Atelier de Recherche Encadrée :
Construction d'un raisonnement mathématique à l'aide du logiciel D∀∃DUCTION

Table des matières

1 Introduction à la preuve assistée par ordinateur **3**

2 Images directes et réciproques : preuves et contre-exemples **5**

3 Rédiger une preuve **9**

4 Raisonner sur les limites, I **14**

5 Limite I : analyse de rédactions **16**

6 Injectivité, surjectivité **17**

7 Auto-évaluation **21**

8 Négations **23**

9 Raisonner sur les limites, II **27**

A Démonstration et utilisation des propriétés **31**

A.1 L'implication $\Rightarrow$ 31

A.2 Le quantificateur universel $\forall$ 32

A.3 Rédaction efficace 33

A.4 Le quantificateur existentiel $\exists$ 34

A.5 Variables d'une démonstration 35

B Des corrigés **39**

B.1 Utilisation d'une propriété de limite 39

C Thèmes de recherche biblio **42**

D Objectifs **43**

D.1 Compétences de rédaction à acquérir 43

D.2 Compétences de théorie des ensembles 43

D.3 Compétences d'analyse 43

E Fiches définitions **44**
E.1 Inclusion . . . 44
E.2 Intersection . . . 44
E.3 Union . . . 44
E.4 Image réciproque . . . 44
E.5 Image directe . . . 45
E.6 Injectivité . . . 45
E.7 Surjectivité . . . 45

Objectifs de l'atelier *Le but de cet atelier est d'apprendre à construire une démonstration, et à la rédiger. Pour atteindre cet objectif, nous utilisons le logiciel* D∀∃DUCTION *(développé à Sorbonne Université).* ***Ce logiciel est un moyen, pas un but :*** *le but est surtout d'apprendre à s'en passer !*

Pour apprendre à faire des démonstrations, il faut choisir des thèmes mathématiques : nous allons travailler d'une part sur les notions fondamentales de **théorie des ensembles** (images directes et images réciproques, injectivité, surjectivité) ; d'autre part sur les notions **de continuité et de limite**. Mais les principes que nous allons apprendre sont valables dans tous les domaines des maths. Ils vous serviront dès cette année (en 1M003) et tout au long de la licence, mais surtout en L3, où une bonne partie du travail des étudiants consiste à écrire des démonstrations. Ils vous serviront aussi à comprendre la structure des démonstrations de toutes les propriétés de cours.

1 Introduction à la preuve assistée par ordinateur

Objectifs de la séance *Cette première séance a pour but de vous familiariser avec le logiciel* D∀∃DUCTION. *La notion la plus importante est celle de* ***contexte*** *: il s'agit des objets et de leurs propriétés (ou hypothèses), disponibles à un moment donné du raisonnement. Le contexte et le* ***but*** *(la propriété que l'on veut démontrer) évoluent à mesure qu'on avance dans la preuve. Au passage, vous apprendrez comment démontrer ou utiliser une propriété du type* $\forall x, P(x)$.

Exercice 1.—

1. Lancer le logiciel D∀∃DUCTION (on le trouve dans la page des applications, icones avec les petits carrés en bas à gauche). Choisir le fichier intitulé **Tutoriel**.

2. Compléter le dessin sur l'union et l'intersection ci-dessous, ainsi que les définitions.

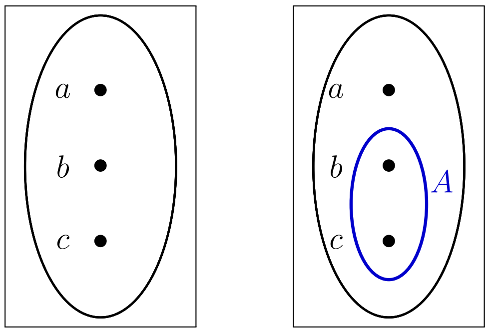
3. Faire les exercices, en utilisant l'aide du logiciel à chaque fois que vous en avez besoin.

4. Le dernier exercice est un bilan, qui vous permet de voir si vous avez compris le fonctionnement du logiciel (et un peu de maths !).

5. Remplir la fiche d'auto-évaluation (page suivante) et la rendre à l'enseignant.

Appartenance, inclusion

À gauche, un ensemble X avec 3 élément nommés a, b, c. À droite, la partie A de X contient les éléments b et c ; on écrit On écrit $a \in X$, $X = \{a, b, c\}$, $A = \{b, c\}$ et $A \subset X$.



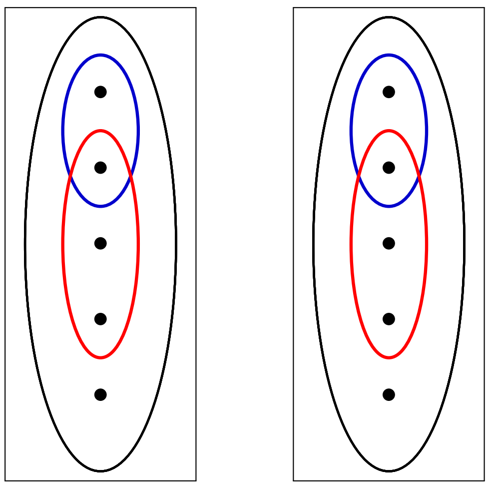
Union, intersection

A gauche, entourer la réunion du sous-ensemble bleu et du sous-ensemble rouge. A droite, entourer leur intersection.

Complétez les définitions :

•$x \in A \cap B \iff \dots$

•$x \in A \cup B \iff \dots$



Bilan 1

Répondez aux questions le plus précisément possible !

1. J'ai globalement compris comment fonctionne le logiciel.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

2. Pour *démontrer* une propriété de la forme $\forall x, P(x)$, présente dans la zone de but, j'utilise le bouton ...

   En réponse, le logiciel
   (1) Modifie le contexte de la façon suivante : ...

   (2) Modifie le but, qui devient : ...

3. Pour *utiliser* une propriété de la forme $\forall x, P(x)$, présente dans le contexte, j'appuie sur le bouton $\forall$ après avoir ...

   En réponse, le contexte est modifié de la façon suivante : ...

4. Pour *démontrer* une propriété de la forme P **ou** Q, on utilise le bouton OU ($\vee$). En réponse, le logiciel nous propose ...

5. Pour *utiliser* une propriété de la forme P **ou** Q, on utilise le bouton OU ($\vee$). On a alors deux nouvelles tâches à effectuer : ...

   Ce type de démonstration est appelée ...

6. Je connais les définitions de l'inclusion, de l'intersection et de l'union.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

2 Images directes et réciproques : preuves et contre-exemples

Objectifs *A ce stade, vous avez appris à utiliser le logiciel, et notamment à démontrer et utiliser une propriété universelle ($\forall x \in X, P(x)$), une disjonction (P OU Q), une implication ($P \Rightarrow Q$).*
Cette deuxième séance a plusieurs objectifs :
• Apprendre à démontrer et utiliser une propriété existentielle, $\exists x \in X, P(x)$.
• Comprendre les définitions d'image directe et réciproque en théorie des ensembles.
• Apprendre à démontrer qu'une propriété universelle est fausse, en construisant un contre-exemple.

1 Définitions

Soit $f : X \to Y$ une application, et A une partie de X. **L'image directe de A par f**, notée $f(A)$, est la partie de Y constituée des images par f des éléments de A :

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Autrement dit, on a l'équivalence logique

$$\boxed{y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)}$$

Soit maintenant B une partie de Y. **L'image réciproque de B par f**, notée $f^{\langle -1 \rangle}(B)$, est la partie de X constituée des éléments dont l'image par f est dans B :

$$f^{\langle -1 \rangle}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Autrement dit, on a l'équivalence logique

$$\boxed{x \in f^{\langle -1 \rangle}(B) \iff f(x) \in B}$$

On dit aussi **image** au lieu d'image directe, et **pré-image** au lieu d'image réciproque. [1]

Dans D∀∃DUCTION, les définitions **image directe** et **images réciproques** permettent de réécrire des propriétés en passant de gauche à droite ou de droite à gauche dans les deux équivalences encadrées ci-dessus.

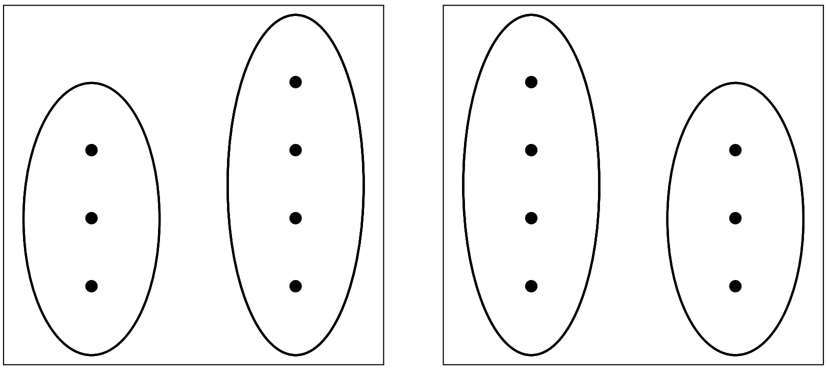
Exercice 2.— Complétez les dessins des pages suivantes.

---

1. On utilise habituellement la notation $f^{-1}(B)$ au lieu $f^{\langle -1 \rangle}(B)$. Ce qui est important, c'est de bien comprendre qu'il y a **deux concepts distincts** :
• d'une part, si $f : X \to Y$ est une **bijection**, elle admet une bijection réciproque qu'on note $f^{-1} : Y \to X$;
• d'autre part, pour n'importe quelle application $f : X \to Y$ **(bijective ou non)** et $B \subset Y$, on peut définir $f^{\langle -1 \rangle}(B)$.

La notation $f^{\langle -1 \rangle}(B)$ utilisée ici sert à éviter la confusion. Libre à vous de choisir l'une ou l'autre des deux notations.

Applications Ajouter des flèches pour représenter deux applications quelconques.



Composition Ajoutez les flèches pour que l'application obtenue soit la composée de f et de g.

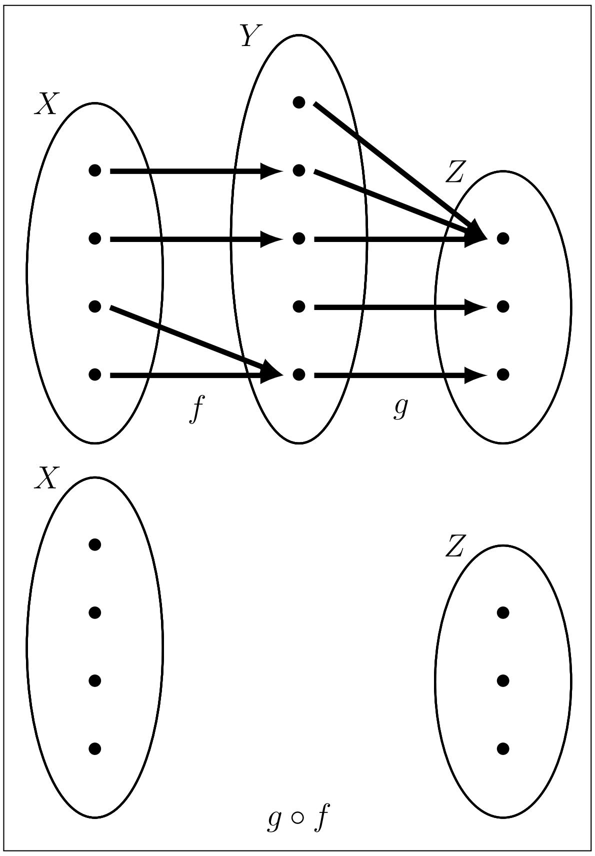
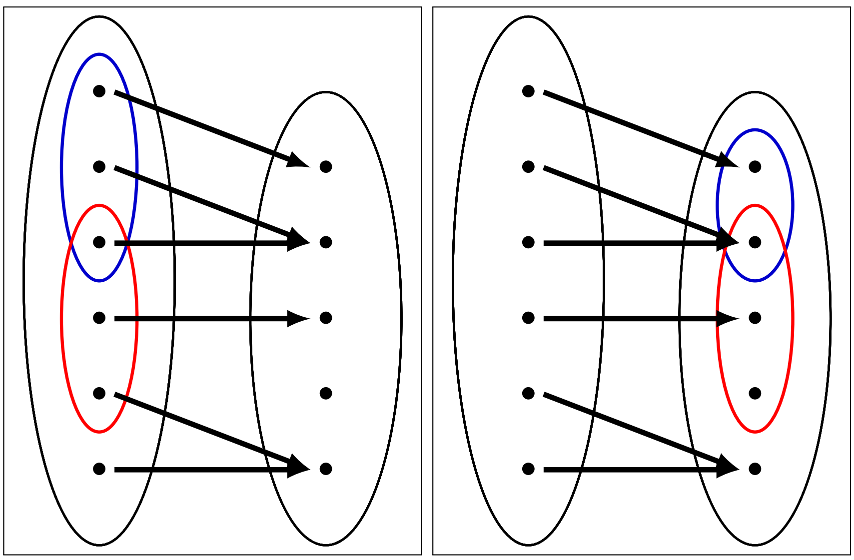


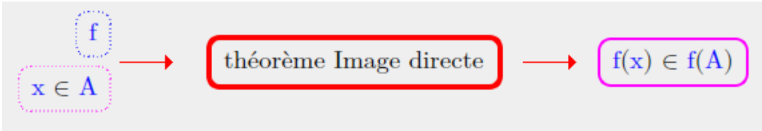
Image directe (à gauche) Représenter l'image directe du sous-ensemble bleu et celle du sous-ensemble rouge.

Image réciproque (à droite) Représenter l'image réciproque du sous-ensemble bleu et celle du sous-ensemble rouge.



