Séminaire M2R

LECLERC Gaétan

December 2020

1 Introduction

Ce séminaire porte sur le début d'un article de Carlos Tejero Prieto nommé *Holomorphic spectral geometry of magnetic Schrödinger operators on Riemann surfaces.*

L'auteur considère une surface de Riemann S compacte munie d'un champ magnétique. On s'intéresse a la trajectoire d'une particule chargée dans notre surface.

Du point de vue de la mécanique classique, l'étude de ce type de système est plutôt bien connue: elle donne naissance à la notion de variété symplectique. Ici, on s'intéresse plutôt a ce qu'il se passe d'un point de vue quantique. En mécanique quantique, le formalisme change : notre particule n'est plus modélisée par sa position sur S, mais est plutôt représentée par sa fonction d'onde (ici, une fonction d'onde sera une section globale sur S d'un certain fibré en droite $L \to S$). L'action du champ magnétique sur notre particule devient alors un opérateur auto-adjoint $\hat{H}$ (l'opérateur de Schrödinger magnétique) qui agit sur les fonctions d'ondes : pour comprendre celui-ci, il est nécessaire de comprendre son spectre.

L'auteur obtient une caractérisation complète du spectre de $\hat{H}$ sur les surfaces de Riemann de courbure constante de genre 0 et 1, et obtient une partie seulement du spectre si le genre est ≥ 1. Il s'appuie pour cela sur un théorème important provenant de la géométrie algébrique : le théorème de Riemann-Roch.

Dans ce rapport, on se focalisera sur l'étude du spectre de l'opérateur $\hat{H}$, sans expliquer la théorie de la quantification géométrique, qui justifierais son interprétation en mécanique quantique. Pour plus d'informations sur la quantification géométrique, on pourra se référer à *Quantum Theory for Mathematicians*, de Brian C. Hall.

Dans un premier temps, nous mettrons en place le formalisme nécessaire à cette étude.
Ensuite, on exposera brièvement le théorème de Riemann-Roch sur une surface de Riemann compacte.
On commencera enfin l'étude du coeur du texte a proprement parler, et on expliquera comment l'auteur se sert du théorème de Riemann-Roch comme un théorème d'existence pour exhiber des fonctions propres de $\hat{H}$. On mènera en particulier les calculs explicites pour le cas de $S = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$.

2 L'opérateur de Schrödinger magnétique

On considère une surface de Riemann compacte connexe munie d'une métrique Riemannienne (S, g), de courbure scalaire R constante. On met sur S un champ magnétique, qui est représenté par une 2-forme $B \in \Omega^2(S)$. Celui-ci est supposé de la forme $B = \hat{B}\Omega_2$, où $\hat{B}$ est une constante et où Ω_2 est l'élément d'aire riemannien. Notre particule est supposée de masse m et de charge e.

Définition 1. Un *fibré en droite hermitien avec connection* $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle, \nabla) \to S$ est un fibré en droites holomorphe $L \to S$ (donc chaque fibre est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1) muni d'une métrique hermitienne $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de sa connection de Chern ∇.

Pour pouvoir représenter notre problème dans un cadre quantique, on est amené a chercher un fibré en droite avec connection $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle, \nabla)$ dont la 2-forme de courbure $\Omega^\nabla = \nabla^2$ satisfait la relation suivante :

$$i\Omega^\nabla = \frac{eB}{\hbar},$$

où $\hbar := h/2\pi$ est la constante de planck réduite. Si un tel fibré existe, on dira que $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle, \nabla)$ est un fibré de préquantification pour (S, eB).

Ceci n'est pas possible si notre champ magnétique est quelconque, puisque l'on sait que la courbure de Chern d'un fibré en droite verifie toujours une certaine condition d'intégralité. C'est en fait une condition suffisante. Plus précisement, on a le résultat suivant :

Théorème 2. *Il existe un fibré de préquantification pour (S, eB) si et seulement si*

$$\left[\frac{eB}{h}\right] \in i_*\left(H^2(S,\mathbb{Z})\right) \subset H^2(S,\mathbb{R})$$

où i_* est le morphisme induit en cohomologie par l'inclusion $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Lorsque cette condition est vérifiée, on dit que (S, eB) est quantifiable.
Dans la suite du texte, on se place donc dans le cas d'un système (S,eB) quantifiable et on considère une fois pour toute un fibré en droite hermitien avec connection $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle, \nabla) \to S$ tel que $i\Omega^\nabla = \frac{eB}{\hbar}$.

