 29 : comme précédement, il s'agit de majorer correctement b_z. On sait que :

$$\sum_p \frac{b_z(n)}{n^s} = \prod_p (1 + \frac{z}{p^s - 1})(1 - \frac{1}{p^s})^z$$

Donc b_z est multiplicative, et est définie par la relation :

$$1 + \sum_{\nu \geq 1} b_z(p^\nu)\zeta^\nu = (1 + \frac{z}{\frac{1}{\zeta} - 1})(1 - \zeta)^\nu$$

Un fois encore, le dévellopement asymptotique déjà fait lors de l'étude de la convergence du produit montre que $b_z(p) = 0$. Pour les autres termes, une formule de Cauchy appliquée en un cercle C de rayon $\sqrt{2}$ donne, de la même façon qu'a la partie précédente, la majoration valable en $|z| \leq B$:

$$b_z(p^\nu) \leq M 2^{\nu/2}, \qquad M := \sup_{\zeta \in C, |z| \leq B} |(1 + \frac{z\zeta}{1 - \zeta})(1 - \zeta)^z|$$

Ce qui permet d'écrire, comme précédement, pour tout $|z| \leq B$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|b_z(n)|}{n} \ln(2n)^{B+3} \ll_B \sum_{n \geq 1} \frac{|b_z(n)|}{n^{3/4}}$$

$$= \prod_p \left(1 + \sum_{\nu \geq 2} \frac{|b_z(p^\nu)|}{p^{3\nu/4}}\right) \leq \prod_p \left(1 + M \sum_{\nu \geq 2} \frac{2^{\nu/2}}{p^{3\nu/4}}\right) < \infty$$

D'où l'applicabilité du théorème 29. A présent, montrons que $z \mapsto f(1,z)$ est entière, ce qui prouvera l'applicabilité du théorème 31. On a

$$f(1,z) = e^{g(z)}, \qquad g(z) = \sum_p \left(\log(1 + \frac{z}{p^s - 1}) + z\log(1 - \frac{1}{p})\right)$$

Et, pour $p - 1 > B$, le terme général se réécrit sous la forme :

$$\sum_{k \geq 1} \left(\frac{z}{p-1}\right)^k \frac{(-1)^{k+1}}{k} + z\ln(1 - \frac{1}{p})$$

Ce qui donne alors:

$$\left|\sum_{k \geq 1} \left(\frac{z}{p-1}\right)^k \frac{(-1)^{k+1}}{k} + z\ln(1 - \frac{1}{p})\right| \leq \sum_{k \geq 2} \left(\frac{B}{p-1}\right)^k \frac{1}{k} + |z||\ln(1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p-1}|$$

Qui est bien le terme général d'une série convergente en p. Ainsi, la série $g(z)$ est normalement convergente sur tout domaine $|z| \leq B$, et comme son terme général est constitué d'applications holomorphes, elle l'est aussi.
Nous avons donc montré que $f(1,z)$ est entiere, ce qui assure l'applicabilité du théorème 31. On peut donc enfin écrire, uniformement en $x \geq 3$ et $k \leq \ln\ln x$:

$$\rho_k(x) = \frac{x}{\ln x} \frac{f(1, \frac{k-1}{\ln\ln x})}{\Gamma(1+\frac{k-1}{\ln\ln x})} \frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} + O\left(\frac{x}{\ln x} \frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{k}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

Pour notre fonction f. Enfin, de même que precedement, par holomorphie de $f(1,z)$ en zero et comme $f(1,0) = 1$, on peut écrire :

$$\boxed{\pi_k(x) = \frac{x}{\ln x} \frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} + O\left(\frac{x}{\ln x} \frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{k}{(\ln\ln x)}\right)}$$

4.5.3 Estimation de $\eta_k(x) := \#\{n \leq x | \Omega(n) = k\}$

On termine enfin avec l'étude de $\eta_k(x) := \#\{n \leq x | \Omega(n) = k\}$: la fonction nombre d'entiers inferieurs a x ayants k facteurs premiers avec multiplicité.
Nous allons voir que celle-ci est un peu differente des autres, en effet, nousn'allons pouvoir appliquer la méthode de Selberg que pour des constantes $B < 2$! Pour des valeurs plus grandes de 2, non seulement les théorèmes ne s'appliquent pas, mais en réalité le dévelopement asymptotique n'est plus le même. Nous n'étudierons pas dans ce rapport le cas $B > 2$.