2 Exercices

La définition de l'image directe dit en particulier que si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$. Dans le logiciel, on peut faire cette déduction au moyen de l'énoncé "théorème image directe", en sélectionnant dans le contexte l'application f et la propriété $x \in A$ avant de cliquer sur l'énoncé.



Exercice 3.— Cet exercices, comme les suivants, se trouve dans le fichier **Ensembles et Applications**.

1. Démontrez l'énoncé sur l'image directe (dans Définitions/Applications).

2. Utilisez D∀∃DUCTION pour démontrer que si f est une application de X dans Y, et si A et A' sont deux parties de X telles que $A \subset A'$, alors $f(A) \subset f(A')$. Essayez les deux démarches : (1) en utilisant le "théorème image directe", (2) sans l'utiliser, en déroulant la définition d'image directe dans le but.

3. Démontrer de même la propriété suivante : si B et B' sont deux parties de Y, et si $B \subset B'$, alors $f^{\langle -1 \rangle}(B) \subset f^{\langle -1 \rangle}(B')$.

Soient $f : X \to Y$, A une partie de X, B une partie de Y. On s'intéresse aux questions questions suivantes :

$$\boxed{\textit{A-t-on toujours } A = f^{\langle -1 \rangle}(f(A))\ ?\ \textit{A-t-on toujours } B = f(f^{\langle -1 \rangle}(B))\ ?}$$

Exercice 4.—

1. Utilisez D∀∃DUCTION pour essayer de démontrer les quatre inclusions.

Concernant l'égalité $A = f^{\langle -1 \rangle}(f(A))$, vous avez probablement réussi à démontrer une inclusion, mais pas l'autre. Peut-être n'est-elle pas toujours vraie ?

2. Avec le logiciel, avancez le plus possible dans la démonstration de l'inclusion, jusqu'à l'endroit où vous êtes bloqué·e. Vous devez notamment avoir dans le contexte deux éléments dont l'un est dans A, et le but est de montrer que l'autre est également dans A. Essayez alors d'utiliser la représentation "en patates" pour dessiner un contre-exemple, c'est-à-dire une situation où on a toutes les propriétés du contexte, mais pas le but. *Votre contre-exemple est une preuve que la propriété est fausse !*

3. Mêmes questions avec l'égalité $B = f(f^{\langle -1 \rangle}(B))$.

Exercice 5.—(Optionnel)

Utilisez D∀∃DUCTION pour démontrer les formules (très naturelles) :

$$(g \circ f)^{\langle -1 \rangle}(B) = g^{\langle -1 \rangle}(f^{\langle -1 \rangle}(B)), \quad (g \circ f)(A) = g(f(A)).$$

Bilan 2

1. Etant donné un diagramme avec deux patates et des flèches entre les deux, je sais reconnaitre si le diagramme définit une application ou pas.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

2. Pour *démontrer* une propriété existentielle $\exists x \in X, P(x)$, on doit **fournir un témoin**, c'est-à-dire ...

   Après avoir désigné le témoin, la fin de la preuve consiste à démontrer ...

3. Pour *utiliser* une propriété existentielle $\exists x \in X, P(x)$ présente dans le contexte, avec le logiciel, il n'y a rien à faire ! D∀∃DUCTION ...

4. J'ai compris les définitions d'image directe et d'image réciproque d'un ensemble par une application.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

5. J'ai pu montrer avec D∀∃DUCTION une inclusion entre A et $f^{\langle -1 \rangle}(f(A))$, et une inclusion entre B et $f(f^{\langle -1 \rangle}(B))$.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

6. J'ai pu construire au moins un contre-exemple avec des patates.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

7. Ces exercices m'ont amusé·e !
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

Commentaires libres sur cette séance : ...

3 Rédiger une preuve

Objectifs *Vous savez maintenant utiliser (presque) tous les boutons du logiciel... Passez du niveau "débutant" au niveau "intermédiaire" en modifiant les paramètres. La principale nouveauté est que ceci vous donne* ***accès à des raccourcis*** *: par exemple, lorsque le but est $A \subset B$, vous pouvez directement cliquer sur le bouton $\forall$ pour introduire un élément de A dans le contexte, sans avoir à dérouler la définition de l'inclusion. On dit qu'on a utilisé la définition implicitement. Cette fonctionnalité marche également pour l'union (utilisable directement avec le bouton OU), l'intersection (avec le bouton ET), l'égalité de deux ensemble par double inclusion (avec le bouton ET). Un autre changement est que vous n'avez plus besoin de sélectionner le but avant de cliquer sur un bouton comme $\forall$. Essayez !*

L'objectif de cette séance est de commencer à apprendre à rédiger une démonstration sur feuille (avec l'aide du logiciel, pour le moment !). Vous allez apprendre notamment à
• Rédiger la démonstration d'une propriété universelle ($\forall$), d'une implication ($\Rightarrow$), d'une preuve par cas.
• Raisonner par équivalence (ce qui est utile pour des propriétés très simples).

En même, temps, on continue à travailler les notions d'image directe et réciproque en théorie des ensembles.

Exercice 6.—

1. Démontrer les propriétés suivantes, avec l'aide du logiciel (*image et inclusion*) :

$$(1)\forall f : X \to Y,\ \forall A \subset X,\ \forall B \subset X, (\ A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)\ )$$

$$(2)\forall f : X \to Y,\ \forall A \subset Y,\ \forall B \subset Y,\ (\ A \subset B \Rightarrow f^{\langle -1\rangle}(A) \subset f^{\langle -1\rangle}(B)\ ).$$

2. On voudrait rédiger les démonstrations de ces propriétés, en s'aidant des aperçus de preuve (figures 1 et 2). La première démonstration est rédigée en exemple page suivante. En vous inspirant de cet exemple, rédigez la seconde. *Comme dans l'exemple, on entourera chaque variable globale lors de sa première apparition, et on encadrera tous les rappels du but.*

Exercice 7.— On veut démontrer la formule

$$f^{\langle -1\rangle}(B \cup B') = f^{\langle -1\rangle}(B) \cup f^{\langle -1\rangle}(B').$$

1. Utilisez D∀∃DUCTION pour la démontrer (ne pas hésiter à sauter les étapes répétitives).

2. Rédigez la démonstration, en vous inspirant de l'exercice précédent.

3. Utilisez D∀∃DUCTION pour la démontrer en raisonnant par équivalence. *Aide : travailler seulement sur le but, utiliser la définition d'égalité de deux ensembles.*

4. Rédigez la démonstration par équivalence, en explicitant bien la définition utilisée à chaque étape. *Aide : lorsqu'on a la propriété $x \in f^{\langle -1\rangle}(B) \cup f^{\langle -1\rangle}(B')$, utilise-t-on d'abord la définition d'image inverse ou bien d'abord la définition d'union ? Et pour $x \in f^{\langle -1\rangle}(B \cup B')$?*

Exercice 8.—(optionnel)

1. Montrer que les affirmations suivantes sont fausses :

$$\forall f : X \to Y, \forall A \subset X, \forall A' \subset X, \quad (f(A) \subset f(A') \Longrightarrow A \subset A').$$

$$\forall f : X \to Y, \forall B \subset Y, \forall B' \subset Y, \quad (f^{\langle -1 \rangle}(B) \subset f^{\langle -1 \rangle}(B') \Longrightarrow B \subset B').$$

On pourra s'inspirer de la séance précédente.

2. Rédigez les contre-exemples obtenus, en décrivant votre dessin (vous pouvez donner des noms aux éléments importants).

Exemple. Voici deux façons de rédiger la première preuve de l'exercice 6, correspondant à l'aperçu global de la Figure 1.

Démonstration. Soit $\boxed{f} : X \to Y$, et $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$ deux parties de X. Supposons que A est inclue dans B et montrons que $\boxed{f(A) \text{ est inclus dans } f(B).}$ Pour ceci, on considère un élément $\boxed{y}$ de $f(A)$, et on veut montrer que $\boxed{y \text{ est dans } f(B)}$: par définition de l'image directe, ceci revient à montrer $\boxed{\text{l'existence d'un élément } x \text{ de } B \text{ tel que } f(x) = y}$.

Phase d'introduction des objets.

Dans ce rappel du but, le x est une variable liée : si on cherche un x, c'est qu'on ne l'a pas encore trouvé !

Puisque $y \in f(A)$, la définition de l'image directe nous fournit un élément $\boxed{x}$ de A tel que $f(x) = y$. Puisque x est dans A et $A \subset B$, x est aussi dans B. Donc l'élément x convient. □

Démonstration, version courte. Soient $\boxed{f} : X \to Y$, $\boxed{A} \subset X$, $\boxed{B} \subset X$, supposons que $A \subset B$ et montrons que $\boxed{f(A) \subset f(B)}$.
Soit $\boxed{y} \in f(A)$: par définition de $f(A)$ on peut choisir $\boxed{x} \in A$ tel que $f(x) = y$. Or $A \subset B$, donc $x \in B$. On en déduit $f(x) \in f(B)$, c'est-à-dire $y \in B$, ce qu'on voulait. □

Dans cette version courte, on a supprimé presque tous les rappels du but. Par contre, on doit garder toutes les introductions de variables !

Bilan 3

1. Je dois montrer une inclusion $A \subset B$, la preuve rédigée commence par ...

2. Je dois montrer une implication, par exemple ($B \subset B' \Rightarrow f^{\langle -1 \rangle}(B) \subset f^{\langle -1 \rangle}(B')$), la preuve rédigée commence par ...

3. Je suis capable de reconstituer mentalement une démonstration à partir de l'aperçu global.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

4. J'ai réussi à rédiger une démonstration à partir de l'aperçu global.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

5. J'ai compris le principe d'une démonstration par équivalence.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

6. J'ai rendu au moins une démonstration rédigée à l'enseignant.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

7. J'ai retenu les définitions d'image et images réciproques :

   - $x \in f^{\langle -1 \rangle} B \iff \dots$

   - $y \in f(A) \iff \dots$

   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

Aperçus de preuves La Figure 1 montre l'aperçu global de la première démonstration de l'exercice 6. Chaque objet du contexte est entouré en bleu au moment où il est introduit, en pointillé lorsqu'il est utilisé. De même, les propriétés du contexte sont entourées en rose fuschia. Les propriétés du contexte utilisées pour produire de nouveaux objets ou propriétés sont encadrées en rouge. Les flèches en pointillés rouge indiquent l'application d'une définition ; la propriété obtenue est toujours équivalente à la propriété de départ.

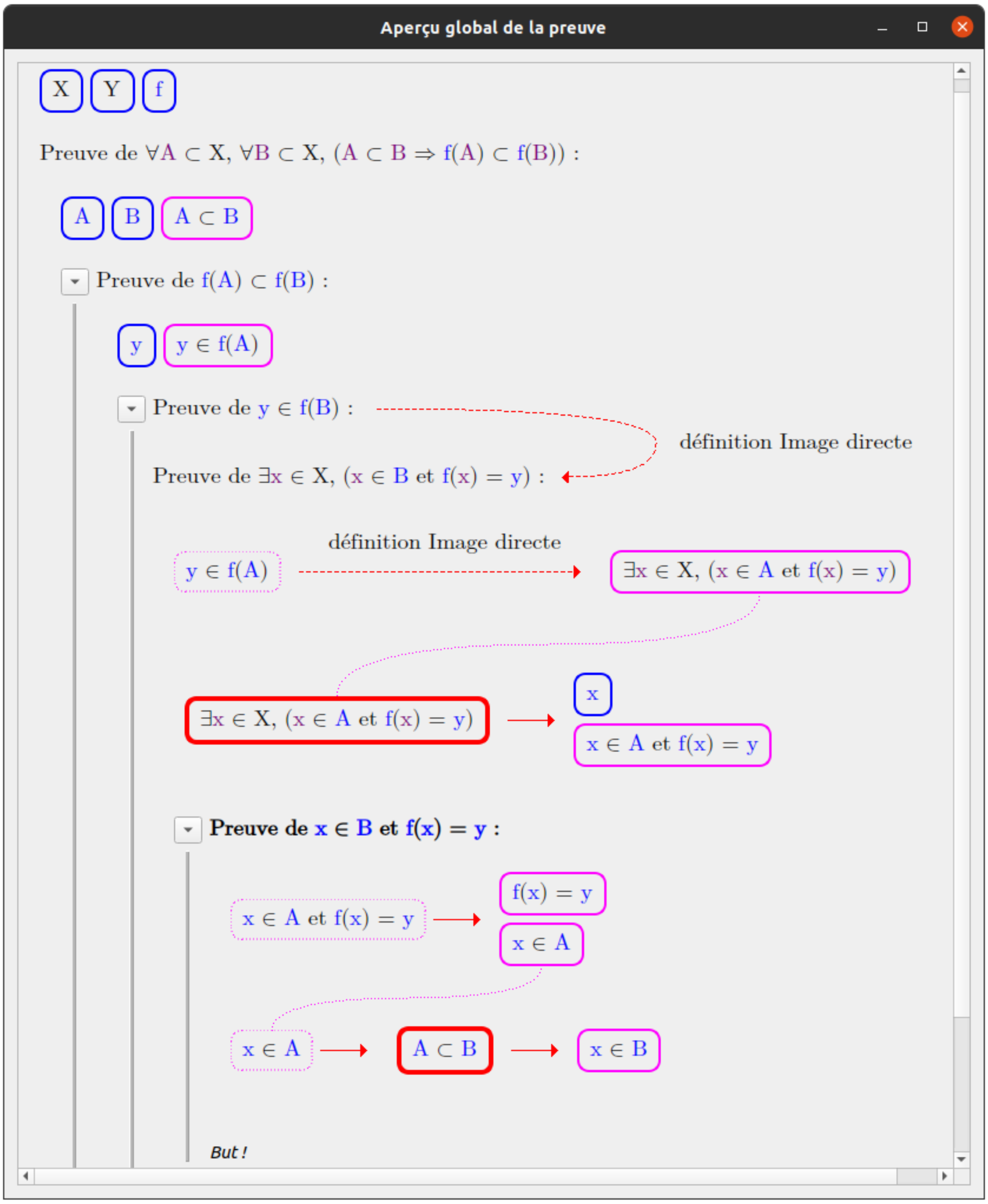


FIGURE 1 – Aperçu global de la preuve de la propriété :

$$\forall A \subset X, \forall A' \subset X, (A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')).$$

La figure 2 montre l'aperçu global de la seconde démonstration de l'exercice 6. A vous de jouer !