Définition 3. On note $\Gamma(S, L)$ l'espace des sections globales (lisses) de L.
On le muni du produit scalaire :

$$\forall s, \tau \in \Gamma(S,L) \ , \ (s,\tau)_L := \int_S \langle s, \tau\rangle \mathrm{d}vol_g$$

Enfin, on considère $L^2(S, L)$ le complété de $\Gamma(S, L)$ pour ce produit scalaire.
Cela définit un espace de Hilbert.

C'est sur cet espace de Hilbert que va agir notre opérateur de Schrödinger $\hat{H}$.
Comme $\hat{H}$ sera un opérateur différentiel, on va aussi devoir mettre une structure d'espace de Hilbert sur $\Gamma(S, T^*S \otimes L)$, l'espace des 1-formes a valeur dans L. En fait, comme la métrique riemannienne g induit une métrique naturelle sur T^*M, et avec celle sur L, elles induisent une métrique naturelle sur le fibré $T^*S \otimes L$. Ainsi, la construction précédente permet de donner un sens à $L^2(S, T^*S \otimes L)$.

Notre opérateur de Schrödinger sera un opérateur auto-adjoint sur $L^2(S, L)$ *non borné* , comme cela arrive souvent en mécanique quantique. Donc quand on dit que celui-ci agit sur $L^2(S, L)$, ce n'est pas tout a fait exact : notre opérateur va seulement agir sur un sous espace (dense) de L^2, que l'on appelle son domaine.
Illustrons ça sur un exemple :

Exemple 4. L'opérateur ∇ agit sur $L^2(S, L)$, avec domaine :

$$\mathrm{Dom}(\nabla) := \{s \in L^2(S,L), \nabla s \in L^2(S, T^*S \otimes L)\}$$

où on peut comprendre l'action de cet operateur differentiel sur n'importe quelle section L^2 au sens des distributions. Le domaine de la plupart des opérateurs differentiels que l'on va rencontrer seront définits similairement.

On peut donc voir notre connection de Chern comme un opérateur entre deux espaces de Hilbert. Son domaine étant dense, on peut définir son adjoint. C'est un opérateur (non borné) agissant sur $L^2(S, T^*S \otimes S)$ à valeur dans $L^2(S, L)$, satisfaisant :

$$\forall (s, \alpha) \in \mathrm{Dom}(\nabla) \times \mathrm{Dom}(\nabla^*), \ \langle \nabla s, \alpha\rangle_{T^*M \otimes L} = \langle s, \nabla^*\alpha\rangle_L$$

On peut de même définir l'adjoint d'autres opérateurs.
Si on décompose $\nabla = \partial^\nabla + \overline{\partial}^\nabla$ suivant son action sur les types, on a :

$$\partial^\nabla : \mathrm{Dom}(\partial^\nabla) \subset L^2(S,L) \to L^2(S, T^{*1,0}S \otimes L)$$

qui donne naissance a son adjoint :

$$\partial^{\nabla *} : \mathrm{Dom}(\partial^{\nabla *}) \subset L^2(S, T^{*1,0}S \otimes L) \to L^2(S, L)$$

et de même,

$$\overline{\partial}^{\nabla} : \mathrm{Dom}(\overline{\partial}^{\nabla}) \subset L^2(S, L) \to L^2(S, T^{*0,1}S \otimes L)$$

permet de définir :

$$\overline{\partial}^{\nabla *} : \mathrm{Dom}(\overline{\partial}^{\nabla *}) \subset L^2(S, T^{*0,1}S \otimes L) \to L^2(S, L)$$

Ce sont des opérateurs importants en théorie de Hodge. D'ailleurs puisque toute surface de Riemann est Kählerienne, celle-ci s'applique dans notre contexte.