Soit, pour ce dernier exemple, la fonction f définie par :

$$f(s,z) = \prod_p (1 - \frac{z}{p^s})^{-1}(1 - \frac{1}{p^s})^z$$

Un fois de plus, un dévelopement asymptotique simple montre que le terme général est un $1 + O_z(p^{-2s})$, ce qui assure la convergence du produit pour $\mathrm{Re}(s) > 1/2$.
Si B est une constante positive telle que $B < 2$, on peut alors écrire, pour $\mathrm{Re}(s) > 1/2$:

$$\zeta^z(s) f(s,z) = \prod_p (1 - \frac{z}{p^s})^{-1} = \prod_p \sum_{\nu \geq 0} \frac{z^\nu}{p^{\nu s}}$$

Ce qui montre que la suite associée a_z est multiplicative, définie par :

$$a_z(p^\nu) = z^\nu$$

Que l'on peut réécrire de la façon suivante :

$$a_z(n) = z^{\Omega(n)}$$

Ce qui donne, de même qu'au deux premiers exemples :

$$C_k(x) = \#\{n \leq x | \Omega(n) = k\}$$

Comme précédemment, majorons convenablement b_z pour pouvoir appliquer le théorème 29 :
On sait que b_z est multiplicative, définie par la relation :

$$1 + \sum_{\nu \geq 1} b_z(p^\nu)\zeta^\nu = (1 - z\zeta)^{-1}(1-\zeta)^z$$

Un petit dévelopement permet de montrer qu'encore une fois $b_z(p) = 0$. Une formule de Cauchy appliquée en un cercle C_ρ de rayon ρ/B, avec $\rho < 1$, permet d'ecrire :

$$b_z(p^\nu) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\rho} \frac{(1-\zeta)^z}{(1-z\zeta)\zeta^{\nu+1}} d\zeta$$

en effet, le dénominateur ne s'annule alors pas sur ce cercle, puisque $1 - z\zeta = 0 \implies |\zeta| = 1/|z| \geq 1/B$. On peut donc écrire, pour $M = \sup_{\zeta \in C_\rho, |z| \leq B} \left| \frac{(1-\zeta)^z}{1-z\zeta} \right|$:

$$b_z(p^\nu) \leq M(B/\rho)^\nu$$

Pour pouvoir faire comme précédemment, on cherche une valeur $1/2 < \sigma < 1$ telle que :

$$\sum_p \sum_{\nu \geq 1} \frac{|b_z(p^\nu)|}{p^{\sigma\nu}} < \infty.$$

Comme on voit que :

$$\sum_p \sum_{\nu \geq 1} \frac{|b_z(p^\nu)|}{p^{\sigma\nu}} = \sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{|b_z(p^\nu)|}{p^{\sigma\nu}} \leq M \sum_p \sum_{\nu \geq 2} (\frac{B}{\rho\, p^\sigma})^\nu$$

Une condition nécéssaire est de pouvoir choisir $0 < \rho < 1$ et $1/2 < \sigma < 1$ tels que $\frac{B}{\rho p^\sigma} < 1$, ie $B < \rho p^\sigma$. C'est en effet possible, puisque $(1 - \frac{1}{n})2^{1-1/n} \to 2 > B$. On choisit donc des valeurs de ρ et de σ verifiant ces conditions : et on observe que cela est en fait suffisant pour faire converger notre série $\sum_p \sum_{\nu \geq 1} \frac{|b_z(p^\nu)|}{p^{\sigma\nu}}$, puisqu'en fait :

$$M \sum_p \sum_{\nu \geq 2} (\frac{B}{\rho\, p^\sigma})^\nu = M \sum_p \frac{B^2}{\rho^2 p^\sigma (\rho p^\sigma - B)} < \infty$$

Comme $\sigma > 1/2$.