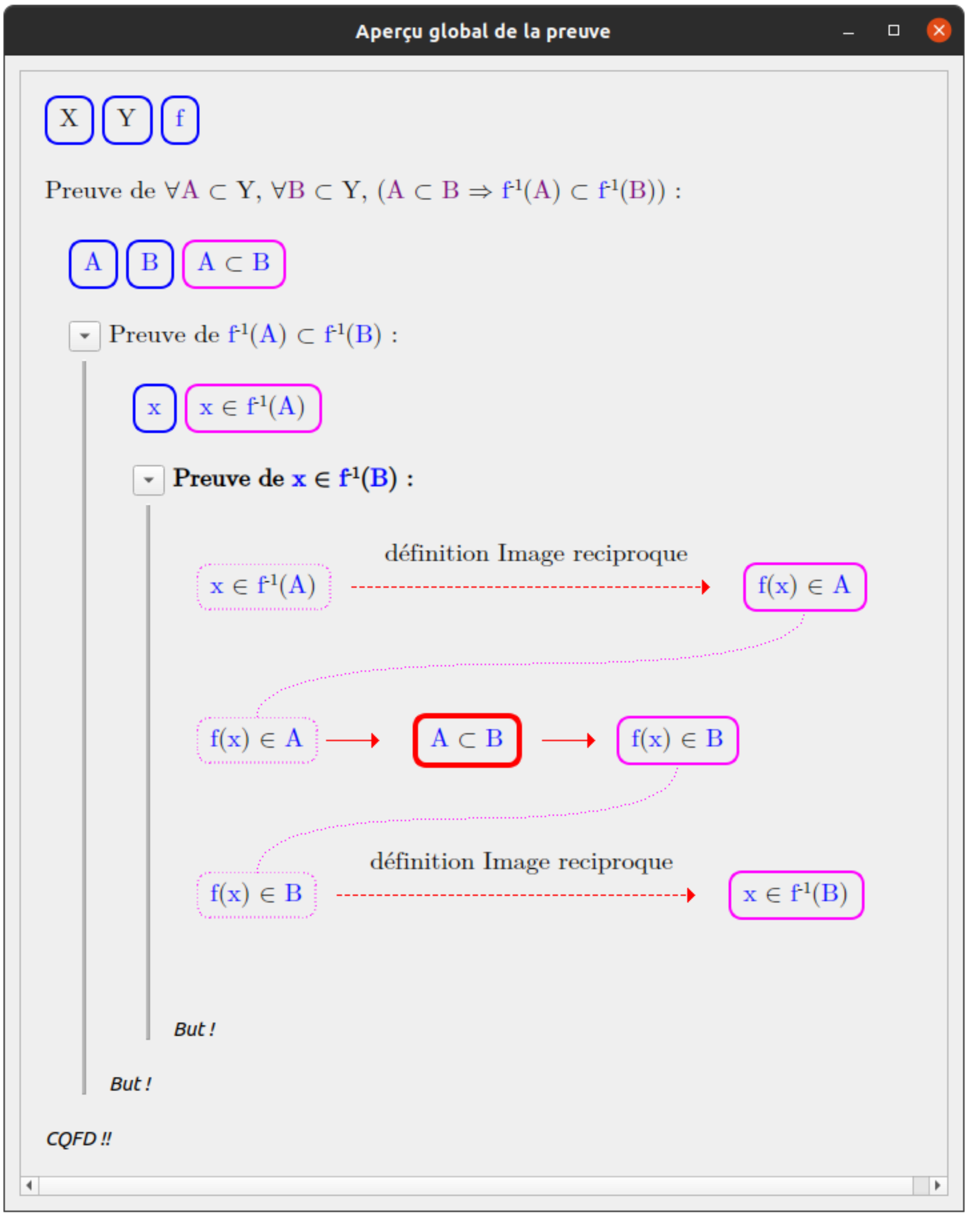


FIGURE 2 – Aperçu global de la preuve de la propriété :
$$\forall B \subset Y, \forall B' \subset Y, (B \subset B' \Rightarrow f^{\langle -1\rangle}(B) \subset f^{\langle -1\rangle}(B')).$$

4 Raisonner sur les limites, I

Objectifs *On en sait maintenant assez pour tenter quelques démonstrations d'analyse ! Nous allons travailler sur les limites, un objet central dans les maths de Licence.* L'objectif de cette séance est d'appliquer à des problèmes de limite les principes de raisonnement et de rédaction que nous avons appris. Vous allez notamment :

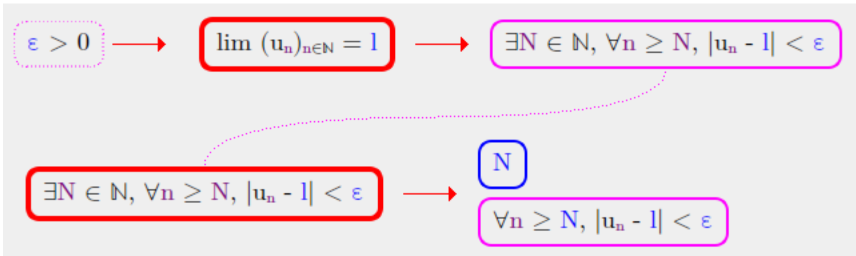
- apprendre la structure d'une preuve de la propriété $\lim(u_n)_{n\geq 0} = \ell$
- apprendre à gérer correctement les variables du contexte dans la rédaction de la preuve.

Le second point est crucial, parce que les démonstrations d'analyse contiennent souvent de nombreuses variables (beaucoup plus que dans les exercices de théorie des ensembles que nous avons faits jusqu'ici), et les étudiants ont beaucoup de mal à comprendre la différence entre les variables du contexte, qu'on peut utiliser tout au long de la preuve, et les variables dites "muettes", qui sont liées à des quantificateurs.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels, et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite **converge vers** l, ou **a pour limite** ℓ, et on écrit $\lim(u_n)_{n\geq 0} = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \geq 0,\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Ceci correspond au schéma d'utilisation suivant :



Exercice 9.—

1. Majoration d'une valeur absolue Compléter l'équivalence suivante :

$$|a| < \varepsilon \Leftrightarrow \dots$$

On en déduit

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \qquad \dots \qquad < u_n < \qquad \dots$$

Faire un dessin représentant ces deux inégalités sur la droite réelle.

(Dans D∀∃DUCTION*, il faut parfois faire jouer cette équivalence pour se débarrasser des valeurs absolues avant que le logiciel n'arrive à conclure la démonstration d'une inégalité à l'aide du bouton But !)*

Exercice 10.— *Les exercices avec* D∀∃DUCTION *se trouvent dans le fichier "limite et continuité".*

1. (Démonstration d'une convergence, expliquée par le prof) Montrer que la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 0}$ converge vers 0.

2. Montrer de même que la suite $(\frac{1}{n^2})_{n\geq 0}$ converge vers 0. *Indiquer dans la marge les trois étapes de la preuve : introduction du ϵ, choix du N, vérification qu'il convient.*

3. (avec D∀∃DUCTION**)** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite constante :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, u_n = c.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers c.

4. (avec D∀∃DUCTION**)** Montrer que toute suite réelle croissante non majorée tend vers $+\infty$.

5. (Utilisation d'une convergence, avec D∀∃DUCTION**)** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers un réél ℓ. On suppose que $\ell > 0$. Montrer que la suite est strictement positive à partir d'un certain rang :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > 0.$$

6. (plus difficile) **(Utilisation d'une convergence)** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers un réel l. Montrer que la suite est majorée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, u_n \leq M.$$

7. (plus difficile) Montrer que la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$, qui vaut -1 pour n impair et 1 pour n pair, n'a pas de limite. *Aide : raisonner par l'absurde.*

8. (avec D∀∃DUCTION) Montrer que "les inégalités larges passent à la limite" : soient $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles, et ℓ, m deux nombres réels tels que

$$\lim(v_n)_{n\geq 0} = \ell \text{ et } \lim(w_n)_{n\geq 0} = m.$$

Montrer que si pour tout $n \geq 0$, $v_n \leq w_n$, alors $\ell \leq m$. *Aide : raisonner par contraposée.*

Bilan 4

1. J'ai compris comment *démontrer* une propriété de limite ; la démonstration comporte trois phases :
   (a) ...
   (b) ...
   (c) ...

2. J'ai compris comment *utiliser* une propriété de limite qui est dans le contexte : je l'applique à ... qui doit être présent dans le contexte, et j'obtiens alors ....

3. J'ai compris la définition de limite d'une suite.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

4. Je comprends la différence entre variables libres (présentes dans le contexte) et variables liées (par un quantificateur).
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

5. J'ai rendu au moins une démonstration rédigée à l'enseignant.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

6. Dans les démonstrations que j'ai rendues, j'ai fait attention aux variables, en particulier à la façon d'introduire les variables du contexte.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

5 Limite I : analyse de rédactions

Exercice 11.— On a reproduit plus bas des réponses d'étudiants pour différentes questions de l'exercice 10. Le but de l'exercice est (1) comprendre ces réponses, (2) repérer les problèmes, et proposer des améliorations.

1. On s'intéresse à la première copie.

a.

b.

c. Proposer une rédaction améliorée en respectant les consignes de rédactions de l'encadré « Rédiger n°7 ».

Rédiger 1 : Grille d'analyse des démonstrations (limites)

1. **Démonstration des propriétés ($\forall, \exists, \Rightarrow$).** Au fur et à mesure de l'analyse, on indiquera $\forall_{\text{démo}}$, $\exists_{\text{démo}}$, $\Rightarrow_{\text{démo}}$ aux endroits où commence la preuve de la propriété correspondante.
   (a) ($\forall ... \exists ...$) **Démonstration d'une propriété de limite.** On rappelle qu'une telle démonstration comporte 3 phases : introduction d'un $\varepsilon > 0$, choix du N, vérification qu'il convient. Repérer ces trois phases ; sont-elles explicitées ? Sinon, faites une proposition pour améliorer la rédaction.
   (b) ($\exists$) **Démonstration d'une propriété d'existence.** Repérer l'endroit où la variable recherchée est introduite. Quel est le but juste après ? Est-ce que ce but est énoncé dans la copie ? Sinon, proposer une phrase pour clarifier.
   (c) ($\Rightarrow$) **Démontration d'une implication** $P \Rightarrow Q$**.** Trouver l'endroit où commence la démonstration de l'implication. Est-ce que la prémisse P est introduite explicitement dans le contexte ? Sinon, proposer une phrase d'introduction. Serait-il utile de rappeler le nouveau but Q ?
2. **Utilisation des propriétés.** On indiquera $\forall_{\text{util}}$, $\exists_{\text{util}}$, $\Rightarrow_{\text{util}}$ aux endroits où la propriété correspondante est utilisée.
   (a) ($\forall ... \exists ...$) Repérer chaque endroit où on a **utilisé une hypothèse de limite**. Dire qui joue le rôle de ε, quel est le N obtenu, repérer l'endroit où la propriété vérifié par ce N ($\forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$) est utilisée. Peut-on améliorer la rédaction ?
   (b) Lorsqu'une **propriété d'existence est utilisée**, entourer la nouvelle variable introduite dans le contexte, encadrez la propriété vérifiée par cette variable. L'introduction est-elle faite explicitement dans la copie ?
   (c) **Utilisation d'une implication.** Repérer le mot signalant l'utilisation d'une implication (il s'agit souvent du mot "donc"). Encadrez la propriété obtenue, si elle est écrite explicitement ; dans le cas contraire, écrivez-là.

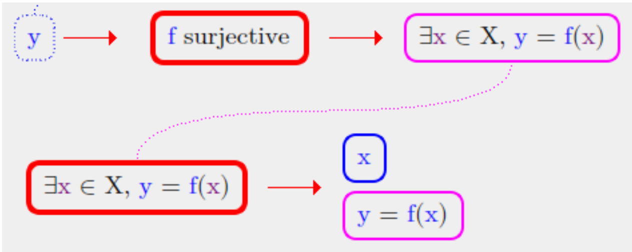
6 Injectivité, surjectivité

Objectifs Dans cette séance, retour à la théorie des ensembles. Nous allons raisonner avec deux notions cruciales, celles d'injectivité et de surjectivité. Les objectifs sont :
• comprendre ces deux définitions, savoir les dessiner, les écrire en symboles ;
• rédiger des preuves impliquant ces notions ;
• continuer à faire attention à la gestion des variables dans la rédaction des preuves.