Ces expressions abstraites peuvent être exprimées différemment : si on note $*$ l'étoile de Hodge sur (S, g), alors on a :

$$\partial^{\nabla *} = - * \overline{\partial}^{\nabla} * \quad ; \quad \overline{\partial}^{\nabla *} = - * \partial^{\nabla} * .$$

L'auteur considère l'étoile de Hodge de (S, g) agissant sur les formes a valeur dans L de la façon suivante : $*(\omega \otimes s) := (*\omega) \otimes s$, pour ω une forme et s une section de L. D'autres conventions existent pour définir une étoile de Hodge pour des formes a valeur dans un fibré.

Définition 5. L'opérateur de Schrödinger magnétique associé à notre problème est :

$$\hat{H} := \frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^*\nabla + \frac{R}{6}\right)$$

C'est un opérateur non borné agissant sur $L^2(S, L)$ et a valeurs dans lui même.

Dans le texte original de l'auteur, c'est un théorème, pour nous ce sera une définition. L'objectif est, a présent, d'étudier les propriétés spectrales de cet opérateur.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, expliquons pourquoi le spectre de cet opérateur nous intéresse tant. En mécanique quantique, on a dit que notre particule était représentée par sa fonction d'onde : ici on y pense comme un élément $\psi_0 \in L^2(S, L)$. Au cours du temps, cette fonction d'onde évolue. Son évolution est régie par l'équation de schrodinger :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

Ou $\psi(t)$ est la fonction d'onde de notre particule en fonction du temps, vérifiant $\psi(0) = \psi_0$. Il s'avère que l'on sait résoudre symboliquement cette équation. En fait, les opérateurs autoadjoints sont toujours diagonalisable (en un sens un peu plus abstrait que d'habitude), et cela nous permet d'être capable de définir l'exponentielle de $\hat{H}$. On peut donc directement résoudre notre équation en écrivant :

$$\psi(t) = e^{-it\hat{H}/\hbar}\psi_0.$$

Mais bon, avec une écriture pareille, on est bien avancé. Pour rendre celle-ci un peu plus concrète, il est nécessaire de savoir calculer plus explicitement notre exponentielle : cela passe par une diagonalisation effective de $\hat{H}$. Voilà pourquoi le spectre de celui-ci nous intéresse.

La première remarque a faire est que, notre courbure scalaire R ayant été supposée constante, l'étude spectrale de $\hat{H}$ est ramenée a l'étude spectrale du Laplacien de Bochner $\nabla^*\nabla$.

Théorème 6. *Le Laplacien est un opérateur autoadjoint positif. C'est un opérateur elliptique. En particulier son spectre vérifie* $\sigma(\nabla^*\nabla) \subset \mathbb{R}_+$.

Et à ce stade, nous pouvons utiliser les miraculeux théorèmes sur les opérateurs elliptiques défini sur une variété compacte. On a :

Théorème 7. *Il existe une base Hilbertienne* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $L^2(S, L)$*, avec* $s_n \in \Gamma(S, L)$*, et des réels positifs* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tels que* $\nabla^*\nabla s_n = \lambda_n s_n$*. Le spectre de* $\nabla^*\nabla$ *est alors* $\{\lambda_n\}_n$ *: en particulier il est discret.*

Notons, pour continuer notre petite discussion informelle sur la mécanique quantique, que nous observons ici exactement le phénomène de discrétisation des niveaux d'énergie en physique.

Pour commencer une résolution concrete du spectre, l'auteur commence par réécrire le Laplacien d'une autre façon en mettant en évidence le rôle des opérateurs ∂^∇ et $\overline{\partial}^\nabla$. On obtient d'abord :

Théorème 8.

$$\partial^{\nabla *}\partial^\nabla - \overline{\partial}^{\nabla *}\overline{\partial}^\nabla = i * \Omega^\nabla$$

Qui nous donne une formule reliant nos opérateurs et la courbure du fibré, puis :

Théorème 9.

$$\nabla^*\nabla = 2\overline{\partial}^{\nabla *}\overline{\partial}^\nabla + i * \Omega^\nabla = 2\overline{\partial}^{\nabla *}\overline{\partial}^\nabla + \frac{e\hat{B}}{\hbar}$$

$$\nabla^*\nabla = 2\partial^{\nabla *}\partial^\nabla - i * \Omega^\nabla = 2\partial^{\nabla *}\partial^\nabla - \frac{e\hat{B}}{\hbar}$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que les sections globales holomorphes et antiholomorphes de L vont nous fournir des candidats pour être des fonctions propres. En particulier, on voit déjà que si de telles sections existent on peut prédire la premiere valeur du spectre du laplacien : c'est $\left|\frac{e\hat{B}}{\hbar}\right|$.
L'auteur va pousser le raisonnement plus loin en mettant en evidence le fait que pleins d'autres fonctions propres du laplacien peuvent etre vues comme des sections holomorphes d'un certain fibré.

