Atelier de Recherche Encadrée :
Construction d'un raisonnement mathématique à l'aide du logiciel D∃∀DUCTION

Table des matières

1 Introduction à la preuve assistée par ordinateur

Exercice 1.—

1. Lancer le logiciel D∃∀DUCTION (on le trouve dans la page des applications, icones avec les petits carrés en bas à gauche). Choisir le dossier **Ateliers**, puis le fichier de cours intitulé **Tutoriel**.

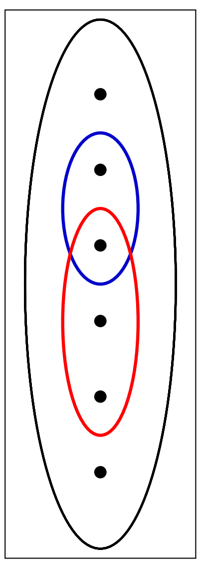
2. Faire les exercices, en demandant de l'aide chaque fois que vous en avez besoin.

3. Le dernier exercice est un bilan, qui vous permet de voir si vous avez compris le fonctionnement du logiciel (et un peu de maths !).

4. Compléter le dessin sur l'union et l'intersection ci-dessous, ainsi que les définitions.

5. Remplir la fiche d'auto-évaluation (page suivante) et la rendre à l'enseignant.

Union, intersection



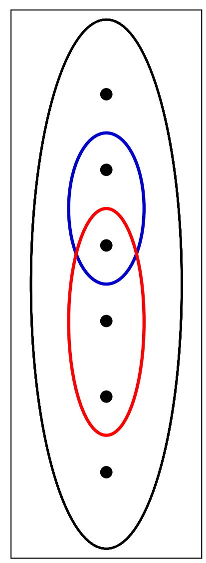


FIGURE 1 – A gauche, entourer la réunion du sous-ensemble bleu et du sous-ensemble rouge. A droite, entourer leur intersection.

Complétez les définitions :

•$x \in A \cap B \iff \ldots$

•$x \in A \cup B \iff \ldots$

Auto-évaluation 1

1. J'ai globalement compris comment fonctionne le logiciel.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.
2. Pour démontrer une propriété de la forme $\forall x, P(x)$, j'utilise le bouton ...
   En réponse, le logiciel ...
3. Pour démontrer une propriété de la forme $P \Rightarrow Q$, j'utilise le bouton ...
   En réponse, le logiciel ...
4. Pour démontrer une propriété de la forme P **et** Q, j'utilise le bouton ...
   En réponse, le logiciel ...
5. Pour démontrer une propriété de la forme P **ou** Q, j'utilise le bouton ...
   En réponse, le logiciel ...
6. Je connais les définitions de l'intersection et de l'union.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

Je me mets une note (1 point par question) : .../6

Commentaires libres sur cette séance : ...

2 Images directes et réciproques

Définitions

Soit $f : X \to Y$ une application, et A une partie de X. **L'image directe de A par f**, notée $f(A)$, est la partie de Y constituée des images par f des éléments de A :

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Autrement dit, on a l'équivalence logique

$$\boxed{y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)}$$

Soit maintenant B une partie de Y. **L'image réciproque de B par f**, notée $f^{\langle -1 \rangle}(B)$, est la partie de X constituée des éléments dont l'image par f est dans B :

$$f^{\langle -1 \rangle}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Autrement dit, on a l'équivalence logique

$$\boxed{x \in f^{\langle -1 \rangle}(B) \iff f(x) \in B}$$

On dit aussi **image** au lieu d'image directe, et **pré-image** au lieu d'image réciproque. [1]

Soient maintenant $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. La **composée** (ou *composition*) de f et de g est l'application qui à tout x de X associe $g(f(x))$. Cette application est notée $g \circ f : X \to Z$.

Dans D∃∀DUCTION, les définitions **image directe** et **images réciproques** permettent de ré-écrire des propriétés en passant de gauche à droite ou de droite à gauche dans les deux équivalences encadrées ci-dessus. La définition de la composition permet de ré-écrire une expression du type “$g \circ f(x)$” en “$g(f(x))$” et réciproquement.

Exercice 2.— Complétez les dessins des pages suivantes concernant les images directes et réciproques, et la composée de deux fonctions.

---

1. On utilise habituellement la notation $f^{-1}(B)$ au lieu $f^{\langle -1 \rangle}(B)$. Ce qui est important, c'est de bien comprendre qu'il y a **deux concepts distincts** :
   - d'une part, si $f : X \to Y$ est une **bijection**, elle admet une bijection réciproque qu'on note $f^{-1} : Y \to X$;
   - d'autre part, pour n'importe quelle application $f : X \to Y$ **(bijective ou non)** et $B \subset Y$, on peut définir $f^{\langle -1 \rangle}(B)$.

   La notation $f^{\langle -1 \rangle}(B)$ utilisée ici sert à éviter la confusion. Libre à vous de choisir l'une ou l'autre des deux notations.

Exercices

Soient $f : X \to Y$, A une partie de X, B une partie de Y. On s'intéresse aux questions questions suivantes :

$$\boxed{\textit{A-t-on toujours } A = f^{\langle -1\rangle}(f(A)) \textit{ ? A-t-on toujours } B = f(f^{\langle -1\rangle}(B)) \textit{ ?}}$$

Exercice 3.—

1. Utilisez D∃∀DUCTION pour essayer de démontrer les quatre inclusions. Les énoncés se trouvent dans le fichier intitulé **Ensembles et applications**.

Concernant l'égalité $A = f^{\langle -1\rangle}(f(A))$, vous avez probablement réussi à démontrer une inclusion, mais pas l'autre. Peut-être n'est-elle pas toujours vraie ?

2. Dessiner des exemples simples d'application f sous forme de "patates", puis une partie A de l'ensemble de départ, déterminer $f(A)$, puis $f^{\langle -1\rangle}(f(A))$. Sur votre exemple, a-t-on $A = f^{\langle -1\rangle}(f(A))$? Essayez d'obtenir un exemple où l'égalité n'est pas vérifiée. Essayez d'obtenir un exemple simple (avec peu d'éléments dans X et Y).