Définitions

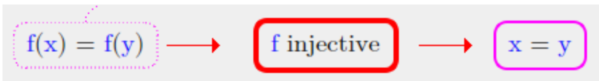
Soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est **surjective** si tout élément de Y est l'image d'**au moins un** élément de X :

$$f \text{ surjective} \iff \forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y.$$



On dit que f est **injective** si tout élément de Y est l'image d'**au plus un** élément de X. En pratique, on utilisa la formulation équivalente suivante : f est injective si à chaque fois que deux éléments x, x' ont la même image, c'est qu'ils sont égaux :

$$f \text{ injective} \iff \forall x, x' \in X, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x').$$



Exercice 12.—

1. Complétez les dessins concernant injectivité et surjectivité dans les pages suivantes.

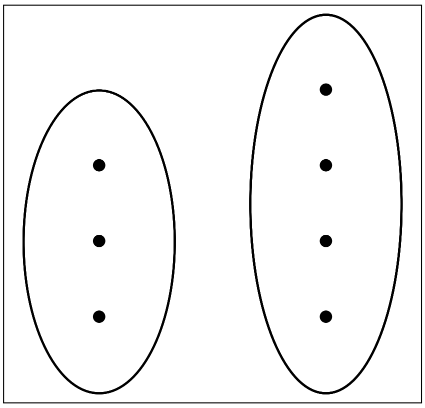
2. Utilisez D∀∃DUCTION pour montrer que la composée de deux applications injectives est injectives, et que la composée de deux applications surjectives est surjective.

3. On peut se demander si une condition d'injectivité ou de surjectivité portant seulement sur f, ou seulement sur g, pourrait suffire à assurer l'injectivité ou la surjectivité de la composée. Fabriquez, à l'aide de patates, deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ avec g surjective mais $g \circ f$ non surjective.

4. Fabriquez de même trois autres contre-exemples simples pour les trois autres affirmations.

Exercice 13.— On a vu lors des séances précédentes que les formules $A = f^{\langle -1 \rangle}(f(A))$ et $B = f(f^{\langle -1 \rangle}(B))$ ne sont pas vraies. Montrer cependant qu'elles deviennent vraies si on suppose la bonne propriété sur f (injectivité ou surjectivité, à trouver !). On pourra utiliser D∀∃DUCTION (voir l'exercice *Image et image réciproque II*).

Injectivité



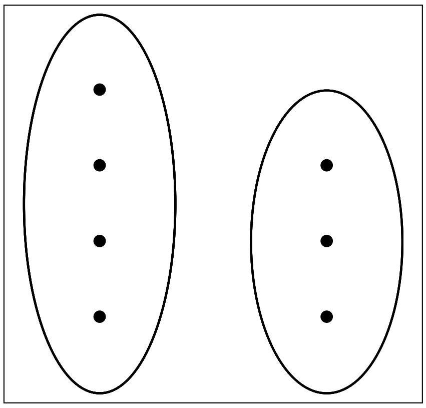


Figure 3 – Représenter, dans le cas où c'est possible, une application **injective**.

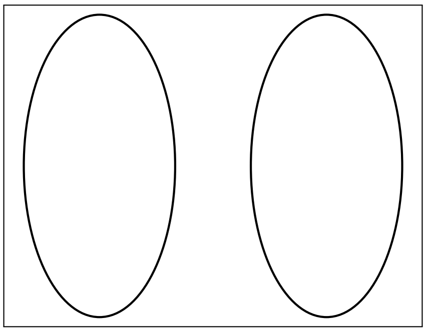


Figure 4 – Représenter une application **non injective** avec au moins 4 flèches.

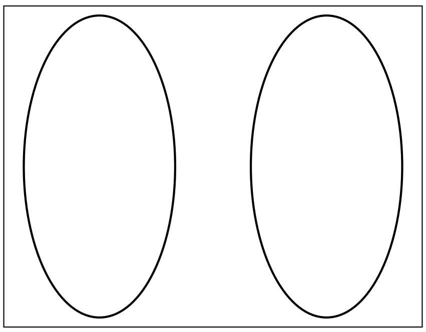


Figure 5 – Représenter une application **non injective** avec le moins de flèches possible...

Surjectivité

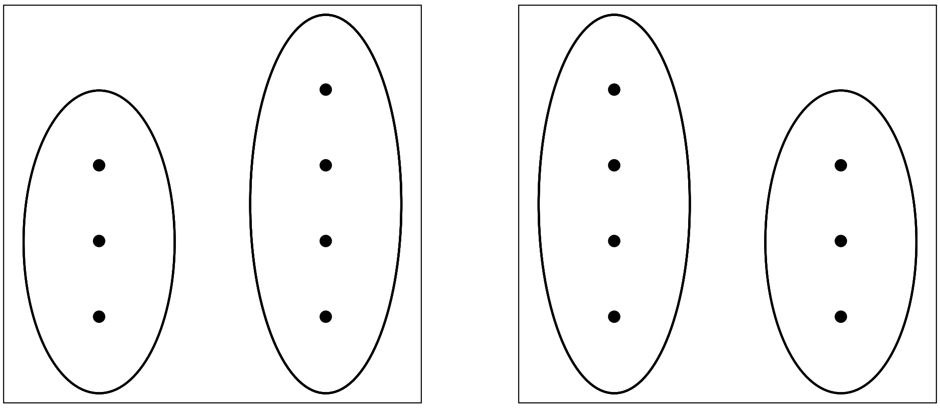


FIGURE 6 – Représenter, dans le cas où c'est possible, une application **surjective**.

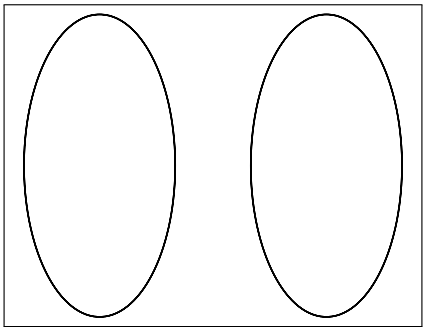


FIGURE 7 – Représenter une application **non surjective** avec au moins deux flèches.

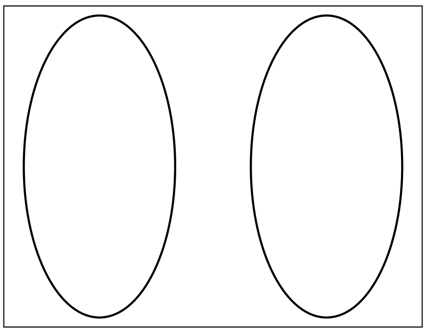


FIGURE 8 – Représenter une application **non surjective** avec une seule flèche...

Bilan 6

1. Si mon but est de *montrer* qu'une certaine application f est injective, la preuve rédigée commence par ...

   et le but devient ...

2. Si je veux *utiliser* une propriété d'injectivité présente dans le contexte, j'ai besoin de ...

   J'obtiens alors la propriété ...

3. Si mon but est de *montrer* qu'une certaine application f est surjective, la preuve rédigée commence par ...

   et le but devient ...

4. Si je veux *utiliser* une propriété de surjectivité présente dans le contexte, j'ai besoin de ...

   J'obtiens alors ...

5. J'ai compris les définitions d'injectivité et de surjectivité.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

6. Je réussi à faire les exercices concernant ces notions avec D∀∃DUCTION.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

7. J'ai sais construire des contre-exemples impliquant ces notions.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

8. J'ai relu la démonstration rendue la fois précédente, et j'ai compris les commentaires de l'enseignant.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

9. Dans la démonstration que j'ai rendu à l'enseignant, j'ai fait attention aux variables...
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

Je me mets une note (1 point par question) : .../5

Commentaires libres sur cette séance : ...

7 Auto-évaluation

Objectifs L'objectif de cette séance est de vous permettre de vous auto-évaluer sur l'assimilation des principes de rédaction. Il s'agit essentiellement de rédiger deux démonstrations, et de les faire relire par un ou une camarade qui en fera une évaluation selon des critères donnés. *Votre travail sera relu par l'enseignant, mais ceci n'est PAS une évaluation notée. Si les énoncés de l'exercice 14 vous semble trop simples, vous pouvez les remplacer par l'un des deux exercices suivants. L'utilisation du logiciel n'est pas imposée si elle ne vous semble pas utile. N'oubliez pas d'effectuer l'étape d'échange de rédaction, ni de répondre au petit questionnaire d'évaluation de l'utilité du logiciel !*

On considère trois ensembles X, Y, Z et deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. On se pose les questions suivantes :

– si la composée $g \circ f$ est injective, f est-elle nécessairement injective ? g est-elle nécessairement injective ?

– Mêmes questions avec la surjectivité.

Autrement dit, on veut déterminer, parmis les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies :

1. $\forall f : X \to Y, \forall g : Y \to Z, \quad (g \circ f \text{ injective} \Longrightarrow f \text{ injective}).$
2. $\forall f : X \to Y, \forall g : Y \to Z, \quad (g \circ f \text{ injective} \Longrightarrow g \text{ injective}).$
3. $\forall f : X \to Y, \forall g : Y \to Z, \quad (g \circ f \text{ surjective} \Longrightarrow f \text{ surjective}).$
4. $\forall f : X \to Y, \forall g : Y \to Z, \quad (g \circ f \text{ surjective} \Longrightarrow g \text{ surjective}).$

Exercice 14.—

1. Démontrez les affirmations 1 et 4 à l'aide de D∀∃DUCTION (exercices 4 et 5 dans la section *Injectivité/surjectivité et composition*). ***Aide :*** *le bouton* $\mapsto$ *peut être utilisé pour (1) introduire une notation pour un élément du type* $f(x)$ *; (2) à partir d'une égalité du type* $x = y$*, obtenir l'égalité* $f(x) = f(y)$.

2. Rédiger les démonstrations des affirmations 1 et 4. *Pensez à entourer les variables globales lors de leur première apparition, et à encadrer les rappels du but.*

3. Echanger vos rédactions avec un ou une camarade, et répondez (sur sa copie) aux questions suivantes :

a. Est-ce que les variables et les propriétés sont correctement introduites à partir du but ?

b. Est-ce que toutes les variables **globales** sont correctement introduites ? A côté de chaque première apparition, notez (au crayon gris) :

• ∀-*démo* si la variable correspond à la démonstration d'une propriété universelle,

• ∃-*util* si la variable correspond à l'utilisation d'une propriété existentielle (*voir le document sur les variables*).

c. Est-ce que chaque propriété qui est affirmée se déduit clairement des précédentes ?

d. Est-ce que le but est manipulé correctement : il est clairement écrit au début ? Il est rappelé au moins une fois lorqu'il a changé ? Il n'est pas confondu avec une hypothèse du contexte (par exemple « supposons que » au lieu de « montrons que ») ?

4. Dessinez des contre-exemples pour les affirmations 2 et 3.

Aide. (2) Si $g \circ f$ *est injective, alors* f *doit être injective (d'après 1). Commencer par dessiner, pour* f*, une application injective très simple.*

Exercice 15.—(optionnel) Pour chacune des propriétés suivantes, déterminez si elle est vraie ou fausse. Démontrez les propriétés vraies à l'aide de D∀∃DUCTION (exercices *Image de l'intersection*), et rédigez la démonstration. Donnez un contre-exemple pour les propriétés fausses.

1. $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$.
2. $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
3. f injective $\Longrightarrow f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
4. f surjective $\Longrightarrow f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

Exercice 16.—(optionnel) Rédigez les démonstrations des caractérisation suivantes de l'injectivité et de la surjectivité (exercices *Formules caractérisant l'injectivité et la surjectivité*). On considère deux ensembles quelconques X et Y et $f : X \to Y$.

1. $(\ \forall A \subset X, A = f^{-1}(f(A))\ ) \Longrightarrow f$ injective.
2. $(\ \forall B \subset Y, B = f(f^{-1}(B))\ ) \Longrightarrow f$ surjective.

Evaluation de l'utilité du logiciel

1. Avez-vous fait les démonstrations avec D∀∃DUCTION avant de rédiger la démonstration ?

2. Si oui, avez-vous utilisé l'aperçu global de preuve pour vous aider à rédiger ?

3. Auriez-vous été capable de rédiger la preuve sans utiliser le logiciel ?

4. Avez-vous lu le texte intitulé *Démonstration et utilisation des propriétés* qui vous a été distribué lors de la séance 4, et si oui, est-ce qu'il vous a aidé à améliorer votre rédaction ? Si oui, pouvez-vous préciser ?

8 Négations

Objectifs L'objectif de cette séance est de faire le point sur la négation. Nous allons notamment voir
• Les méthodes de preuves utilisant la négation,
• Le ”calcul” des négations,
• comment prouver la négation d'une propriété universelle à l'aide d'un contre-exemple.

Négation et méthodes de preuve

Si P est une propriété mathématique, alors la négation de P, qu'on écrit en abrégé ”non P”, désigne la propriété ”P est fausse”. Quelle que soit la propriété P, **une et une seule des deux propriétés P et non P est vraie**. De ce principe découle les preuves par cas, par l'absurde et par contraposée.

(1) Preuve par cas La négation permet tout d'abord de faire une preuve par cas, à partir d'une propriété P dont on ne sait pas si elle est vraie ou fausse, en distinguant le cas où P est vraie et le cas où P est fausse. Bien sûr, ceci n'est utile que si le raisonnement est différent dans les deux cas.

(2) Preuve par l'absurde La preuve par l'absurde consiste à supposer que la propriété à démontrer est fausse, et à en tirer une contradiction.

(3) Preuve par contraposée On considère une implication $P \Longrightarrow Q$. Sa *contraposée* est alors l'implication (non Q) $\Longrightarrow$ (non P). Le résultat important est que toute implication est équivalente à sa contraposée :

$$(P \Longrightarrow Q) \Leftrightarrow ((\text{non } Q) \Longrightarrow (\text{non } P)).$$

La preuve par contraposée utilise ce principe : si notre but est de démontrer une implication, on peut remplacer le but par la contraposée de l'implication.

Conclure une preuve par l'absurde : *ex falso quodlibet* Dans le cas d'une preuve par l'absurde, la contradiction consiste à obtenir en même temps une propriété P et sa négation non P. Le principe *ex falso quodlibet*, “tout découle d'une contradiction”, dit qu'on peut alors en déduire n'importe quelle propriété. L'idée est qu'on est en train d'explorer un cas qui ne peut pas arriver, et donc il n'y a rien à démontrer ! En pratique dans D∀∃DUCTION, lorsque le contexte contient P et non P, le bouton But ! permet toujours de conclure.