Mais alors, pourquoi cette approche est-elle intéréssante ?

Il s'avère que nous disposons d'un théorème assez puissant nous permettant de prédire s'il existe, ou non, des sections globales holomorphes de fibrés en droite. C'est le fameux théorème de Riemann-Roch.

3 Interlude : le théorème de Riemann-Roch

Pour comprendre le théorème de Riemann-Roch, il me semble pertinent de commencer par exposer sa version "diviseurs". On fera ensuite le lien avec sa formulation pour les fibrés en droite.

Définition 10. Un diviseur sur une surface de Riemann compacte S est une fonction $D : S \to \mathbb{Z}$ a support fini. On la note souvent comme une somme formelle sur les points de S comme ceci : $D = \sum_{p\in S} D(p)\ p$.

L'exemple fondamental de diviseur est ceux qui proviennent de sections méromorphes globales sur S. Pour $f \in \mathcal{M}(S)$ une fonction méromorphe, on note

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{p\in S} \mathrm{Ord}_p(f)\ p$$

où $\mathrm{Ord}_p(f)$ désigne l'ordre de f en p : k si f possède un zéro d'ordre k en p, et $-k$ si f possède un pôle d'ordre k en p. Ceci définit bien un diviseur sur S, par définition même de la méromorphie.

Notons que $\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(g)$, et que $\mathcal{D}(1) = 0$.

On regarde le plus souvent les diviseurs a équivalence près, sous la relation d'équivalence suivante :

$$D \sim D' \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{M}(S),\ D = D' + \mathcal{D}(f).$$

Cela définit bien une relation d'équivalence grâce a la propriété de morphisme évoquée au dessus. Un exemple important de diviseur est "le" *diviseur canonique* K_S. On le définit ainsi : soit $\omega \in \mathcal{M}^{1,0}(S)$ une (1,0)-forme méromorphe sur S (non nulle !). Alors

$$K_S := \sum_{p\in S} \mathrm{Ord}_p(\omega)\ p$$

où, si on écrit localement $\omega = fdz$ avec f méromorphe, $\mathrm{Ord}_p(\omega) := \mathrm{Ord}_p(f)$. On parle "du" diviseur canonique sur S car, si ω et η sont deux telles formes, elles ne diffèrent toujours que d'un facteur multiplicatif méromorphe global, et donc les diviseurs ainsi définits sont équivalents.

Définition 11. Soit D un diviseur sur S. Le faisceau $\mathcal{O}_D$ associé a ce diviseur est :

$$\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}(U) \mid f = 0 \text{ ou } \mathcal{D}(f) + D_{|U} \geq 0 \text{ sur } U\}$$

On peut visualiser ce faisceau ainsi : pour un ouvert U assez petit, il existe une fonction meromorphe $g \in \mathcal{M}(U)$ telle que $\mathcal{D}(g) = D_{|U}$. La condition devient alors $\mathcal{D}(fg) \geq 0$. Ce qui signifie que, en multipliant par f, on a tué toutes les singularités de g. En un sens, ce faisceau est le faisceau des fonctions qui "annulent" les singularités encodées dans D.
On peut montrer que si deux diviseurs sont équivalents, leurs faisceaux associés sont isomorphes.

L'objectif du théorème de Riemann-Roch est d'obtenir des informations sur l'existence ou non de sections globales non nulles de ce faisceau. En introduisant la notion de degré, on peut déjà régler le cas de quelques diviseurs.

Définition 12. On appelle degré d'un diviseur la quantité

$$\deg(D) := \sum_p D(p)$$

Une propriété importante du degré est que, si $f \in \mathcal{M}(S)$, alors $\deg(\mathcal{D}(f)) = 0$. Ainsi, le degré passe a la relation d'équivalence.

On peut donc déjà mettre en évidence une conséquence importante de ce fait :

Théorème 13. *Soit D un diviseur sur S. Si $deg(D) < 0$, alors $\mathcal{O}_D(S) = 0$.*

On peut reformuler ça en terme cohomologique : $H^0(S, \mathcal{O}_D) = 0$.