3. Mêmes questions avec l'égalité $B = f(f^{\langle -1\rangle}(B))$.

Exercice 4.— Utilisez D∃∀DUCTION pour démontrer les formules d'images directes et réciproques par une fonction composée :

$$(g \circ f)^{\langle -1\rangle}(C) = g^{\langle -1\rangle}(f^{\langle -1\rangle}(C)), \qquad (g \circ f)(A) = g(f(A)).$$

Exercice 5.—(optionnel) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = x^2$.

1. Soit $A = [-2, -1]$, déterminer $f(A)$.

2. Soient $B = [1, 2]$ et $B' = [-2, -1]$. Déterminez $f^{\langle -1\rangle}(B)$ et $f^{\langle -1\rangle}(B')$.

Applications

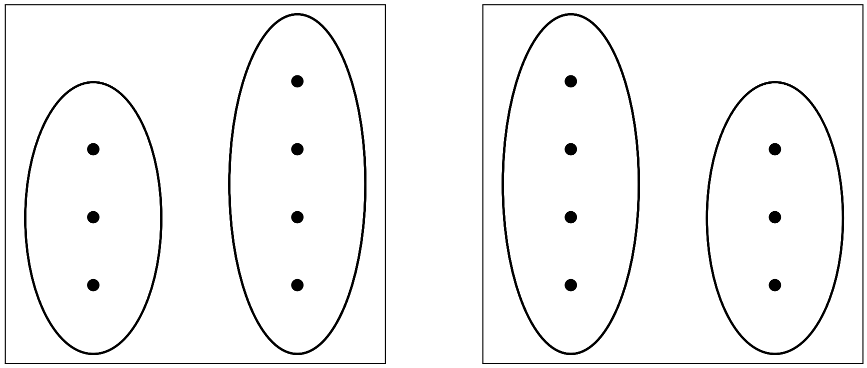


Figure 2 – Ajouter des flèches pour représenter deux applications quelconques.

Composition

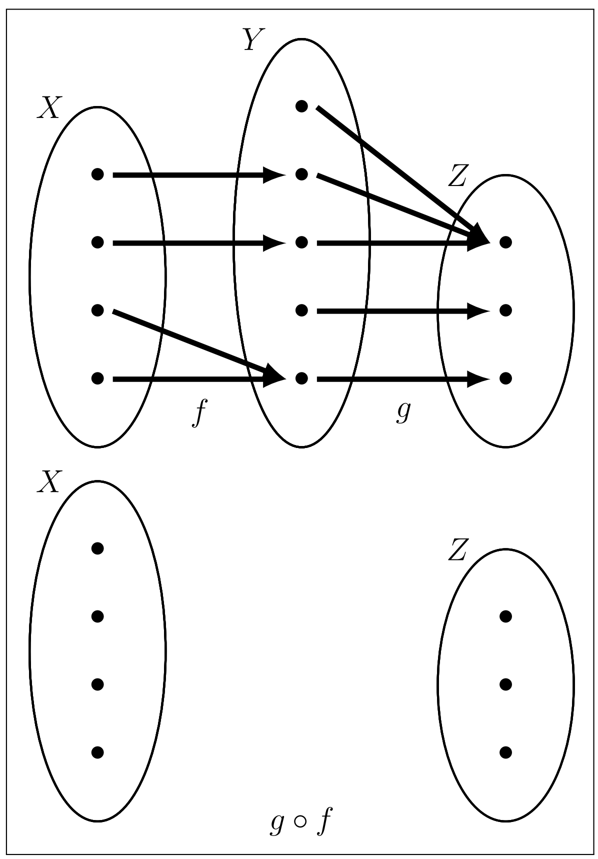


Figure 3 – Ajoutez les flèches pour que l'application obtenue soit la composée de f et de g.

Image directe, image réciproque

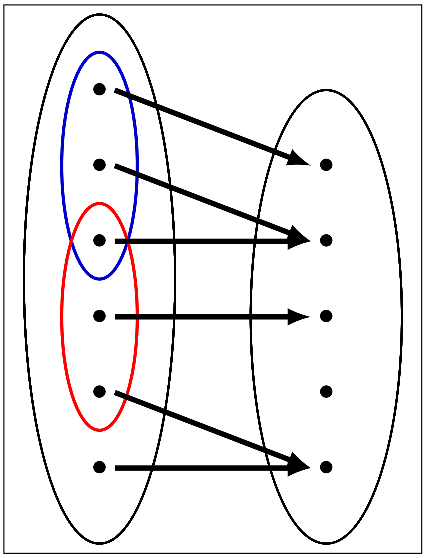


FIGURE 4 – Représenter l'image du sous-ensemble bleu et celle du sous-ensemble rouge.

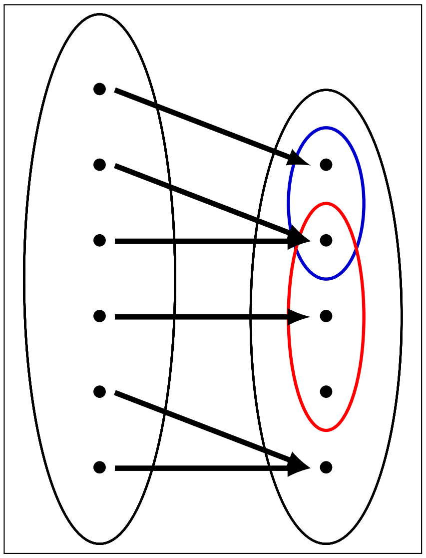


FIGURE 5 – Représenter l'image réciproque du sous-ensemble bleu et celle du sous-ensemble rouge.

Auto-évaluation 2

1. Etant donné un diagramme avec deux patates et des flèches entre les deux, je sais reconnaitre si le diagramme définit une application.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

2. J'ai compris la définition de la composée de deux applications.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

3. J'ai compris les définitions d'image directe et d'image réciproque d'un ensemble par une application.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

4. J'ai montré avec D∃∀DUCTION les égalités sur les images directes et réciproques par une composition.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

5. J'ai pu montrer avec D∃∀DUCTION une inclusion entre A et $f^{\langle -1 \rangle}(f(A))$, et une inclusion entre B et $f(f^{\langle -1 \rangle}(B))$.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

6. J'ai pu construire au moins un contre-exemple avec des patates.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

7. Ces exercices m'ont amusé·e !
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

Je me mets une note (1 point par question) : .../7

Commentaires libres sur cette séance : ...