Calcul des négations ¬

Exercice 17.— Dans la liste d'énoncés **a** à **k** ci-dessous, certains sont vrais, d'autres sont faux. Le but de l'exercice est de comprendre ces énoncés, de distinguer le vrai du faux, et enfin de démontrer l'énoncé ou sa négation selon les cas. On rappelle que $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels (c'est-à-dire positifs ou nuls), $\mathbb{Z}$ l'ensemble de tous les entiers, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. *Pour cet exercice, il est conseillé de travailler par binôme.*

1. Exprimer chaque énoncé au moyen d'une phrase en français, en essayant de remplacer toutes les variables liées par des mots ! Par exemple, l'énoncé **a** peut s'exprimer ainsi : *Tout entier naturel est différent de* 0 *ou différent de* 1.

2. Compléter le tableau de négation des énoncés.

Forme de la propriété	Négation
P et Q	
P ou Q	
$P \Rightarrow Q$	
$\forall x \in X,\ P(x)$	
$\exists x \in X,\ P(x)$	

3. A l'aide du tableau, "calculer" la négation de chacun des énoncés **a** à **k**, puis exprimer le nouvel énoncé obtenu à l'aide d'une phrase sans variable. Par exemple, pour l'énoncé **a** :

$$\begin{aligned}
\text{NON}(\forall n \in \mathbb{N}, (n \neq 0 \text{ ou } n \neq 1)) &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \text{NON}\,(n \neq 0 \text{ ou } n \neq 1) \\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, (\text{NON}(n \neq 0) \text{ et } \text{NON}(n \neq 1)) \\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, (n = 0 \text{ et } n = 1)\,.
\end{aligned}$$

On a utilisé successivement les régles de négation d'un $\forall$, de négation d'un OU, et de négation d'une égalité. On peut exprimer l'énoncé obtenu de la façon suivante : *Il existe un entier naturel qui est égal à la fois à 0 et à 1* (ce qui est clairement faux !!).

4. Utiliser D$\forall\exists$DUCTION pour démontrer les énoncés qui vous paraissent vrais, et la négation de ceux qui vous semblent faux (le fichier s'appelle *Logique et inégalités*, le logiciel vous demandera de choisir entre l'énoncé et sa négation).

*Aides : **a.** Utilisez une preuve par cas. **h.** Après avoir introduit variables et propriétés en travaillant sur le but, appliquez la propriété à un ϵ bien choisi. **i.** Raisonnez par contraposée.*

Liste d'énoncés :

a. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \neq 0 \text{ ou } n \neq 1)$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}, (n = 0 \text{ ou } n = 1)$.
c. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall n' \in \mathbb{N}, n \leq n'$.
d. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall n' \in \mathbb{Z}, n \leq n'$.
e. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n' \in \mathbb{N}, n = n'$.
f. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall n' \in \mathbb{N}, n = n'$.
g. $\forall a \geq 0, \forall \varepsilon \geq 0, (a \leq \varepsilon \Longrightarrow a = 0)$.
h. $\forall a \geq 0, ((\forall \varepsilon \geq 0, a \leq \varepsilon) \Longrightarrow a = 0)$.
i. $\forall a \geq 0, ((\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon) \Longrightarrow a = 0)$.
j. $\forall p, q \in \mathbb{Z}, (p < q) \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{Z}, p < r < q)$.
k. $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x < y) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{R}, x < z < y$.

Exercice 18.— On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, et $\ell \in \mathbb{R}$. Pour chacune des propriétés suivantes, (a) écrire la propriété à l'aide de quantificateurs, (b) en déduire la négation de la propriété, (c) exprimer cette négation à l'aide d'une phrase en français.

1. La suite est majorée.

2. La suite est bornée.

3. La suite est strictement croissante (deux définitions équivalentes possible).

4. La suite tend vers $+\infty$.

5. La suite tend vers 0.

Exercice 19.— (optionnel) Les propriétés suivantes sont-elles VRAIES ou FAUSSES ?

1. Toutes suite qui n'est pas croissante est décroissante.

2. Toute suite bornée est convergente.

3. Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \ell$.

4. Toute suite non majorée tend vers $+\infty$.

Démontrer les propriétés vraies, démontrer la négations des propriétés fausses.

Contre-exemples

Dans l'exercice qui suit, on explore la notion de contre-exemple, en revenant sur une propriété étudiée à la séance 2. Nous allons voir (1) en quoi un contre-exemple à une propriété universelle donne une preuve de la négation de cette propriété, (2) une nouvelle méthode pour construire un contre-exemple.

Exercice 20.— On considère la propriété P suivante :

$$\forall X \text{ensemble},\ \forall Y \text{ensemble},\ \forall f : X \to Y,\ \forall A \subset X,\ \ f^{\langle -1 \rangle}(f(A)) \subset A.$$

On rappelle qu'on a dessiné, à la séance 2, un contre-exemple à cette propriété, c'est-à-dire une application f entre deux ensembles X et Y et une partie A de X telle que $f^{\langle -1 \rangle}(f(A))$ n'était pas inclus dans A.

1. Calculer la négation de la propriété P. Pourquoi peut-on dire que le contre-exemple donne une preuve de la négation de P ?

2. On veut préciser la propriété Non(P) obtenue.

a. Exprimer à l'aide d'un quantificateur la propriété NON($E \subset F$), où E et F sont deux parties d'un ensemble quelconque (on pourra dérouler la définition de l'inclusion).

b. Appliquer ceci à la propriété NON(P). Dérouler aussi la définition de l'image réciproque, puis de l'image directe, pour aboutir à un énoncé avec six fois le symbole d'existence !

c. Démontrer la propriété à l'aide d'un dessin. On a fabriqué notre contre-exemple !

Caractérisation de l'injectivité et la surjectivité

Exercice 21.—(optionnel) On voudrait montrer que la formule $A = f^{\langle -1 \rangle}(f(A))$ caractérise l'injectivité de f. Plus précisément, il s'agit de montrer l'affirmation suivante :

$$\forall f : X \to Y,\quad \big((\forall A \subset X, A = f^{\langle -1 \rangle}(f(A))) \Longrightarrow f \text{ est injective} \big) .$$

1. Utilisez D∀∃DUCTION pour démontrer cette propriété. *Aide : on pourra raisonner par contraposée, et utiliser les éléments x, x' obtenus pour fabriquer une partie A de X appropriée.*

2.

a. Écrire, sous une forme simple, la négation de la propriété "f est injective".

b. Écrire, sous une forme simple, la négation de la propriété "$A \subset B$".

c. Pendant la démonstration avec le logiciel, vous avez utilisé plusieurs fois le bouton "NON". Pour chacun énoncé correspondant, vérifier la propriété obtenue dans le logiciel en expliquant pas à pas comment on obtient la négation.

3. Rédiger la démonstration.

4. Montrer de même que la formule $B = f(f^{\langle -1 \rangle}(B))$ caractérise la surjectivité de f.

Exercice 22.—(optionnel) Faire les autres exercices de D∀∃DUCTION donnant une caractérisation de l'injectivité ou de la surjectivité.

Exercice 23.—(Optionnel)

1. Faire les exercices de logique propositionnelle avec D∀∃DUCTION.

2. En déduire une méthode de preuve d'une proposition du type "P ou Q".

---

9 Raisonner sur les limites, II

Objectifs Dans cette séance, on continue à apprendre à raisonner avec les limites. Nous allons maintenant aborder des exercices dans lesquels il y a une propriété de convergence dans les hypothèses ET dans le but. Ceci rend les raisonnements un peu plus compliqués, mais les objectifs restent les mêmes :

• Bien distinguer le but et les hypothèses du contexte, et ceci aussi bien lors de la construction de la preuve au brouillon que pendant la rédaction.

• Gérer correctement les variables, en mettant en avant l'apparition des nouvelles variables globales dans le contexte.

On rappelle que la démonstration d'une propriété de limite comporte en général trois étapes : (1) On prend un $\varepsilon > 0$; (2) On cherche un rang N ; (3) on vérifie que le N trouvé convient. L'étape 2 est la plus difficile, il faut souvent faire un dessin.

Exercice 24.— Pour chacun des problèmes suivants, rédiger une preuve, avec ou sans l'aide du logiciel. *Aide : il est fortement conseillé (1) d'entourer les variables globales à leur première apparition, (2) d'encadrer les rappels du but, (3) d'éviter d'écrire dans les preuves la définition de la limite, à cause du risque de confusion entre les variables liées qu'elle contient et les variables globales.*

1. (Couper les epsilons, avec D∀∃DUCTION) Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0 |u_n - \ell| < 2\varepsilon.$$

Optionnel : même question avec 100ϵ, avec $\epsilon/2$.

2. (Application : Limite d'une somme, avec D∀∃DUCTION) Montrer que la limite de la somme égale la somme des limites : soient $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles, et l, m deux nombres réels tels que

$$\lim(v_n)_{n\geq 0} = l \text{ et } \lim(w_n)_{n\geq 0} = m.$$

Montrer que

$$\lim(v_n + w_n)_{n\geq 0} = l + m.$$

3. Montrer le "théorème des gendarmes" : soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites réelles, et l un nombre réel tel que

$$\lim(u_n)_{n\geq 0} = l \text{ et } \lim(w_n)_{n\geq 0} = l.$$

Supposons de plus que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Montrer que

$$\lim(v_n)_{n\geq 0} = l.$$

4. (avec D∀∃DUCTION, ou sans...) Montrer l'**unicité de la limite** d'une suite réelle : soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels, soient l, l' deux nombres réels tels que

$$\lim(u_n)_{n\geq 0} = l \quad \text{et} \quad \lim(u_n)_{n\geq 0} = l'.$$

Montrer que $l = l'$. *Aide : on pourra raisonner par contraposée.*

5. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite convergeant vers une limite ℓ avec $\ell > 0$.

a. Montrer qu'elle est plus grande que $\ell/2$ à partir d'un certain rang :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n > \frac{\ell}{2}.$$

Aide : on a déjà fait un exercice analogue... on pourra s'en inspirer !

b. On note N le rang obtenu. Montrer que la suite $(1/u_n)_{n\geq N}$ converge vers $1/l$.

Exercice 25.— Limites et fonctions

1. (avec D∀∃DUCTION, **limite positive**.)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons que f est continue, et que $f(0) = 1$. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, (si $|x| < \delta$ alors $f(x) > 0$).

2. (avec D∀∃DUCTION, **composition de limites**.)

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient a, b, c trois nombres réels. Supposons que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \to b} g(x) = c.$$

Démontrer que

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c.$$

3. (avec D∀∃DUCTION, **image d'une suite convergente**.)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$. Soit ℓ un nombre réel. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons f est continue, et que

$$\lim(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \ell.$$

Démontrer que

$$\lim(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}} = f(\ell).$$

Exercice 26.—

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *uniformément continue* si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ (|x - y| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

1. (avec D∀∃DUCTION) Montrer que si f est unformément continue, alors elle est continue.

2. (Plus difficile !!) Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue. *Aide : Raisonner par l'absurde. Ecrire la négation de la propriété de continuité uniforme. Calculer $f(x + \delta) - f(x)$, pour tout x et tout $\delta > 0$...*

Bilan de l'ARE D∀∃DUCTION

1. Avez-vous trouvé cet apprentissage intéressant, et si oui, pourquoi ? Quel a été votre exercice ou votre activité préférée ?

2. Est-ce que cet ARE vous a aidé en 1MA003 ? Pensez-vous qu'il vous aidera pour la suite de la Licence ?

3. Avez-vous des critiques ? (concernant par exemple le logiciel utilisé, la durée et le nombre de séances, le rythme (trop lent/trop rapide), les explications, le choix des exercices, les rédactions de preuves à rendre, les retours des profs...) Ou des suggestions pour améliorer l'ARE (ou le logiciel) l'an prochain ?

4. Autres remarques ?

5. Note proposée, sur 20 points (disons entre 12 et 18 : ≥ 12 si vous avez participé à toutes les séances sauf empêchement, sans chercher vraiment comprendre ce qui était demandé ; ≥ 15 si vous avez cherché à comprendre et rendu les rédactions demandées ; ≥ 18 si vous avez en plus le sentiment d'avoir progressé dans la conception et rédaction de preuves) :

A Démonstration et utilisation des propriétés

Les symboles logiques $\Rightarrow, \forall, \exists, \ldots$ servent d'abord à énoncer des propriétés, par exemple dans un théorème ou une définition, ou encore dans un exercice, comme hypothèse ou comme but. Pour pouvoir manipuler une propriété logique, il faut comprendre :

— d'une part comment on peut la *démontrer*,

— et d'autre par comment on peut l'*utiliser* lorsqu'on la suppose vraie.

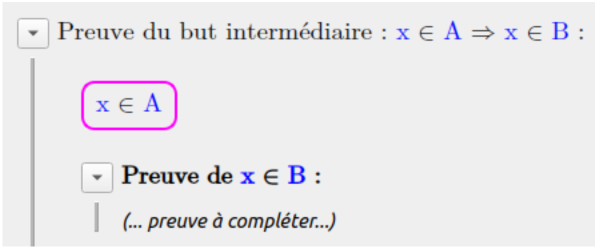
Dans D∀∃DUCTION, ceci correspond à avoir la propriété ou bien dans le but, ou bien dans le contexte.

A.1 L'implication $\Rightarrow$

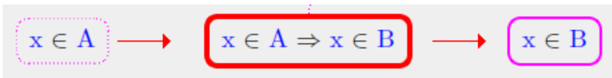
Une implication est une propriété de la forme $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$, qui se lit « P implique Q », ou encore « si P est vraie, alors Q est vraie », où P et Q représentent des propriétés quelconques, qui dépendent souvent d'une ou plusieurs variables : par exemple, l'implication $\boldsymbol{(x \in A) \Rightarrow (x \in B)}$ apparait dans la définition de l'inclusion.