A présent, on a tout le formalise nécessaire pour citer une version du théorème de Riemann-Roch. Le voici :

Théorème 14. *Soit S une surface de Riemann compacte connexe de genre g. Soit D un diviseur de S et soit K son diviseur canonique. Alors :*

$$\dim H^0(S, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(S, \mathcal{O}_{K-D}) = \deg(D) + 1 - g.$$

Celui-ci a plusieurs consequences immédiates intéréssantes. Déjà, il permet de calculer le degré du diviseur canonique, en testant la formule en $D = 0$ puis en $D = K$. On obtient : $\deg(K) = 2g-2$. Ensuite, on voit que si $\deg(D) > \deg(K)$, alors le terme en $\mathcal{O}_{K-D}$ s'annule, et on a une formule directe pour calculer $\dim H^0(S, \mathcal{O}_D)$ juste en connaissant le degré de D.
Un lien pour une preuve complète de ce théorème est donné en fin de rapport.

Il reste a expliquer comment ce théorème se reformule pour des fibrés en droite. En fait, tout diviseur sur S (a équivalence près) est associé a un unique fibré en droite L sur S.

La construction est la suivante. On se donne D un diviseur sur S. Il existe un recouvrement (U_i) de S tel que, pour tout i, il existe $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$ tel que $\mathcal{D}(f_i) = D_{|U_i}$. Par construction, on voit alors que $g_{ij} := \frac{f_j}{f_i} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ vérifient la relation de cocyle, et donc définissent un fibré en droite L_D sur S.

Réciproquement, étant donné un fibré en droite L sur S, et étant donné une section méromorphe globale s de L, on peut considérer le diviseur $\mathcal{D}(s)$ sur S. Remarquons que celui-ci n'est pas, en général, dans la classe d'équivalence du diviseur trivial, puisque on considère ici une section méromorphe de L, et pas simplement une fonction méromorphe sur S.

On peut alors voir qu'a travers cette correspondance, le faisceau $\mathcal{O}_D$ s'identifie au faisceau des sections *holomorphes* de L. On aboutit a la reformulation suivante du théorème de Riemann-Roch, qui est celle utilisée dans le texte :

Théorème 15. *Soit S une surface de Riemann compacte connexe. Soit L un fibré en droite sur S. Soit $K_S := T^{*(1,0)}S$ le fibré canonique de S. On a :*

$$\dim H^0(S, L) - \dim H^0(S, K_S \otimes L^*) = \deg(L) + 1 - g.$$

Où on a noté $\deg(L) = \deg(\mathcal{D}(s))$ pour s n'importe qu'elle section globale meromorphe de L. Rappelons que l'on peut aussi le calculer d'une façon bien plus géométrique : le degré s'identifie a la première classe de Chern de notre fibré. Plus précisement :

$$\deg(L) = \int_S \frac{i\Omega^\nabla}{2\pi}$$

pour n'importe quelle connection ∇ mise sur L.

En particulier, on peut calculer explicitement le degré des fibrés de préquantification considérés dans le texte : on a

$$\deg(L) = \frac{e\hat{B}}{\hbar}\mathrm{Aire}(S).$$

Avec le degré exprimé sous cette forme intégrale, on peut voir en le théorème de Riemann-Roch une sorte de généralisation de la formule de Gauss-Bonnet.

4 Le coeur du texte : une chaîne elliptique

Reprenons là où nous nous étions arrêté et observons comment le théorème de Riemann-Roch éclaire notre situation. On a vu que

$$\nabla^*\nabla = 2\overline{\partial}^{\nabla *}\overline{\partial}^{\nabla} + \frac{e\hat{B}}{\hbar} = 2\partial^{\nabla *}\partial^{\nabla} - \frac{e\hat{B}}{\hbar}.$$

La première valeur propre du Laplacien, λ_1 , sera donc $\pm\frac{e\hat{B}}{\hbar}$, dès lors qu'il existe des sections globales holomorphes ou antiholomorphes de L. Mais remarquons qu'une section antiholomorhpe de L n'est rien d'autre qu'une section holomorphe de $\overline{L} \simeq L^* = L^{-1}$ (un isomorphisme explicite est donné par la métrique mise sur L).