3 Rédiger une preuve

Exercice 6.—

1. Utilisez D∃∀DUCTION pour démontrer que si f est une application de X dans Y, et si A et A' sont deux parties de X telles que $A \subset A'$, alors $f(A) \subset f(A')$.

2. Le tableau page suivante décrit une preuve possible avec le logiciel : on a écrit une phrase pour chaque appui sur un bouton. Mais la preuve obtenue est tellement détaillée qu'elle est difficile à lire ! Pour obtenir une rédaction acceptable, barrez les phrases qui vous semblent inutile, mettez entre crochet celles qui vous semble non essentielles, regroupez éventuellement certaines phrases.

3. Mêmes questions pour la propriété suivante : si B et B' sont deux parties de Y, et si $B \subset B'$, alors $f^{\langle -1 \rangle}(B) \subset f^{\langle -1 \rangle}(B')$.

Exercice 7.— On veut démontrer les formules

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'), \quad f^{\langle -1 \rangle}(B \cup B') = f^{\langle -1 \rangle}(B) \cup f^{\langle -1 \rangle}(B').$$

Pour chacune des deux formules :

1. Utilisez D∃∀DUCTION pour la démontrer (ne pas hésiter à sauter les étapes répétitives).

2. Rédigez la démonstration, en vous inspirant de l'exercice précédent.

Exercice 8.— Montrer que les affirmations suivantes sont fausses :

$$\forall f : X \to Y, \forall A \subset X, \forall A' \subset X, \quad (f(A) \subset f(A') \Longrightarrow A \subset A').$$

$$\forall f : X \to Y, \forall B \subset Y, \forall B' \subset Y, \quad (f^{\langle -1 \rangle}(B) \subset f^{\langle -1 \rangle}(B') \Longrightarrow B \subset B').$$

On pourra s'inspirer de la séance précédente.

Structure des démonstrations

Un démonstration est une succession de phrases. Certaines phrases sont des hypothèses (« On suppose... », « Soit $x \in \mathbb{R}$ », ...). D'autres sont des propriétés qui se déduisent logiquement des hypothèses et des propriétés précédentes. Le but de la démonstration est de prouver qu'une propriété est vraie en enchainant une suite de déductions simples. La structure de la démonstration est souvent imposée par la forme de la propriété que l'on souhaite démontrer.

Exercice 9.— Compléter le tableau page 33.

Soient X, Y deux ensembles, et $f : X \to Y$. Montrons que

$$\forall A \subset X, \forall A' \subset X, (A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')).$$

$\forall$ Soit $A \subset X$, montrons que $\forall A' \subset X,\ A \subset A' \Longrightarrow f(A) \subset f(A')$.

$\forall$ Soit $A' \subset X$, montrons que $A \subset A' \Longrightarrow f(A) \subset f(A')$.

$\Rightarrow$ Supposons que $A \subset A'$, et montrons $f(A) \subset f(A')$.

défi Ce qui signifie, par définition de l'inclusion : $\forall y \in Y, y \in f(A) \Longrightarrow y \in f(A')$.

$\forall$ Soit $y \in Y$, montrons que $y \in f(A) \Longrightarrow y \in f(A')$.

$\Rightarrow$ Supposons $y \in f(A)$, montrons que $y \in f(A')$.

défi Puisque $y \in f(A)$, par définition de l'image directe, on a $\exists x \in A, f(x) = y$.

$\exists$ Considérons un tel x.

défi Par définition de l'image directe, le but $y \in A'$ s'écrit $\exists x_0 \in A', f(x_0) = y$.

$\exists$ Montrons que x convient, c'est-à-dire montrons que $x \in A'$ et $f(x) = y$.

défi On a $A \subset A'$, c'est-à-dire $\forall x_0 \in X, x_0 \in A \Longrightarrow x_0 \in A'$.

$\Rightarrow$ Puisque $x \in A$, on en déduit $x \in A'$.

But! On a donc $x \in A'$ et $f(x) = y$, ce qu'on voulait montrer.

Soient X, Y deux ensembles, et $f : X \to Y$. Montrons que

$$\forall B \subset Y, \forall B' \subset Y, (B \subset B' \Rightarrow f^{\langle -1 \rangle}(B) \subset f^{\langle -1 \rangle}(B')).$$

$\forall$ Soit $B \subset Y$, montrons que $\forall B' \subset X$, $B \subset B' \Longrightarrow f^{\langle -1 \rangle}(B) \subset f^{\langle -1 \rangle}(B')$.

$\forall$ Soit $B' \subset X$, montrons que $B \subset B' \Longrightarrow f^{\langle -1 \rangle}(B) \subset f^{\langle -1 \rangle}(B')$.

$\Rightarrow$ Supposons que $B \subset B'$, et montrons $f^{\langle -1 \rangle}(B) \subset f^{\langle -1 \rangle}(B')$.

défi Ce qui signifie, par définition de l'inclusion : $\forall x \in X, x \in f^{\langle -1 \rangle}(B) \Longrightarrow x \in f^{\langle -1 \rangle}(B')$.

$\forall$ Soit $x \in X$, montrons que $y \in f(A) \Longrightarrow y \in f(A')$.

$\Rightarrow$ Supposons $x \in f^{\langle -1 \rangle}(B)$, montrons que $x \in f^{\langle -1 \rangle}(B')$.

défi Par définition de l'image réciproque, il s'agit de monter que $f(x) \in B'$.

défi Puisque $x \in f^{\langle -1 \rangle}(B)$, par définition de l'image réciproque, on a $f(x) \in B$.

défi On a $B \subset B'$, c'est-à-dire $\forall y_0 \in Y, y_0 \in B \Longrightarrow y_0 \in B'$.

$\Rightarrow$ Puisque $f(x) \in B$, on en déduit $f(x) \in B'$.

But! Ce qu'on voulait.