Démontrer Lorsque le but est une implication, autrement dit lorsqu'on veut *démontrer* une implication, on suppose P, et on démontre Q. Par exemple :

`Supposons que` $x \in A$`,`
`et montrons que` $x \in B$`.`



Utiliser Imaginons maintenant qu'on a une implication $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$ qui est une hypothèse : elle apparait dans le contexte, elle est donc considérée comme vraie à ce stade de la preuve, et nous voulons *l'utiliser* pour avancer dans la démonstration. Pour cela, on a besoin de la propriété P, qui doit donc aussi se trouver dans le contexte : sans P, notre implication $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$ est inutilisable ! Sur le papier, on écrit



`On a` P`, et` P `implique` Q`, donc` Q`.`

Par exemple :

`On a` x `appartient à` A`, et si` x `appartient à` A `alors` x `appartient à` B`, donc` x `appartient à` B`.`

En pratique, on peut souvent "oublier" le rappel de l'implication, par exemple si la propriété $A \subset B$ a été énoncée juste au-dessus :

`On a` x `appartient à` A`, donc` x `appartient à` B`.`

Rédiger 1 :

Pour *démontrer* l'implication $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$, on écrit :

`Supposons` P `[et montrons` Q`].`

Pour *utiliser* l'implication $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$ présente dans le contexte, on a besoin que la propriété P soit également dans le contexte, et on écrit alors, par exemple :

`On a` P`, et` P `implique` Q`, donc` Q`.`

Une erreur courante (et facile à corriger) consiste à utiliser le symbole $\Rightarrow$ comme abréviation du mot « donc ». Cette erreur revient à confondre l'implication

$\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$: P implique Q,

avec le raisonnement de déduction

P est vraie, or P implique Q, donc Q est vraie.

Dans le premier cas, on ne sait pas si P ou Q sont vraies, on dit juste que l'une implique l'autre.

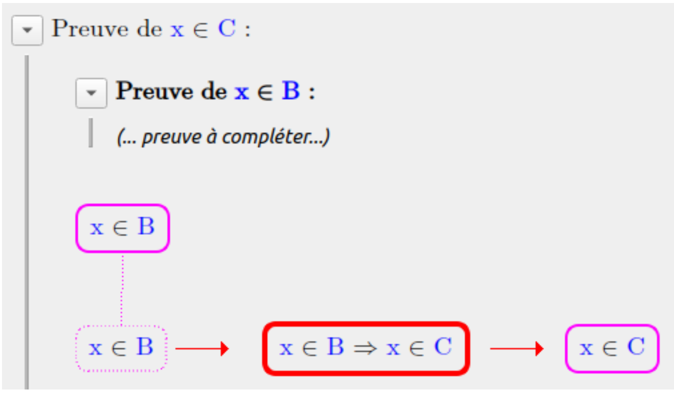
Rédiger 2 :

Le symbole $\Rightarrow$ n'est **pas** l'abréviation du mot « donc ».

Voici une façon alternative d'utiliser l'implication $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$, présente dans le contexte. Si notre but est Q, et qu'on arrive à démontrer P, alors on pourra en déduire Q. Ainsi, l'implication permet de remplacer le but Q par le nouveau but P. On peut écrire par exemple :

`Montrons` Q. `On sait que` $P \Rightarrow Q$, `donc il suffit de montrer` P.

Dans D∀∃DUCTION, ceci est obtenu en sélectionnant le but Q, l'implication $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$ dans le contexte, et en cliquant sur $\Rightarrow$. Le but est alors remplacé par P. L'aperçu global rétablit l'ordre logique naturel en affichant d'abord la preuve P de suivie de la déduction de Q.



A.2 Le quantificateur universel ∀

Le quantificateur universel sert à énoncer une propriété commune à tous les éléments d'un ensemble. Par exemple, l'inclusion d'une partie A d'un ensemble X dans une autre partie B s'écrit

$$\forall x \in X, (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

qui peut se lire ainsi : "Pour tout élément x de X, si x est dans A alors il est aussi dans B", et qui est une propriété commune à tous les éléments de X. Cette propriété s'écrit aussi plus simplement :

$$\forall x \in A, x \in B.$$

Une propriété universelle est donc de la forme $\boldsymbol{\forall x \in X, P(x)}$, ou $P(x)$ représente une propriété concernant x : dans notre exemple, $P(x)$ est la propriété $\boldsymbol{x \in A \Rightarrow x \in B}$.

Démontrer Supposons que notre but soit une propriété universelle $\boldsymbol{\forall x \in X, P(x)}$. Pour *démontrer* cette propriété, on considère un élément x quelconque, et on démontre qu'il satisfait la propriété $P(x)$. Dans la démonstration rédigée, ceci se traduit par le fameux

`Soit` $x \in X$.

suivi de la preuve de la propriété $P(x)$. On peut aussi écrire

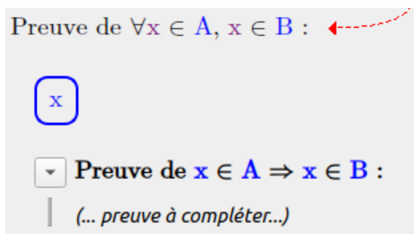
`Soit` x `un élément quelconque de` X.

ou encore

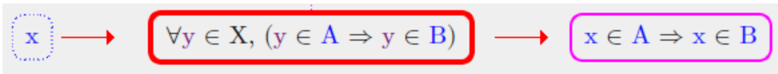
`Considérons un élément` x `de` X.

On peut éventuellement rappeler le nouveau but :

`Montrons` $P(x)$.



Utiliser Supposons maintenant qu'on ait une propriété universelle $\boldsymbol{\forall y \in X, P(y)}$ qui est une hypothèse :



elle apparait dans le contexte, elle est donc considérée comme vraie à ce stade de la preuve, et nous voulons *l'utiliser* pour avancer dans la démonstration. Pour cela, il faut aussi avoir un élément de X dans le contexte : sinon, impossible d'appliquer cette propriété ! Si nous avons un élément x de X dans le contexte, alors en appliquant notre propriété universelle on obtient $P(x)$. Sur le papier, on écrit par exemple

`En appliquant à` x `la propriété (H1), on obtient...`

suivi d'une description de $P(x)$.

Rédiger 3 :

Pour *démontrer* la propriété universelle $\boldsymbol{\forall x \in X, P(x)}$, on écrit :

`Soit` $\boxed{x} \in X$ `[et montrons` $P(x)$`].`

Pour *utiliser* la propriété universelle $\boldsymbol{\forall y \in X, P(y)}$ présente dans le contexte, on a besoin d'un élément x de X également dans le contexte, et on écrit par exemple :

`En appliquant la propriété ... à` x`, on obtient` $P(x)$`.`

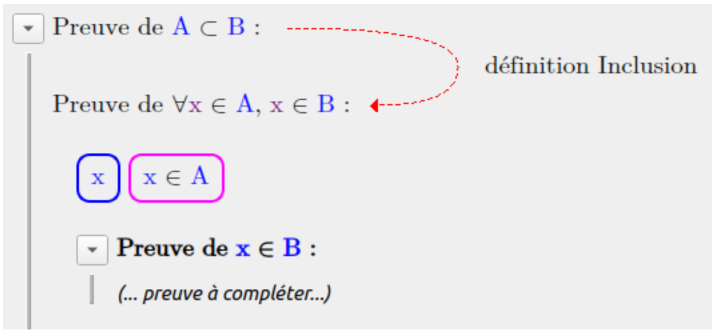
A.3 Rédaction efficace

En pratique, on résume souvent plusieurs étapes de rédaction en une seule phrase. Par exemple, supposons qu'on veuille démontrer l'inclusion $A \subset B$. On écrira :

`Soit` $x \in A$`, montrons que` $x \in B$`.`

On a ainsi résumé en une seule phrase :

1. le fait de dérouler la définition de l'inclusion : $\boldsymbol{\forall x \in X, (x \in A) \Rightarrow (x \in B)}$;
2. l'introduction de x pour montrer la propriété universelle ;
3. l'introduction de l'hypothèse $\boldsymbol{x \in A}$ pour montrer l'implication $\boldsymbol{(x \in A) \Rightarrow (x \in B)}$.



En pratique, il est très important de faire ce genre de compression, pour ne pas se noyer dans des détails sans importance. Dans DV∃DUCTION, on peut se passer de la première étape (à partir du niveau intermédiaire) ; il faut un clic pour chacune des deux autres étapes.

De même, on pourra compresser l'utilisation de l'inclusion en écrivant par exemple :

`On a` $x \in A$ `et` $A \subset B$`,`
`on en déduit` $x \in B$`.`

On a nouveau compressé trois étapes :

1. dérouler la définition de l'inclusion ;
2. application de l'inclusion à l'élément x, pour obtenir l'implication $\boldsymbol{(x \in A) \Rightarrow (x \in B)}$;
3. application de cette implication à la propriété $\boldsymbol{x \in A}$.

Dans DV∃DUCTION, on pourra glisser la propriété $\boldsymbol{x \in A}$ sur la propriété $\boldsymbol{A \subset B}$ pour obtenir $\boldsymbol{x \in B}$.

Rédiger 4 :

Pour obtenir un texte lisible par un être humain, on compresse certaines étapes de la rédaction.

Exercice 27.— Compléter les débuts de preuves de façon efficace, avec rappel du but.

1. Montrons que $A \subset B$:

$$\ldots$$

2. (compresser 4 étapes !) Montrons que f est injective :

$$\ldots$$

`et montrons que` $x = y$.

Exercice 28.—

1. Le contexte contient les objets x, y et f et les propriétés "f injective", "$f(x) = f(y)$". Rédiger l'application de l'injectivité :

$$\ldots$$

2. Le but consiste à montrer $A \subset B$, le contexte contient $A \subset C$. Rédiger un début de preuve qui consiste à remplacer le but :

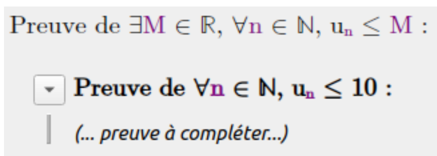
`Puisque ...                , il suffit de montrer ...`

A.4 Le quantificateur existentiel $\exists$

Le quantificateur existentiel sert à énoncer l'existence d'un objet au moins vérifiant une propriété donnée. Par exemple, le fait qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit majorée s'écrit

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

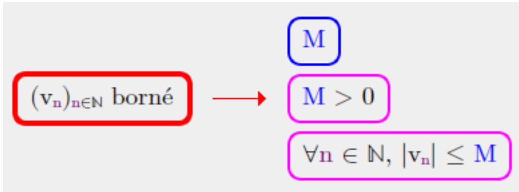
Démontrer Supposons que notre but soit une propriété existentielle $\boldsymbol{\exists x \in X, P(x)}$. Pour démontrer cette propriété, on doit fournir un élément de X, présent dans le contexte, pour lequel on est capable de montrer la propriété voulue ; cet objet est appelé **témoin**. Si le témoin est y, on écrira par exemple



`Montrons que` y `convient.`

suivi de la preuve de la propriété $P(y)$. (Notez la différence avec la preuve de la propriété $\forall x, P(x)$.) La preuve d'une propriété existentielle peut être difficile : si le contexte ne contient pas d'objet y vérifiant la propriété $P(y)$, on doit utiliser les autres propriétés connues, et parfois un peu d'imagination, pour fabriquer y.

Utiliser L'utilisation d'une propriété existentielle du contexte est, par contre, très facile : on obtient "gratuitement" un nouvel objet y dans le contexte, avec la propriété $P(y)$. C'est tellement facile qu'on a tendance à passer sous silence l'arrivée de ce nouvel objet, alors que c'est une information capitale qu'il faut absolument expliciter. Une erreur commune consiste ainsi à se contenter des symboles



$$\exists x \in X, P(x)$$

et à la ligne suivante d'utiliser un nouvel objet x du contexte. Cette pratique est mauvaise, parce qu'elle entretient la confusion entre variables libres et liées (voir aussi plus bas).

Rédiger 5 :

Pour *démontrer* la propriété existentielle $\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$, on a besoin d'un témoin qui est un objet y du contexte. On écrit alors

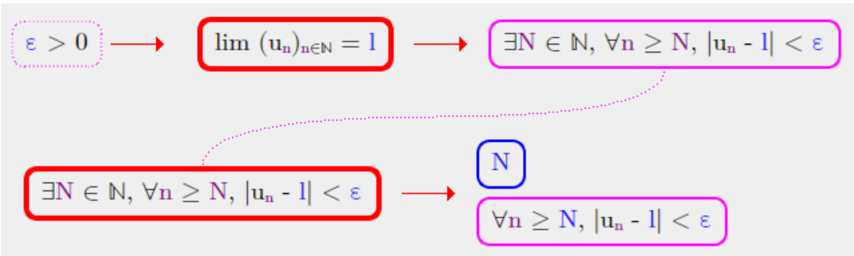
`Montrons que` y `convient [c'est-à-dire montrons la propriété` $P(y)$`].`

Lorsqu'on utilise une propriété existentielle du contexte, on écrit par exemple

`On obtient` $\boxed{y}$ `vérifiant` $P(y)$`.`

On évite la formulation : « Il existe y », ou pire : « $\exists y$ » qui invisibilise l'évènement important : un nouvel objet appelé y est apparu dans le contexte.