Ceci nous permet donc bien d'utiliser la même technique que precedement, on obtient bien la majoration uniforme requise a l'utilisation du théorème 29, pour $|z| < B$ (< 2) :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|b_z(n)|}{n} \ln(2n)^{B+3} \ll_B \sum_{n \geq 1} \frac{|b_z(n)|}{n^\sigma} \leq \prod_p (1 + M \sum_{\nu \geq 2} (\frac{B}{\rho p^\sigma})^\nu) < \infty$$

La deuxieme chose a verifier est l'applicabilité du théorème 31 : nous allons montrer que $z \mapsto f(1, z)$ est holomorphe sur tout domaine $|z| < B$ avec $B < 2$.

De la même façon que les deux fois precedentes, on écrit :

$$f(1, z) = e^{g(z)}, \qquad g(z) = \sum_p \left(-\log(1 - \frac{z}{p}) + z \ln(1 - \frac{1}{p}) \right)$$

Pour tout p cette fois ci, puisque $|z| \leq B < 2$, on peut écrire le terme général de la série $g(z)$ sous la forme :

$$\sum_{\nu \geq 1} \frac{z^\nu}{p^\nu \nu} + z \ln(1 - \frac{1}{p})$$

Ce qui donne :

$$\left| \sum_{\nu \geq 1} \frac{z^\nu}{p^\nu \nu} + z \ln(1 - \frac{1}{p}) \right| \leq \sum_{\nu \geq 2} \frac{B^\nu}{p^\nu \nu} + B |\ln(1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p}|$$

qui est bien le terme général d'une série convergente.

Ainsi, par convergence normale, et par holomorphie de son terme général, g est holomorphe sur le domaine $|z| \leq B$ pour tout $B < 2$.

Donc $f(1, z)$ l'est aussi. On obtient donc le résultat suivant :
Pour toute constante $B < 2$, on a uniformement en $k \leq B \ln\ln x$, $x \geq 3$:

$$\rho_k(x) = \frac{x}{\ln x} \frac{f(1, \frac{k-1}{\ln\ln x})}{\Gamma(1 + \frac{k-1}{\ln\ln x})} \frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} + O\left(\frac{x}{\ln x} \frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{k}{(\ln\ln x)^2} \right)$$

Ce qui donne, comme precedemment, avec les mêmes hypothèses, le developement moins précis mais plus visuel :

$$\rho_k(x) = \frac{x}{\ln x} \frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} + O\left(\frac{x}{\ln x} \frac{(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{k}{(\ln\ln x)} \right)$$

5 Conclusion

Ce dernier resultat conclue ce rapport de stage.
J'ai essayé de concilier dans ce rapport les théorèmes théoriques, une présentation des idées, et le plus d'exemples que je pouvais me permettre de placer pour mettre en application le maximum d'outils et de methodes données par la théorie analytique des nombres.
J'espere avoir réussis a faire quelque chose de relativement clair.

Comme il s'agissait de la direction dans laquelle s'est déroulée mon stage, je n'ai parlé que des méthodes analytiques, mais la théorie des nombres de se résume pas a cela. (Et je ne prétends pas non plus avoir présenté la théorie analytique des nombres dans son intégralité !)

Le livre de Gerald Tenenbaum par exemple, sur lequel je me suis appuyé pour découvrir le domaine par exemple, est séparé en trois branches : le premier tier du livre présente des méthodes élémentaires, le second présente des méthodes analytiques et le troisieme des méthodes probabilistes.

Il me semble d'ailleurs qu'il y a un véritable regain d'interet actuellement pour les méthodes élémentaires. Cela a été, entre autre, motivé par le fait que l'on a pu démontrer le théorème des nombres premiers avec des méthodes élémentaires alors que l'on croyais depuis longtemps que seules des démonstrations utilisant de l'analyse complexe pouvais permettre de l'obtenir !

Pour finir, je suis plutôt content d'avoir découvert ce joli domaine qui restait pour moi quelque chose d'un peu mysterieux avant de m'y plonger, et je remercie encore une fois mon maitre de stage Sary Drappeau pour m'avoir aidé a comprendre quelques facettes du monument qu'est la théorie des nombres.

Bibliographie :

- Gérald Ténembaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Paris, Editions Belin,Collection Echelles, 2007
- Atle Selberg, *Note on a paper by L.G. Sathe*, Journal of the Indian Mathematical Society, VOL. 18, p.83-87, 1957