Forme de la propriété	Comment la démontrer ?	Comment l'utiliser comme hypothèse ?
P et Q $\wedge$		
P ou Q $\vee$		
$P \Rightarrow Q$ Si P, alors Q $\Rightarrow$	• • Début de rédaction : $\ll$ $\gg$	
$P \Leftrightarrow Q$ P ssi Q $\Leftrightarrow$	• •	
$\forall a \in A,\ P(a)$ $\forall$	Début de rédaction : $\ll$ $\gg$	
$\exists a \in A,\ P(a)$ $\exists$		

Trois autres méthodes de preuves qu'on peut parfois utiliser :

-
-
-

Auto-évaluation 3

1. J'ai compris le principe pour rédiger une démonstration à partir d'un exercice résolu dans D∃∀DUCTION.

   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

2. Je préfère :
   (a) rédiger une démonstration selon le principe exposé plus haut,
   (b) rédiger une démonstration après avoir fait l'exercice avec D∃∀DUCTION, mais de façon plus directe, sans passer par la preuve super-détaillée,
   (c) résoudre l'exercice avec D∃∀DUCTION, puis fermer le logiciel et rédiger la démonstration directement sur mon cahier,
   (d) rédiger une démonstration sans utiliser du tout le logiciel.
   (e) autre : ...

3. J'ai réussi à rédiger une démonstration selon ce principe.

   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

4. J'ai rédigé une démonstration et je l'ai rendu à l'enseignant.

   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

5. Je sais construire des contre-exemples à l'aide de patates.

   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

6. J'ai compris le tableau page 33.

   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

7. J'ai retenu les définitions d'image et images réciproques.

   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

Je me mets une note (1 point par question) : .../7

Commentaires libres sur cette séance : ...

4 Injectivité, surjectivité

Définitions

Soit $f : X \to Y$ une application. On dit que f est **surjective** si tout élément de Y est l'image d'**au moins un** élément de X :

$$f \text{ surjective } \iff \forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y.$$

On dit que f est **injective** si tout élément de Y est l'image d'**au plus un** élément de X. En pratique, on utilisa la formulation équivalente suivante : f est injective si à chaque fois que deux éléments x, x' ont la même image, c'est qu'ils sont égaux :

$$f \text{ injective } \iff \forall x, x' \in X, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x').$$

Exercice 10.—

1. Complétez les dessins concernant injectivité et surjectivité dans les pages suivantes.

2. Utilisez D∃∀DUCTION pour montrer que la composée de deux applications injectives est injectives, et que la composée de deux applications surjectives est surjective.

3. On peut se demander si une condition d'injectivité ou de surjectivité portant seulement sur f, ou seulement sur g, pourrait suffire à assurer l'injectivité ou la surjectivité de la composée. Fabriquez, à l'aide de patates, deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ avec g surjective mais $g \circ f$ non surjective.

4. Fabriquez de même trois autres contre-exemples simples pour les trois autres affirmations.

Questions ouvertes

Comme avant, on se donne $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. On se pose les questions suivantes :

– si la composée $g \circ f$ est injective, f est-elle nécessairement injective ? g est-elle nécessairement injective ?

– Mêmes questions avec la surjectivité.

Autrement dit, on veut déterminer, parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies :

1. $\forall f : X \to Y, \forall g : Y \to Z, \quad (g \circ f \text{ injective} \implies f \text{ injective}).$
2. $\forall f : X \to Y, \forall g : Y \to Z, \quad (g \circ f \text{ injective} \implies g \text{ injective}).$
3. $\forall f : X \to Y, \forall g : Y \to Z, \quad (g \circ f \text{ surjective} \implies f \text{ surjective}).$
4. $\forall f : X \to Y, \forall g : Y \to Z, \quad (g \circ f \text{ surjective} \implies g \text{ surjective}).$

Exercice 11.—

1. Testez ces affirmations sur des exemples "en patates".

2. Utilisez D∃∀DUCTION pour démontrer celles qui vous paraissent vraies.

3. Rédiger les démonstrations. Rédigez les contre-exemples.

Injectivité

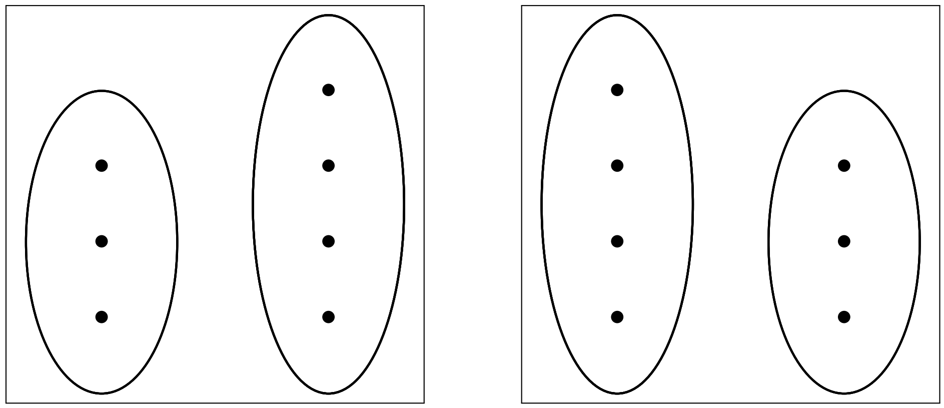


FIGURE 6 – Représenter, dans le cas où c'est possible, une application **injective**.

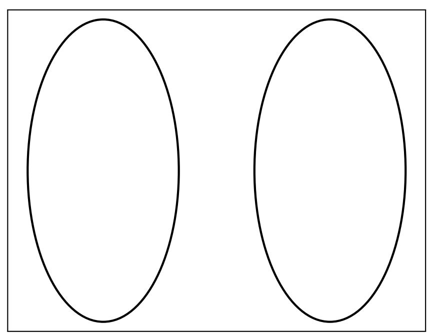


FIGURE 7 – Représenter une application **non injective** avec au moins 4 flèches.

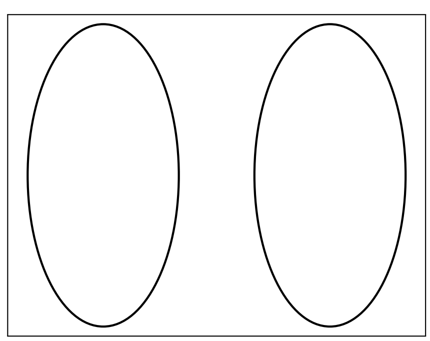


FIGURE 8 – Représenter une application **non injective** avec le moins de flèches possible...