L'utilisation d'une propriété universelle arrive souvent en combinaison avec une propriété existentielle. Par exemple, supposons qu'on sache que $\lim(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \ell$, et qu'on ait dans le contexte un nombre $\varepsilon > 0$. On peut lui appliquer la définition de la limite ($\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que...). Ici encore, on compressera plusieurs étape en écrivant :



`En appliquant à` ε `la propriété de limite, on obtient un entier` N `tel que...`

Exercice 29.—

1. Rédiger l'utilisation de la propriété « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée » :

...

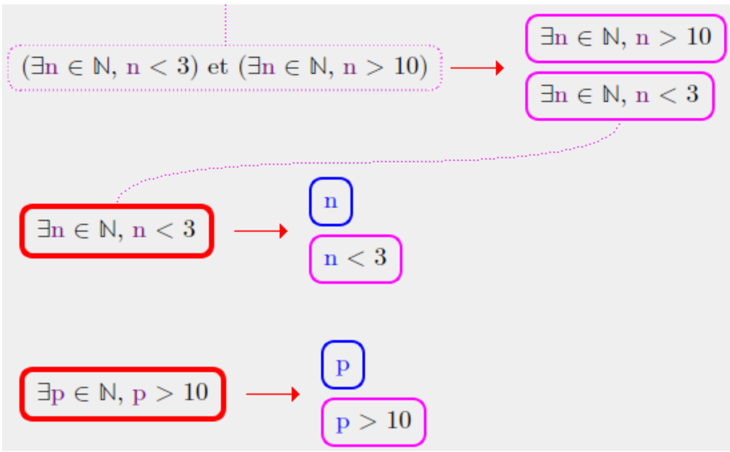
A.5 Variables d'une démonstration

Variables libres et liées[2] Il est crucial de comprendre que, dans la formule $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ la variable x est liée. Cela signifie qu'elle est enfermée à l'intérieur de la formule, et n'interagit pas avec le monde extérieur, le contexte. En particulier, on peut renommer cette variable. **L'énoncé $\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y})$ est exactement le même énoncé que $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$.**

De même, la variable x dans un énoncé existentiel $\exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ est liée au quantificateur $\exists$. Bien sûr, l'utilisation de cette propriété fournit immédiatement une variable du contexte, que l'on appelle souvent du même nom x. Cependant, si le contexte contient déjà un objet appelé x, on doit faire attention à nommer différemment notre nouvelle variable qui n'a *a priori* rien à voir avec l'autre x.

2. Le début de cette section est librement adaptée d'un texte de Patrick Massot.

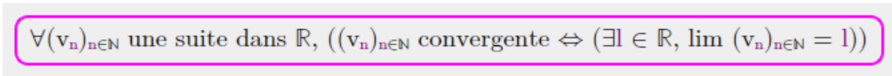
Par exemple, les deux énoncés $\exists n \in \mathbb{N}, n < 3$ et $\exists n \in \mathbb{N}, n > 10$ sont vrais, mais il n'existe aucun entier naturel qui soit à la fois supérieur à 10 et inférieur à 3 ! Ceci montre bien que les deux variables n qui y apparaissent n'ont a priori aucun lien entre elles, bien qu'elles portent le même nom dans les deux propriétés.



Par contraste, on dit parfois que les variables du contexte sont *libres*. Dans D∀∃DUCTION, les variables libres sont representées en bleu, les variables liées en violet.

Exemples Voici quelques exemples. Supposons qu'on ait une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le contexte. Notons déjà que la variable n n'est pas libre, elle sert simplement à désigner les termes de la suite : le contexte ne contient pas de variable n.

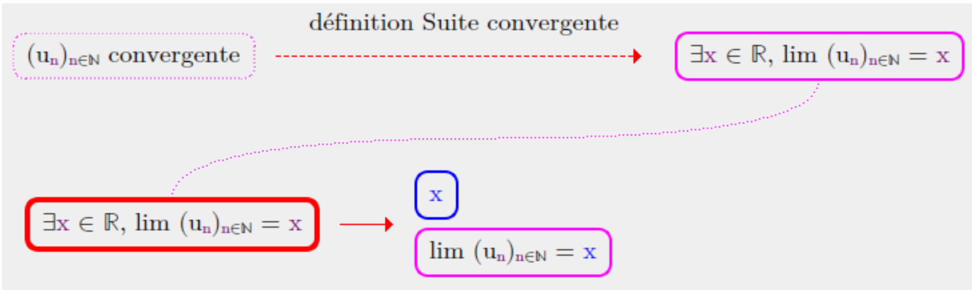
1. Je rappelle la définition de convergence :



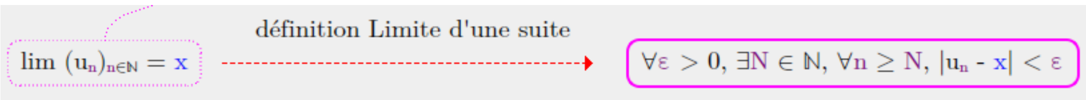
$$\texttt{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \texttt{ converge} \Leftrightarrow \quad \exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \lim(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \ell.$$

Noter que le simple rappel de cette définition ne signifie pas que la suite converge ! En particulier, la variable ℓ est liée à la définition, **aucune nouvelle variable n'est apparue dans le contexte**.

2. J'ai une propriété me disant que ma suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge : cette propriété me fournit un réel x tel que $\lim(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = x$: le contexte contient maintenant la nouvelle variable x et la nouvelle propriété $\lim(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = x$.



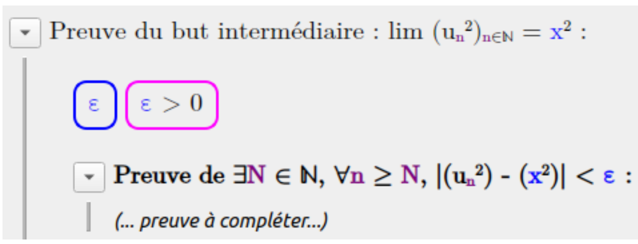
3. Je déroule la définition de $\lim(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = x$: j'obtiens la propriété



$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \geq 0, \ \forall n \geq n_0, \ |u_n - x| < \varepsilon.$$

Les variables ε, n_0, n sont liées à leurs quantificateurs : **le fait d'écrire cette propriété n'introduit aucune nouvelle variable dans le contexte**.

4. Je veux montrer, disons, que la suite $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ^2. Pour ça, je prends un $\varepsilon > 0$ et je cherche un rang N tel que *etc.*. Le contexte contient maintenant la nouvelle variable ε, et la propriété $\varepsilon > 0$. Par contre, le N apparaissant dans le rappel du but ("je cherche un N") sert juste à rappeler le but (qui est une propriété d'existence, $\exists N \in \mathbb{N}, \ldots$) ; c'est à nouveau une variable liée.



Pour suivre l'évolution du contexte au cours de la preuve, il faut donc bien distinguer les différents usages des quantificateurs : pour *énoncer* une propriété, pour *démontrer* une propriété, pour *utiliser* une propriété du contexte. Enoncer une propriété ne modifie pas le contexte. En réalité, il y a très peu de façons d'introduire des nouvelles variables libres :

Rédiger 6 :

Toutes les variables globales apparaissant dans le contexte au cours de la preuve proviennent

1. ou bien de l'introduction d'une variable pour montrer une propriété universelle : on introduit x dans le but de montrer $\forall x, P(x)$, comme dans l'exemple 4 ;
2. ou bien de l'application d'une propriété d'existence qui est apparue dans le contexte, comme dans l'exemple 2 ;
3. ou bien de l'introduction d'une nouvelle notation.

La rédaction doit faire apparaitre clairement l'apparition de variables du contexte par les procédés 1, 2 ou 3 : ceci permet au lecteur de connaitre à tout moment le contenu exact du contexte. **Les variables liées à des quantificateurs ne font pas partie du contexte**, on ne peut pas les utiliser dans la suite de la démonstration.

Pour introduire une notation, on écrit par exemple :

`Posons` $\epsilon' = 10\epsilon$.

Ici la variable ϵ est supposée exister dans le contexte, et on introduit la nouvelle variable ϵ'.

Certaines introduction de variables peuvent sembler ne provenir d'aucun des deux procédés de l'encadré. Par exemple, lorsqu'on veut construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut se fixer un entier n et déterminer alors le nombre u_n associé. Ceci correspond en fait à la démonstration d'un but intermédiaire, du type

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n \in \mathbb{R}, \quad P(n)$$

où $P(n)$ est la propriété que l'on cherche à obtenir pour notre suite. L'introduction de la variable n provient bien du procédé 1 pour démontrer ce but intermédiaire, même si celui-ci n'apparait pas explicitement.

Rédiger 7 : résumé des points délicats

1. Le lecteur doit savoir à tout moment ce qu'on cherche à démontrer. On démarre donc la preuve en énonçant le contexte et le but.
2. **Le but.** Il est conseillé de rappeler le but en cours lorsqu'il a beaucoup changé. Lors d'une preuve de la convergence d'une suite, on peut écrire par exemple :

   `Il reste à montrer que` n_0 `convient, c'est-à-dire :` $\forall n \geq n_0, u_n > M$.

   Attention, la variable n de cet exemple est liée à la phrase logique par le quantificateur $\forall$: **ce rappel du but n'a pas changé le contexte, qui ne contient pas d'objet appelé n**. De même, on ne peut pas *utiliser* la propriété énoncée : elle ne fait pas partie du contexte, puisque c'est ce qu'on cherche à montrer.
3. **Le contexte.** Le lecteur doit pouvoir reconstituer le contexte au fur et à mesure de la preuve, sans aucune ambiguité. Pour ça, **toutes les introductions de variables dans le contexte doivent être signalées** :
   — pour montrer une propriété universelle : `Soit` $x \in X$ `...`
   — Lorsqu'on applique une propriété d'existence : `On peut choisir` $x \in X$ `tel que ...`
   De même, on signale les propriétés introduites dans le contexte, par exemple pour montrer une implication :

   `Supposons que ...`

   Le raisonnement ne peut pas faire référence à des variables ou des propriétés qui ne font pas partie du contexte.
4. **Utilisation d'une définition ou d'un théorème.** On n'a pas besoin d'écrire des définitions complètes au cours de la démonstration. Par exemple, pour démontrer une injectivité, on écrit :

   `Montrons que` f `est injective. Soient` $x, x' \in X$`, supposons que` $f(x) = f(x')$`, et montrons que` $x = x'$`.`

   et pas

   `Montrons que` f `est injective :`

   $$\cancel{\forall x, x' \in X, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'}$$

   qui ne signalerait pas l'introduction dans le contexte des variables x et x' et de la propriété $f(x) = f(x')$. Même consigne lorsqu'on utilise une propriété ou lorsqu'on applique un théorème :

   `Puisque` f `est injective et que` $f(x) = f(x')$`, on obtient` $x = x'$`.`
5. **Utilisation des symboles.** **Les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, $\iff$, etc. sont utilisés seulement pour énoncer une propriété**, pas pour expliquer un raisonnement, et donc à éviter dans une démonstration en dehors des rappels de but. Par exemple :
   — Pour démontrer une propriété universelle, on écrit :

   `Soit` $x \in X$

   et non pas $\cancel{\forall x \in X}$ ni ~~`pour tout` $x \in X$~~ .
   — Pour utiliser une propriété d'existence, on écrit :

   `On peut choisir/trouver/obtenir` $x \in X$ `tel que ...`

   et non pas ~~$\exists x \in X$ `tel que`~~ .
   — Pour utiliser une implication, on écrit par exemple :

   $x \in A$`, or` $A \subset B$`, donc` $x \in B$

   $f(x) = f(x')$`, or` f `est injective, donc` $x = x'$

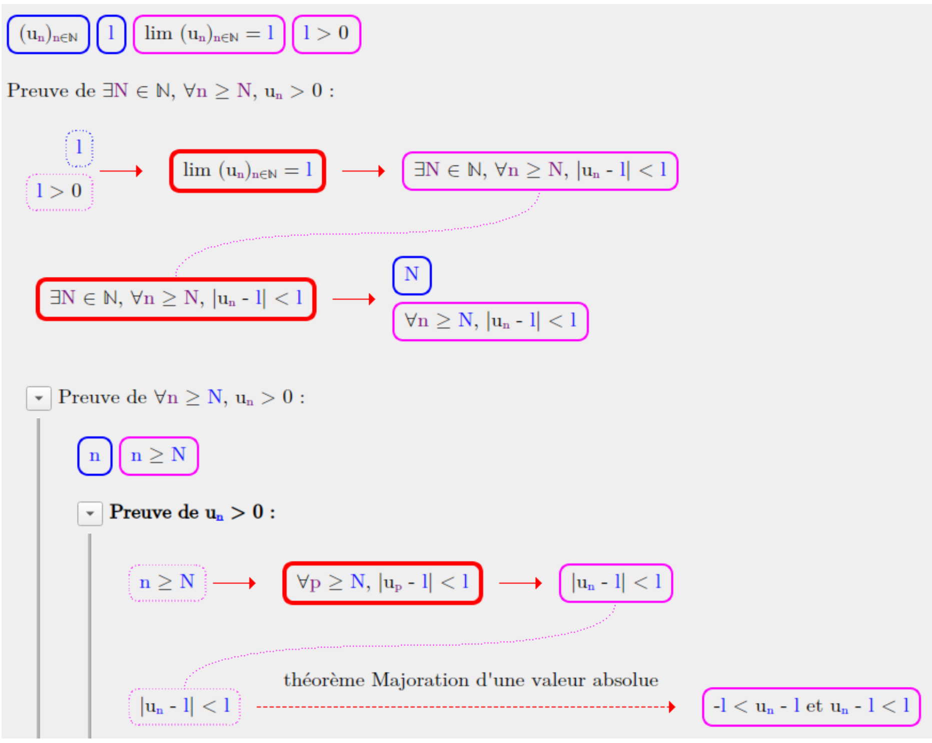
   et non pas $\cancel{x \in A \Rightarrow x \in B}$. $\cancel{f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'}$

B Des corrigés

B.1 Utilisation d'une propriété de limite

Exercice 10.5 Soit $\boxed{(u_n)_{n\geq 0}}$ une suite qui converge vers un réel $\boxed{\ell}$. On suppose que $\ell > 0$. Montrer que la suite est strictement positive à partir d'un certain rang : $\boxed{\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > 0.}$

Analyse de l'énoncé *Il s'agit d'**utiliser** une hypothèse de limite ; la difficulté est alors de trouver **quelle valeur donner à la variable** ϵ de la définition pour obtenir une information intéressante. Ici l'objectif est de trouver un rang à partir duquel la suite est > 0. Pour trouver cette valeur, on peut faire un dessin de l'axe réel, sur lequel on représente l'hypothèse $\ell > 0$: le nombre ℓ est placé à droite de 0. On imagine qu'on a choisi un ϵ et on représente alors l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \epsilon[$ qui va contenir tous les termes u_n pour n assez grand. Si on veut trouver des termes > 0, cet intervalle nous sera utile s'il est assez petit, et très précisément si ϵ a été choisi égal à ℓ (ou même inférieur). Ceci fait penser qu'il est intéressant d'appliquer la définition de limite avec $\epsilon = \ell$.*



Démonstration. En appliquant l'hypothèse de limite avec $\varepsilon = \ell$, on obtient un entier $\boxed{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| < \ell$.