Donc il suffit d'avoir $H^0(S, L)$ ou $H^0(S, L^*)$ non nul pour connaître λ_1. Si on suppose que $\deg(L) > \deg(K)$, alors on voit que $\deg(K \otimes L^*) = \deg K - \deg L < 0$. Ainsi, le theoreme de Riemann-Roch nous dit que

$$\dim H^0(S, L) = \deg(L) + 1 - g.$$

Ce qui nous assure, dans ce cas, que $\lambda_1 = \frac{e\hat{B}}{\hbar}$, et que sa multiplicité est $m(\lambda_1) = \deg(L) + 1 - g$.

De même, si on suppose $\deg(L^*) > \deg(K)$, alors on obtient $\lambda_1 = -\frac{e\hat{B}}{\hbar}$ (> 0), avec multiplicité $m(\lambda_1) = \deg(L^*) + 1 - g$.

A présent, l'objectif est de continuer de chercher les fonctions propres de notre Laplacien comme des sections holomorphes de certains fibrés.

Définition 16. On appelle $C^\bullet(L) := \{K_S^q \otimes L\}_{q\in\mathbb{Z}}$ la chaîne de fibrés associée à $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle, \nabla)$.

Notre surface de riemann (S, g) admet une métrique hermitienne naturelle, induite par g. Cette métrique hermitienne induit une métrique hermitienne sur K_S. Puisque (S, g) est Kahler, la connection de Levi-Civita induit une connection sur le fibré K_S qui va respecter la métrique hermitienne sur celui-ci. En d'autres termes, il existe une structure naturelle de fibré hermitien avec connection pour K_S.

Cette structure, avec celle de L, induisent une structure naturelle de fibré hermitien avec connection pour notre chaine elliptique : on la note

$$(K_S^q \otimes L\ ,\ \langle\cdot,\cdot\rangle_{C^q(L)}\ ,\ \nabla^q).$$

Nos opérateurs de connection ∇^q se décomposent alors en fonction de leur actions en terme de types. Ils definissent des opérateurs :

$$\partial^{\nabla^q} : \Omega^0(K_S^q \otimes L) \longrightarrow \Omega^{1,0}(K_S^q \otimes L)$$

$$\overline{\partial}^{\nabla^q} : \Omega^0(K_S^q \otimes L) \longrightarrow \Omega^{0,1}(K_S^q \otimes L)$$

Que l'on va s'empresser d'identifier comme des opérateurs qui nous font transiter sur notre chaîne elliptique. Pour commencer, on a un isomorphisme $\Omega^{1,0}(K_S^q \otimes L) \simeq \Omega^0(K_S^{q+1} \otimes L)$, ce qui traite le cas du premier. Pour le second, on a $\Omega^{0,1}(K_S^q \otimes L) \simeq \Omega^0(T^{*(0,1)}S \otimes K_S^q \otimes L) \simeq \Omega^0(K_S^{q-1} \otimes L)$, puisque $T^{*(0,1)}S = \overline{K_S} \simeq K_S^{-1}$. On a donc une famille d'opérateurs :

$$\partial^{\nabla^q} : \Gamma(S, C^q(L)) \longrightarrow \Gamma(S, C^{q+1}(L))$$

$$\overline{\partial}^{\nabla^q} : \Gamma(S, C^q(L)) \longrightarrow \Gamma(S, C^{q-1}(L))$$

Ceux-ci induisent des opérateurs adjoints $\partial^{\nabla^q *}$ et $\overline{\partial}^{\nabla^q *}$. L'auteur affirme qu'un rapide calcul permet de se convaincre que $\partial^{\nabla^q *} = -\partial^{\nabla^{q+1}}$, et que $\overline{\partial}^{\nabla^q *} = -\partial^{\nabla^{q-1}}$.