Surjectivité

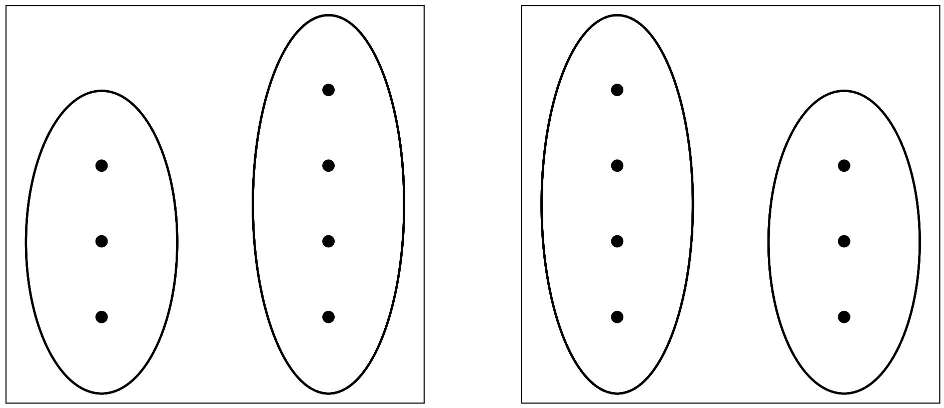


FIGURE 9 – Représenter, dans le cas où c'est possible, une application **surjective**.

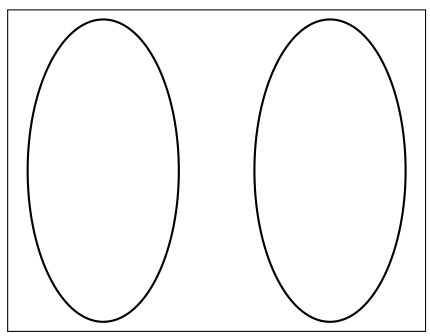


FIGURE 10 – Représenter une application **non surjective** avec au moins deux flèches.

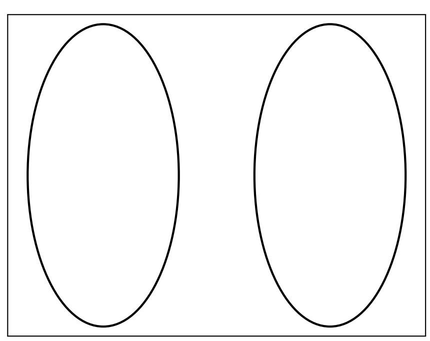


FIGURE 11 – Représenter une application **non surjective** avec une seule flèche...

Auto-évaluation 4

1. J'ai compris les définitions d'injectivité et de surjectivité.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

2. Je réussi à faire les exercices concernant ces notions avec D∃∀DUCTION.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

3. J'ai sais construire des contre-exemples impliquant ces notions.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

4. J'ai relu la démonstration rendue la fois précédente, et j'ai compris les commentaires de l'enseignant.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

5. J'ai rédigé une démonstration, que j'ai rendu à l'enseignant.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

Je me mets une note (1 point par question) : .../5

Commentaires libres sur cette séance : ...

5 Conjecturer, démontrer, rédiger

Exercice 12.— Pour chacune des propriétés suivantes, déterminez si elle est vraie ou fausse. Démontrez les propriétés ou les inclusions vraies à l'aide de D∃∀DUCTION et rédigez la démonstration. Donnez un contre-exemple pour les propriétés fausses.

1. $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
2. $f^{\langle -1 \rangle}(B \cap B') = f^{\langle -1 \rangle}(B) \cap f^{\langle -1 \rangle}(B')$.
3. f injective $\Longrightarrow f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
4. f surjective $\Longrightarrow f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

Exercice 13.— On a vu lors des séances précédentes que les formules $A = f^{\langle -1 \rangle}(f(A))$ et $B = f(f^{\langle -1 \rangle}(B))$ ne sont pas vraies. Montrer cependant qu'elles deviennent vraies si on suppose la bonne propriété sur f (injectivité ou surjectivité, à trouver !). On pourra utiliser D∃∀DUCTION !

Auto-évaluation 5

1. Pour déterminer si une propriété est vraie ou fausse, je préfère
   (a) Commencer par tester sur des exemples avec des patates,
   (b) Commencer par essayer de la démontrer avec D∃∀DUCTION,
   (c) autre : ….

2. J'ai compris les commentaires concernant la démonstration que j'ai rendue la séance précédente.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

3. J'ai rendu une démonstration rédigée à l'enseignant.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

Pas de notes cette fois-ci, on se détend !

Commentaires libres sur cette séance : …

6 Négations

Exercice 14.—

1. Complétez les “tables de vérité” définissant les connecteurs logiques **non**, **et**, **ou**, **implique**, **si et seulement si**.

2. Complétez le tableau de négation des connecteurs.

3. Quelle est la négation d'une affirmation du type suivant : P et $(\forall x, Q(x))$?

Exercice 15.—(Négation et inégalités)

1. Simplifier la négation de chacun des énoncés suivants. Pour le moment on ne demande pas s'ils sont vrais ou faux, ni de les démontrer !. On pourra éventuellement vérifier avec le logiciel : les énoncés se trouvent dans le fichier **Logique et inégalités** ; lorsque D∃∀DUCTION vous le demande, choisissez “démontrer la négation” et utilisez la liste de théorèmes disponible pour simplifier la négation.

- **a.** $\forall n \in \mathbb{N}, (n \neq 0 \text{ ou } n \neq 1)$.
- **b.** $\forall n \in \mathbb{N}, (n = 0 \text{ ou } n = 1)$.
- **c.** $\exists n \in \mathbb{N}, \forall n' \in \mathbb{N}, n \leq n'$.
- **d.** $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall n' \in \mathbb{N}, n \leq n'$.
- **e.** $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n' \in \mathbb{Z}, n = n'$.
- **f.** $\exists n \in \mathbb{N}, \forall n' \in \mathbb{N}, n = n'$.
- **g.** $\forall a \geq 0, \forall \varepsilon \geq 0, (a \leq \varepsilon \Longrightarrow a = 0)$.
- **h.** $\forall a \geq 0, ((\forall \varepsilon \geq 0, a \leq \varepsilon) \Longrightarrow a = 0)$.
- **i.** $\forall a \geq 0, ((\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon) \Longrightarrow a = 0)$.
- **j.** $\forall p, q \in \mathbb{Z}, (p < q \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{Z}, p < r < q))$.
- **k.** $\forall p, q \in \mathbb{R}, (p < q \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{R}, p < r < q))$.