Phrase type d'utilisation de la propriété de limite.

Montrons que N convient : $\boxed{\forall n \geq N, u_n > 0.}$
Soit $\boxed{n} \geq N$. Alors $|u_n - \ell| < \ell$, ou encore $\ell - \ell < u_n < \ell + \ell$. On obtient en particulier $0 < u_n$, ce qu'on voulait. □

Preuve d'un $\forall n \ldots$: on introduit une variable globale n.

Exercice 10.6 Soit $\boxed{(u_n)_{n\geq 0}}$ qui converge vers un réel $\boxed{l}$. Montrer que la suite est majorée : $\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, u_n \leq M.}$

Analyse de l'énoncé *La difficulté est du même type que dans l'exercice précédent : à quelle valeur de ϵ appliquer notre hypothèse de limite ? Ici le but est de trouver un majorant pour notre suite. La propriété de limite nous dit que tous les termes u_n pour n assez grand sont contenu dans un certain intervalle autour de la limite ℓ. Ces termes sont donc majorés par la borne gauche de l'intervalle, peu importe sa valeur. On voit qu'on obtient une information intéressante, peu importe la valeur de ε. On choisit dans ce cas une valeur simple, par exemple $\varepsilon = 1$. On obtient alors un majorant des termes u_n, mais seulement pour les valeurs de n supérieures au rang N donné par la propriété. La clé est de remarquer qu'il reste un nombre fini de termes (ceux de rang $< N$) dont il faut tenir compte. Ceci explique la définition du majorant M dans la preuve, définition qui peut sembler compliquée, mais qui tient compte à la fois des termes de rang supérieur à N et des termes de rang inférieur.*

Démonstration. En appliquant l'hypothèse de limite avec $\varepsilon = 1$, on obtient un entier $\boxed{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| < 1$.

Utilisation de la propriété de limite.

Posons $\boxed{M} = \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, \ell + 1\}$. Montrons que M convient : $\boxed{\forall n \geq 0, u_n \leq M.}$

Soit $\boxed{n} \geq 0$.

On fait une preuve par disjonction de cas : l'argument diffère selon que $n < N$ ou $n \geq N$.

- Premier cas : $n < N$. Alors

$$u_n \leq \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}\} \leq M.$$

- Second cas : $n \geq N$. Alors

$$u_n \leq \ell + 1 \leq M.$$

Dans les deux cas on a obtenu $u_n \leq M$, ce qu'on voulait.

□

Exercice 10.8 Montrer que “les inégalités larges passent à la limite” : soient $\boxed{(v_n)_{n\geq 0}}$, $\boxed{(w_n)_{n\geq 0}}$ deux suites réelles, et $\boxed{\ell}$, $\boxed{\ell'}$ deux nombres réels tels que

$$\lim(v_n)_{n\geq 0} = \ell \text{ et } \lim(w_n)_{n\geq 0} = \ell'.$$

Montrer que $\boxed{\text{si pour tout } n \geq 0,\ v_n \leq w_n, \text{ alors } \ell \leq \ell'}$. *Aide : raisonner par contraposée.*

Analyse de l'énoncé *Nous allons raisonner par contraposée : autrement dit, on change le but en :* $\boxed{\textit{si } \ell > \ell', \textit{ alors } \exists n \geq 0,\ v_n > w_n.}$ *On commence donc le raisonnement en supposant $\ell > \ell'$. Nous avons toujours cette difficulté : à quelles valeurs de ε appliquer nos hypothèses de limites ? Ces hypothèses nous disent qu'à partir d'un certains rang, les termes v_n vont être dans un petit intervalle autour de ℓ, et les termes w_n dans un petit intervalle autour de ℓ'. Pour obtenir l'inégalité voulue, on aimerait que ces deux intervalles soient disjoints : sachant que $\ell > \ell'$, les termes v_n seront alors supérieurs aux termes w_n. Par exemple, on sera dans cette situation si les deux intervalles ont une borne commune, qui pourrait être le milieu du segment entre ℓ' et ℓ.* ***Faire un dessin et trouver alors la valeur de ε à utiliser !***

Démonstration. Supposons $\ell > \ell'$, $\boxed{\text{on cherche } n \geq 0 \text{ tel que } v_n > w_n.}$
En appliquant les deux hypothèses de limites à $\varepsilon = (\ell' - \ell)/2$, on obtient deux entiers $\boxed{\text{N}}$, $\boxed{\text{N'}}$ tels que

Attention, N et N' n'ont aucune raison d'être égaux.

$$\forall n \geq N, |v_n - \ell| < \frac{1}{2}(\ell' - \ell) \quad \text{et} \quad \forall n \geq N', |w_n - \ell'| < \frac{1}{2}(\ell' - \ell).$$

Soit $\boxed{\text{n}} = \max(N, N')$. Il reste à vérifier que n convient : $\boxed{v_n > w_n.}$
Puisque $n \geq N$, on a l'inégalité sur v_n et en particulier

$$v_n > \ell - \frac{1}{2}(\ell' - \ell).$$

De même, on a $n \geq N'$ et donc

Toutes ces inégalités sont guidées par ce qu'on vu sur le dessin.

$$w_n < \ell' + \frac{1}{2}(\ell' - \ell).$$

En simplifiant les deux termes de droites, on voit qu'ils ont la même valeur :

Cette phrase aide le lecteur à lire le calcul qui suit.

$$\ell - \frac{1}{2}(\ell' - \ell) = \ell' + \frac{1}{2}(\ell' - \ell) = \frac{1}{2}(\ell' + \ell).$$

D'où

$$w_n < \frac{1}{2}(\ell' + \ell) < v_n.$$

Ce qui termine la preuve. □

C Thèmes de recherche biblio

Voici une liste de sujets possibles. Il faut se répartir par groupes de 3 ou 4, et que chaque groupe choisisse un sujet.

- (historique, vaste) Histoire de la démonstration mathématique
- (historique, précis) La formalisation de la notion de limite au XIXème siècle
- (Logique élémentaire) La déduction naturelle de Gentzen
- (Logique intermédiaire) Le calcul des prédicats
- (Logique avancée) La théorie des types en logique mathématique
- (vaste, didactique) L'apprentissage du raisonnement en maths.
- (précis, didactique) L'utilisation d'assistant de preuve pour l'apprentissage de la démonstration en maths.
- (maths-informatique) L'assistant de preuve Coq (ou Lean, au choix).

D Objectifs

D.1 Compétences de rédaction à acquérir

La plupart des points renvoient d'une part à l'utilisation du logiciel, d'autre part à la rédaction sur feuille.

1. Démontrer $P \Rightarrow Q$.
2. Démontrer $\forall x \in X, P(x)$.
3. Utiliser $\exists x \in X, P(x)$.
4. Toute variable du contexte est introduite dans le cadre de 2 ou de 3.
5. Utiliser $P \Rightarrow Q$.
6. Utiliser $\forall x \in X, P(x)$.
7. Démontrer $\exists x \in X, P(x)$.
8. Utiliser et démontrer P ou Q.
9. Utiliser une propriété compliquée de façon synthétique (par exemple l'injectivité).
10. Utiliser la négation (y compris preuve par l'absurde, par contraposée).
11. Chercher un contre-exemple (savoir définir précisément ce qu'on cherche).

Les points 1, 2, 3 sont de l'ordre du réflexe, on les applique "automatiquement". Les points 5, 6, 7 nécessite un peu de recul (trouver P dans le contexte, trouver un x auquel appliquer la propriété universelle, trouver un x qui vérifie la propriété existentielle voulue).

(1) Les exos du tutoriel travaillent démontrer / utiliser $\forall$, $\Rightarrow$, et 'OU' (Utiliser $\Rightarrow$ implicitement seulement, via l'inclusion).

(2) $A \subset f^{-1}(f(A))$ fait travailler démontrer $\exists$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$ utiliser $\exists$.

Expliquer : utilisation du "=", obtention directe de "$f(x) \in A$" à partir de $x \in A$" à l'aide du "théorème image directe" (sélectionner f avant d'appliquer le théorème!!).

D.2 Compétences de théorie des ensembles

1. comprendre les définitions : inclusion, image directe, image réciproque, injectivité, surjectivité.
2. Retenir les définitions.
3. Démontrer / utiliser une propriété du type $A \subset B$, $A = B$, $y \in f(A)$, $x \in f^{<-1>}(B)$, f injective, f surjective.
4. Dessiner des contre-exemples.

D.3 Compétences d'analyse

1. comprendre les définitions : limite, continuité.
2. Retenir les définitions.
3. Démontrer une propriété de limite.

E Fiches définitions

E.1 Inclusion

Définition. Soient X un ensemble, et A et B deux parties de X.

$$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B.$$

Démontrer que $A \subset B$:
* Soit $\boxed{x} \in A$, montrons que $x \in B$.

Utiliser l'inclusion $A \subset B$ du contexte :
* Nous savons que $x \in A$ et que $A \subset B$, donc $x \in B$.

E.2 Intersection

Définition. Soient X un ensemble, A et B deux parties de X, et x un élément de X.

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B.$$

Démontrer que $x \in A \cap B$:
* Montrons d'abords que $x \in A$, puis que $x \in B$.

Utiliser la propriété $x \in A \cap B$ du contexte :
* Nous savons que $x \in A \cap B$, donc $x \in A$ et $x \in B$.

E.3 Union

Définition. Soient X un ensemble, A et B deux parties de X, et x un élément de X.

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Démontrer que $x \in A \cup B$:
* $x \in A$, donc $x \in A \cup B$.

ou, selon les cas,
* $x \in B$, donc $x \in A \cup B$.

*(on démontre **une seule** des deux propriétés, au choix.)*

Utiliser la propriété $x \in A \cup B$ du contexte :
* Nous savons que $x \in A \cup B$.

Premier cas : supposons d'abord que $x \in A$. $(\ldots)$
Second cas : supposons maintenant que $x \in B$ $(\ldots)$.

E.4 Image réciproque

Définition. Soient X, Y deux ensemble, $f : X \to Y$ une application, B une partie de Y, et x un élément de X.

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$

Démontrer que $x \in f^{-1}(B)$:
* Montrons que $x \in f^{-1}(B)$, c'est-à-dire que $f(x) \in B$.

Utiliser la propriété $x \in f^{-1}(B)$ du contexte :
* Nous savons que $x \in f^{-1}(B)$, c'est-à-dire $f(x) \in B$.

E.5 Image directe

Définition. Soient X, Y deux ensemble, $f : X \to Y$ une application, A une partie de X, et y un élément de Y.

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x).$$

Démontrer que $y \in f(A)$:
* Montrons que $y \in f(A)$: cherchons un élément x de A tel que $f(x) = y$.

Variante, ***si on a déjà un élément x du contexte qui est dans A*** *:*
* Puisque x est dans A, $f(x)$ est dans $f(A)$.

Utiliser la propriété $y \in f(A)$ du contexte :
* Nous savons que $y \in f(A)$, on peut donc trouver un $\boxed{x} \in A$ tel que $f(x) = y$.
(le contexte contient maintenant le nouvel objet x et les propriétés $x \in A$, $f(x) = y$.)

E.6 Injectivité

Définition. Soient X, Y deux ensembles, et $f : X \to Y$ une application. L'application f est dite injective si :

$$\forall x, x' \in X, (\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\ ).$$

Démontrer que f est injective :
* Montrons que f est injective : soient $\boxed{x_1}$, $\boxed{x_2}$ $\in X$, supposons que $f(x_1) = f(x_2)$. Nous allons montrer que $x_1 = x_2$.

Utiliser la propriété "f est injective" du contexte :
(Le contexte doit contenir aussi deux éléments x_1, x_2 de X vérifiant l'égalité $f(x_1) = f(x_2)$.)
* On a f injective, or $f(x_1) = f(x_2)$, on en déduit $x_1 = x_2$.

E.7 Surjectivité

Définition. Soient X, Y deux ensembles, et $f : X \to Y$ une application. L'application f est dite surjective si :

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X \text{ tel que } f(x) = y.$$

Démontrer que f est surjective :
* Montrons que f est surjective : soit $\boxed{y} \in Y$, cherchons un élément x de X tel que $f(x) = y$.

Utiliser la propriété "f est surjective" du contexte :
(Le contexte contient aussi un élément y de Y.)
* L'application f est surjective, donc on peut trouver un $\boxed{x} \in X$ tel que $f(x) = y$.