Définition 17. On appelle $(C^\bullet(L), \partial^{\nabla^\bullet}, \overline{\partial}^{\nabla^\bullet})$ la chaîne elliptique associée à $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle, \nabla)$. Sur celle-ci, on définit les Laplaciens associés :

$$\Delta^q := \partial^{\nabla^q *}\partial^{\nabla^q} = -\overline{\partial}^{\nabla^{q+1}}\partial^{\nabla^q}$$
$$\Delta_q := \overline{\partial}^{\nabla^q *}\overline{\partial}^{\nabla^q} = -\partial^{\nabla^{q-1}}\overline{\partial}^{\nabla^q}$$

En particulier, on note que $\nabla^*\nabla = \Delta^0 + \Delta_0 = 2\Delta_0 + \frac{e\hat{B}}{\hbar} = 2\Delta_0 - \frac{e\hat{B}}{\hbar}$.

Théorème 18. *Les laplaciens de notre chaîne elliptique satisfont la relation :*

$$\Delta^q - \Delta_q = -qK + \frac{e\hat{B}}{\hbar}$$

Où K est la courbure de Gauss de (S, g).

On peut voir cette identité comme un cas particulier du théorème 8. On a en effet

$$\partial^{\nabla^q *}\partial^{\nabla^q} - \overline{\partial}^{\nabla^q *}\overline{\partial}^{\nabla^q} = i * \Omega^{\nabla^q}$$

Et le terme de courbure de $K_S^q \otimes L$ s'identifie à $-qK + \frac{e\hat{B}}{\hbar}$.

Ce théorème nous permet de parvenir rapidement aux relations suivantes :

Théorème 19.

$$\Delta_{-q}\partial^{\nabla^{-(q+1)}} - \partial^{\nabla^{-(q+1)}}\Delta_{-(q+1)} = \left((q+1)K + \frac{e\hat{B}}{\hbar}\right)\partial^{\nabla^{-(q+1)}}$$

$$\Delta^q\overline{\partial}^{\nabla^{q+1}} - \overline{\partial}^{\nabla^{q+1}}\Delta^{q+1} = \left((q+1)K - \frac{e\hat{B}}{\hbar}\right)\overline{\partial}^{\nabla^{-(q+1)}}$$

Grâce a celles-ci, nous allons pouvoir transporter des informations le long de notre chaîne elliptique. A partir d'ici, l'idée est simple : en fonction du signe du degré de L, le théorème de Riemann-Roch nous permet d'assurer l'existence de sections globales holomorphes de $K_S^q \otimes L$ pour $q > 0$ ou $q < 0$. On va ensuite transporter ces sections dans L.

Grâce a cette méthode, l'auteur obtient le théorème phare du papier.

Théorème 20. *Supposons que* $|\deg(L)| > |\deg(K_S)|$.

- *Si* $g = 0$*, alors*

$$\sigma(\hat{H}) = \left\{ \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(|\deg(L)|(q + \frac{1}{2}) + q(q+1) + \frac{1}{3} \right) \ , \ q \in \mathbb{N} \right\}$$

- *Si* $g = 1$*, alors*

$$\sigma(\hat{H}) = \left\{ \hbar\omega(q + \frac{1}{2}) \ , \ q \in \mathbb{N} \right\} \quad , \text{ avec } \omega := \frac{e\hat{B}}{\hbar}$$

- *Si* $g \geq 2$*, alors*

$$\sigma(\hat{H}) \supset \left\{ \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(|k(L)|(2q+1) - q(q+1) + \frac{1}{3} \right) \ , \ q \in \mathbb{N} \ , q < |k(L)| - 1 \right\} \quad , \text{ avec } k(L) := \frac{e\hat{B}}{\hbar |K|}$$

Dans les trois cas, l'espaces des fonctions propres associées a la q-ieme valeur propre s'identifie à $H^0(S, K_S^{-q} \otimes L)$ *si* $\deg(L) > 0$*, et à* $H^0(S, K_S^{q} \otimes L)$ *sinon.*

5 Le calcul explicite du spectre pour $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$

A titre d'illustration, nous allons mener les calculs explicites pour le cas où $g = 0$. Puisque nous avons supposé que la courbure de (S, g) est constante, celui-ci s'identifie a $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \simeq \mathbb{S}^2$ munie d'une métrique lui conférant un certain rayon $r > 0$. On a alors $K = 1/r^2$, $R = 2/r^2$, et $\deg(L) = \frac{2e\hat{B}}{r^2}$.