2. Les énoncés de la question 1 sont-ils vrais ou faux ? On rappelle que $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels (c'est-à-dire positifs ou nuls), $\mathbb{Z}$ l'ensemble de tous les entiers, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Utiliser D∃∀DUCTION pour démontrer ceux qui sont vrais, et la négation de ceux qui sont faux.

Deux démarches sont possibles : (1) Essayer de décider a priori si l'énoncé est vrai ou faux (par exemple, pour (a) et (b), en testant sur des valeurx particulières de n), puis démontrer la bonne version, ou bien (2) Essayer de démontrer l'énoncé, et si la preuve n'aboutit pas essayer de démontrer la négation. Pour les énoncés g, h, i, les variables sont implicitement supposées réelles. Pour l'énoncé i, utilisez, au bon moment, la méthode de preuve par contraposée (faire auparavant l'exercice suivant).

Exercice 16.—(Contraposée) On considère une implication $P \Longrightarrow Q$. Sa *contraposée* est alors l'implication (non Q) $\Longrightarrow$ (non P).

1. Complétez la table de vérité de la contraposée (page suivante), en utilisant la table de vérité de l'implication.

2. Que constatez-vous ? Vérifier en faisant l'exercice sur la contraposée dans D∃∀DUCTION(fichier **Logique propositionnelle**). *On pourra utiliser la méthode de preuve par cas, mais surtout pas la méthode de preuve par contraposée ! (pourquoi ?...)*

Exercice 17.— On voudrait montrer que la formule $A = f^{\langle -1\rangle}(f(A))$ caractérise l'injectivité de f. Plus précisément, il s'agit de montrer l'affirmation suivante :

$$\forall f : X \to Y, \quad \Big(\big(\forall A \subset X, A = f^{\langle -1\rangle}(f(A))\big) \Longrightarrow f \text{ est injective}\Big) .$$

1. Utilisez D∃∀DUCTION pour démontrer cette propriété. *Aide : on pourra raisonner par contraposée, et utiliser les éléments x, x' obtenus pour fabriquer une partie A de X appropriée.*

2.

a. Écrire, sous une forme simple, la négation de la propriété "f est injective".

b. Écrire, sous une forme simple, la négation de la propriété "$A \subset B$".

c. Pendant la démonstration avec le logiciel, vous avez utilisé plusieurs fois le bouton "NON". Pour chacun énoncé correspondant, vérifier la propriété obtenue dans le logiciel en expliquant pas à pas comment on obtient la négation.

3. Rédiger la démonstration.

4. Montrer de même que la formule $B = f(f^{\langle -1\rangle}(B))$ caractérise la surjectivité de f.

Exercice 18.—(optionnel) Faire les autres exercices de D∃∀DUCTION donnant une caractérisation de l'injectivité ou de la surjectivité.

Exercice 19.—(Optionnel) Pour chacune des propriétés de l'exercice "Négation et inégalités", essayez d'écrire la propriété à l'aide de mots (avec les moins de symboles mathématiques possible).

Exercice 20.—(Optionnel)

1. Faire les exercices de logique propositionnelle avec D∃∀DUCTION.

2. En déduire une méthode de preuve d'une proposition du type "P ou Q".

Connecteurs logiques

Les connecteurs logique "non" $\neg$, "et" $\wedge$, "ou" $\vee$, "implique" $\Rightarrow$ "si et seulement si" $\Leftrightarrow$ peuvent être définis par une *table de vérité* qui indique, par exemple, si l'affirmation "P ou Q" est vraie (V) ou fausse (F) en fonction de la véracité de la propriété P et de la propriété Q. *Complétez les tables.*

P	non P
F	
V	

P	Q	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
F	F				
F	V				
V	F				
V	V				

$\neg$ Négations

On a souvent besoin d'écrire la négation d'une propriété. Le tableau suivant donne la négation en fonction de sa forme de la propriété. *Complétez le tableau.*

Forme de la propriété	Négation
P et Q	
P ou Q	
$P \Rightarrow Q$	
$\forall x \in X,\ P(x)$	
$\exists x \in X,\ P(x)$	

Le principe *ex falso quodlibet*, "tout découle d'une contradiction", dit qu'on peut déduire n'importe quelle propriété lorsqu'on a une propriété **P** et sa négation **non P** qui sont vraies toutes les deux. L'idée est qu'on est en train d'explorer un cas qui ne peut pas arriver, et donc il n'y a rien à démontrer ! En pratique dans D∃∀DUCTION, lorsque le contexte contient deux propriétés contradictoires, le bouton But ! permet de conclure, quel que soit le but en cours.

Contraposée

P	Q	Non Q	Non P	(Non Q) $\Rightarrow$ (Non P)
F	F			
F	V			
V	F			
V	V			

Auto-évaluation 6

1. J'ai compris les table de vérité des connecteurs logiques.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.
2. J'ai compris la table de négation des connecteurs.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.
3. J'ai compris comment nier les propriétés de l'exercice "Négation et inégalités".
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.
4. J'ai compris ce qu'est la contraposée d'une implication, et la méthode de preuve par contraposée.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.
5. J'ai réussi l'exercice de caractérisation de l'injectivité !
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.
6. J'ai rendu une démonstration rédigée à l'enseignant.
   (1) D'accord, (2) plutôt d'accord, (3) pas vraiment d'accord, (4) pas d'accord.

Je me mets une note (1 point par question) : .../6

Commentaires libres sur cette séance : ...

7 Raisonnements sur les limites I

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels, et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite converge vers l (ou a pour limite ℓ), et on écrit $\lim(u_n)_{n\geq 0} = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \geq 0,\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Dans chaque question du premier exercice, on va chercher à ***démontrer une convergence****. Dans le second, on veut* ***utiliser des hypothèses de convergence****. Bien noter la différences entre ces deux aspects utilisation / démonstration. Les exercices suivants vont mélanger les deux : on aura souvent à la fois de la convergence dans le but ET dans les hypothèses !*

Exercice 21.—(Démonstration d'une convergence)
1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite constante :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, u_n = c.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers c.
2. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Exercice 22.— (Utilisation d'une convergence)
1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers un réel l. Montrer que la suite est bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, |u_n| \leq M.$$

2. Montrer que la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$, qui vaut -1 pour n impair et 1 pour n pair, n'a pas de limite. *Aide : raisonner par l'absurde.*

Pour ***démontrer*** *une convergence en utilisant la définition, on se donne un $\varepsilon > 0$, ensuite le plus dur est souvent de trouver le n_0 qui va marcher.*

Pour ***utiliser*** *une hypothèse de convergence, il faut se demander quelle est la valeur pertinente à donner à ϵ ; ensuite la définition nous fournit un entier n_0. Pour trouver « le bon ε », on peut s'aider d'un dessin en plaçant sur la droite réelle les différents nombres du contexte.*

Exercice 23.—(Définitions alternatives)
1. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \geq 0,\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

2. (optionnel) Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \geq 0,\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < 10\varepsilon.$$

---

8 Raisonnements sur les limites II

Exercice 24.—(Convergence et inégalités)

1. Montrer que “les inégalités larges passent à la limite” : soient $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles, et ℓ, m deux nombres réels tels que

$$\lim(v_n)_{n\geq 0} = \ell \text{ et } \lim(w_n)_{n\geq 0} = m.$$

Montrer que

$$(\forall n \geq 0, v_n \leq w_n) \quad \Rightarrow \quad \ell \leq m.$$

Aide : raisonner par contraposée, et faire un dessin pour trouver « le bon ε »...

2. Montrer l'unicité de la limite d'une suite réelle : soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels, soient l, l' deux nombres réels tels que

$$\lim(u_n)_{n\geq 0} = l \text{ et } \lim(u_n)_{n\geq 0} = l'.$$

Montrer que $l = l'$. *Aide : raisonner par l'absurde, et faire un dessin...*

3. Montrer le “théorème des gendarmes” : soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ trois suites réelles, et l un nombre réel tel que

$$\lim(u_n)_{n\geq 0} = l \text{ et } \lim(w_n)_{n\geq 0} = l.$$

Supposons de plus que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Montrer que

$$\lim(v_n)_{n\geq 0} = l.$$

Exercice 25.— (Opérations sur les limites)

1. Montrer que la limite de la somme égale la somme des limites : soient $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles, et l, m deux nombres réels tels que

$$\lim(v_n)_{n\geq 0} = l \text{ et } \lim(w_n)_{n\geq 0} = m.$$

Montrer que

$$\lim(v_n + w_n)_{n\geq 0} = l + m.$$

2. Montrer que le produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0 est une suite qui converge vers 0.

3. Montrer que la limite du produit est égale au produit des limites. Plus précisément, soient $(v_n), (w_n)$ deux suites réelles convergeant respectivement vers k et ℓ. Montrer que la suite $(v_n w_n)$ converge vers $k\ell$.

Aide : (1) on considère la suite (u_n) définie par $u_n = v_n w_n - k\ell$, et on remarque qu'on peut écrire $u_n = (v_n - k)w_n + k(w_n - \ell)$. (2) Il s'agit de démontrer que (u_n) tend vers 0, on utilisera trois résultats démontrés plus haut !

9 Raisonnements sur les limites III

** Définition de $\lim_a f = \ell$. **

Définition de f continue au point a.

Exercice 26.—(**)

1. Montrer que si $\lim_a f = \ell$ et $\lim(u_n) = a$ alors $\lim(f(u_n)) = f(a)$. Il faut un énoncé intermédiaire pour construire une suite.

2. Composition des limites. Composition de la continuité.

3. Montrer que si f est continue au point 0 et $f(0) > 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f > 0$ sur l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Bilan de l'ARE D∃∀DUCTION

1. Avez-vous trouvé cet apprentissage intéressant, et si oui, pourquoi ? Quel a été votre exercice ou votre activité préférée ?

2. Est-ce que cet ARE vous a aidé en 1MA002 et/ou en 1MA003 ? Pensez-vous qu'il vous aidera pour la suite de la Licence ?

3. Avez-vous des critiques ? (concernant par exemple le logiciel utilisé, la durée et le nombre de séances, le rythme (trop lent/trop rapide), les explications, le choix des exercices, les rédactions de preuves à rendre, les retours des profs...) Ou des suggestions pour améliorer l'ARE (ou le logiciel) l'an prochain ?

4. Autres remarques ?

5. Note proposée, sur 20 points (disons entre 12 et 18 : ≥ 12 si vous avez participé à toutes les séances sauf empêchement, sans chercher vraiment comprendre ce qui était demandé ; ≥ 15 si vous avez cherché à comprendre et rendu les rédactions demandées ; ≥ 18 si vous avez en plus le sentiment d'avoir progressé dans la conception et rédaction de preuves) :

A Exos supplémentaires : Rédiger une preuve

Exercice 27.—(Fichier **exercices-theorie-des-ensembles** > Complémentaires) Faire les exercices sur le complémentaires dans D∃∀DUCTION. Rédiger les démonstrations.

Exercice 28.—(Fichier **exercices-theorie-des-ensembles** > Applications et opérations ensemblistes) Généralisez la formule sur l'image réciproque d'une réunion de deux ensembles à l'image réciproque de la réunion d'une famille quelconque d'ensemble :

$$f^{<-1>}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{<-1>}\left(A_i\right).$$

Rédigez la démonstration !

B Exos supplémentaires : Injectivité, surjectivité

Exercice 29.—(Fichier **Ateliers/Ensembles-et-applications**>**injectivité-surjectivité : divers**)

1. Démontrer, à l'aide de D∃∀DUCTION, l'énoncé suivant : *Si $g \circ f$ est injective, et que f est surjective, alors g est injective.*

2. Démontrer (sans D∃∀DUCTION) l'énoncé "dual" : *Si $g \circ f$ est surjective, et si g est injective, alors f est surjective.*

3. Démontrer, par exemple avec D∃∀DUCTION, que si g est injective et si $g \circ f = g \circ f'$ alors $f = f'$.

4. Imaginer et démontrer l'énoncé "dual"...

5. Soit $g : Y \to Z$ une application. On dit que g admet un *inverse à droite* s'il existe $g' : Z \to Y$ tel que $g \circ g' = \mathrm{Id}_Z$. Montrer (par exemple avec D∃∀DUCTION) que g admet un inverse à droite si et seulement si elle est surjective.

6. Enoncer, puis démontrer l'énoncé "dual".

Exercice 30.—(Théorème de Cantor, fichier **exercices-theorie-des-ensembles**>Injections-surjections)

Soit X un ensemble quelconque (fini ou infini). Démontrez qu'il n'existe pas de surjection de X vers l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X.