L'opérateur de Schrödinger devient donc :

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla^*\nabla + \frac{1}{3r^2} \right)$$

On suppose que $\deg(L) > 0$. Pour la sphère, le fibré canonique a un degré $\deg(K_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}) = -2$. Ainsi, pour tout $q \geq 0$, $\deg\left(K_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}^{q+1} \otimes L^*\right) = -2(q+1) - \deg(L) < 0$, et donc Riemann-Roch nous donne :

$$\dim H^0(\mathbb{P}^1\mathbb{C}, K_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}^{-q} \otimes L) = \deg(K_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}^{-q} \otimes L) + 1 - g = \deg(L) + 1 + 2q > 0.$$

On se donne alors $0 \neq s^{-q} \in H^0(\mathbb{P}^1\mathbb{C}, K_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}^{-q} \otimes L)$, et on pose $s_q := \partial^{\nabla^{-1}} \dots \partial^{\nabla^{-q}} s^{-q} \in \Gamma(S, L)$.
On voit alors que $s_q \neq 0$. En effet, dans le cas contraire, cela impliquerait l'existence d'une section globale antiholomorphe pour l'un des $K_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}^{-i} \otimes L$ avec $1 \leq i \leq q$, mais c'est interdit par Riemann-Roch.

Et on voit que :

$$\nabla^*\nabla s_q = 2\Delta_0 s_q + \frac{e\hat{B}}{\hbar} s_q$$

Avec

$$\begin{aligned}
\Delta_0 s_q &= \Delta_0 \partial^{\nabla^{-1}} \dots \partial^{\nabla^{-q}} s^{-q} \\
&= \partial^{\nabla^{-1}} \Delta_{-1} \dots \partial^{\nabla^{-q}} s^{-q} + \left(K + \frac{e\hat{B}}{\hbar} \right) s_q \\
&= \partial^{\nabla^{-1}} \dots \partial^{\nabla^{-q}} \Delta_{-q} s^{-q} + \left(\frac{q(q+1)}{2} K + q \frac{e\hat{B}}{\hbar} \right) s_q \\
&= \left(\frac{q(q+1)}{2} K + q \frac{e\hat{B}}{\hbar} \right) s_q
\end{aligned}$$

puisque s_q est une section holomorphe de $K_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}^{-q} \otimes L$. Ainsi, on obtient :

$$\hat{H}s_q = \frac{\hbar^2}{2m}\left(2\left(\frac{q(q+1)}{2}K + q\frac{e\hat{B}}{\hbar}\right) + \frac{e\hat{B}}{\hbar} + \frac{1}{3r^2}\right)s_q = \frac{\hbar^2}{2mr^2}\left(|\deg(L)|(q+\frac{1}{2}) + q(q+1) + \frac{1}{3}\right)s_q = E_q s_q$$

Comme annoncé. On a donc prouvé que, si $\deg(L) > 0$, $E_q \in \sigma(\hat{H})$. De plus, le processus pouvant être retourné, on a identifié toutes les fonctions propres associées a E_q : elles s'identifient à $H^0(\mathbb{P}^1\mathbb{C}, K_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}^{-q} \otimes L)$. En particulier, on connaît leur multiplicité : c'est $1 + 2q + \deg(L)$.

Dans le cas ou $\deg(L) < 0$, le théorème de Riemann-Roch nous dis cette fois-ci que

$$\dim H^0(\mathbb{P}^1\mathbb{C}, K_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}^{q} \otimes L^*) \neq 0.$$

Une section holomorphe de ce fibré s'identifie a une section antiholomorphe $s^q \in \Gamma(K_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}^{q} \otimes L)$. En posant $s_q := \overline{\partial}^{\nabla^1} \dots \overline{\partial}^{\nabla^q} s^q \neq 0$, on obtient encore $\hat{H}s_q = E_q s_q$.

6 Références

Pour les discutions sur la mécanique quantique, je me suis appuyé sur *Quantum Theory for Mathematicians*, de Brian C. Hall.

Pour le théorème de Riemann-Roch, une preuve complète peut être trouvée dans ce mémoire de M2 écrit par Benoit Charbonneau :
https://www.math.uwaterloo.ca/ bcharbon/Textes/MemoireBenoitCharbonneau.pdf

Enfin, je me suis appuyé sur le texte original de Carlos Tejero Prieto : *Holomorphic spectral geometry of magnetic Schrödinger operators on Riemann surfaces.*