Aide : il faudra raisonner par l'absurde, créer un nouvel objet, raisonner par cas, et créer à chaque fois un but intermédiaire... On peut utiliser la syntaxe $\{x, <\text{ propriété }>\}$ pour introduire un ensemble, en définissant la propriété à l'aide des mots-clés "dans" pour l'appartenance, "not" pour la négation.

C Exos supplémentaires : Conjecturer, démontrer, rédiger

Exercice 31.— Déterminez quelles inclusions sont toujours vérifiées dans les formules suivantes : démontrez les inclusions vraies, donnez un contre-exemple pour les autres.

$$f^{-1}\left(Y \setminus B\right) = X \setminus f^{<-1>}\left(B\right), \qquad f\left(X \setminus A\right) = Y \setminus f\left(A\right).$$

D Bilan

Exercice 32.—

1. Combien y a-t-il de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x réel, $f(x)^2 = f(x)$?

2. Combien y a-t-il de fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x réel, $f(x)^2 = f(x)$?

Réponses à l'auto-évaluation 1

1. Pour démontrer une propriété de la forme $\forall x, P(x)$, j'utilise le bouton $\forall$.
   En réponse, le logiciel introduit un "x" dans le contexte, et le but devient de démontrer $P(x)$.

2. Pour démontrer une propriété de la forme $P \Rightarrow Q$, j'utilise le bouton $\Rightarrow$.
   En réponse, le logiciel introduit la propriété P dans le contexte, et le but devient de montrer la propriété Q.

3. Pour démontrer une propriété de la forme P et Q, j'utilise le bouton ET ($\wedge$).
   En réponse, le logiciel me demande laquelle des deux propriétés je veux démontrer en premier. On a maintenant **deux tâches** indépendantes à partir des mêmes hypothèses : d'abord montrer P, puis montrer Q.

4. Pour démontrer une propriété de la forme P ou Q, j'utilise le bouton OU ($\vee$).
   En réponse, le logiciel me demande de choisir la quelle des deux propriétés je veux montrer. On a toujours **une seule tâche**, qui est de montrer la propriété choisie (on peut "oublier" l'autre !).

Compléments à l'auto-évaluation 1 : *utilisation* des propriétés du contexte

1. Pour *utiliser* une propriété de la forme $\forall x, P(x)$, j'utilise le bouton ...
   En réponse, le logiciel ...

2. Pour *utiliser* une propriété de la forme $P \Rightarrow Q$, j'utilise le bouton ...
   En réponse, le logiciel ...

3. Pour *utiliser* une propriété de la forme P et Q, j'utilise le bouton ...
   En réponse, le logiciel ...

4. Pour *utiliser* une propriété de la forme P ou Q, j'utilise le bouton ...
   En réponse, le logiciel ...

Utilisation des propriétés du contexte : réponses

1. Pour *utiliser* une propriété de la forme $\forall x, P(x)$, j'utilise le bouton $\forall$. Il faut que le contexte contienne un élément x_0 de X, que je sélectionne également. En réponse, le logiciel **ajoute au contexte la propriété** $P(x_0)$.

2. Pour *utiliser* une propriété de la forme $P \Rightarrow Q$, j'utilise le bouton $\Rightarrow$. Il faut que le contexte contienne la propriété P, que je sélectionne également.

   En réponse, le logiciel **ajoute la propriété** Q au le contexte.

3. Pour *utiliser* une propriété de la forme P **et** Q, j'utilise le bouton ET ($\wedge$). En réponse, le logiciel découpe la propriété en deux.

4. Pour *utiliser* une propriété de la forme P **ou** Q, j'utilise le bouton OU ($\vee$).

   En réponse, le logiciel me demande de choisir le cas à étudier en premier. On a maintenant **deux tâches indépendantes** : (1) démontrer le but avec P dans le contexte, (2) démontrer le but avec Q dans le contexte. Il s'agit de ce qu'on appelle une preuve par disjonction de cas.

Comment démontrer une propriété dans le but / utiliser une propriété du contexte ?

Forme de la propriété	Comment la démontrer ?	Comment l'utiliser comme hypothèse ?
P et Q $\wedge$	On démontre successivement P, puis Q.	On peut utiliser l'hypothèse P et l'hypothèse Q.
P ou Q $\vee$	On peut choisir de démontrer P ou bien Q (et « oublier » l'autre propriété !)	On peut faire une preuve par cas : « Premier cas : supposons P »...*(preuve du but dans ce cas.)* « Second cas : supposons Q »...*(preuve du but dans ce cas.)*
$P \Rightarrow Q$ Si P, alors Q $\Rightarrow$	• On suppose P, et on montre Q. Début de rédaction : « Supposons que P est vraie » • Par contraposée : on suppose la négation de Q, et on montre la négation de P.	Si, dans le contexte, on a à la fois P et $P \Rightarrow Q$, on peut en déduire Q. Rédaction : « Puisque P et $P \Rightarrow Q$, on en déduit Q ». **Ne surtout pas écrire juste** $P \Rightarrow Q$, qui ne dit pas au lecteur que Q est vraie.
$P \Leftrightarrow Q$ P ssi Q $\Leftrightarrow$	• Par double implication : on démontre $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. • Par équivalence (plus rare) : on passe de P à Q par une série d'équivalences.	P et Q sont interchangeables : si on obtient la propriété P dans le contexte alors on a aussi Q, et réciproquement.
$\forall a \in A,\ P(a)$ $\forall$	On prend un élément a de A **quelconque**, et on montre la propriété $P(a)$. Début de rédaction : « Soit $a \in A$, montrons $P(a)$. »	Si, dans le contexte, on a à la fois un élément α de A et la propriété $(\forall a \in A,\ P(a))$, on en déduit la propriété $P(\alpha)$.
$\exists a \in A,\ P(a)$ $\exists$	On produit un « témoin » de la propriété, c'est-à-dire un élément α de A qui vérifie $P(\alpha)$. Début de rédaction : « Montrons que α *(qui est dans le contexte à ce moment-là)* convient : vérifions la propriété $P(\alpha)$. »	On peut ajouter au contexte un élément α de A avec la propriété $P(\alpha)$. Rédaction : « On obtient un élément a vérifiant la propriété $P(a)$. »

D'autres méthodes de preuves qu'on peut parfois utiliser : preuve par l'absurde, par étude de cas, ...
On peut aussi parfois appliquer un théorème du cours !