Une promenade du côté de l'homologie de Morse

Frédéric Le Roux

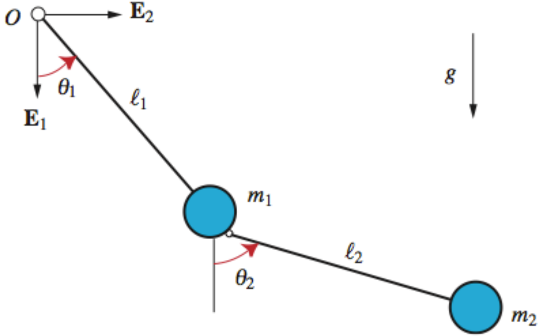
Grenoble, mars 2015

I. Systèmes mécaniques, trajectoires périodiques

Isaac Newton 1687,
Joseph-Louis Lagrange 1788,
William Hamilton 1833,
Henri Poincaré 1889.

Pendule simple et pendule double

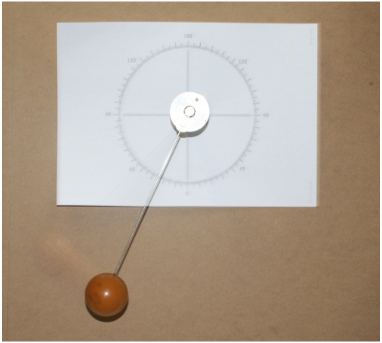
Pendule simple et pendule double



Espace des phases du pendule simple

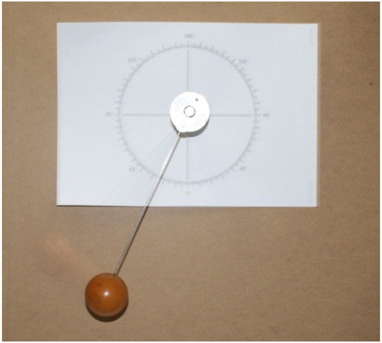
Espace des phases du pendule simple

- Espace des configurations $\{\theta\}$

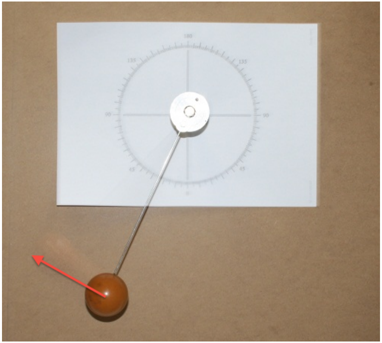


Espace des phases du pendule simple

- Espace des configurations $\{\theta\}$



- Espace des phases $\{(\theta, \dot{\theta})\}$



Energie

- Fonction Energie

$$E : \{\text{espace des phases}\} \to \mathbb{R}$$

Energie

- Fonction Energie

$$E : \{\text{espace des phases}\} \to \mathbb{R}$$

- Equations de Hamilton (1833)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{q} & = & \frac{\partial E}{\partial p} \\ \dot{p} & = & -\frac{\partial E}{\partial q} \end{array} \right.$$

où $q = \theta$ et $p = m\ell^2\dot{\theta}$.

Energie

- Fonction Energie

$$E : \{\text{espace des phases}\} \to \mathbb{R}$$

- Equations de Hamilton (1833)

$$\begin{cases} \dot{q} & = & \frac{\partial E}{\partial p} \\ \dot{p} & = & -\frac{\partial E}{\partial q} \end{cases}$$

où $q = \theta$ et $p = m\ell^2\dot{\theta}$.

- Les points d'équilibres correspondent aux *points critiques* de E.

Pendule double, pendule à ressort

- Pendule double : espace des phases de dimension quatre...

Pendule double, pendule à ressort

- Pendule double : espace des phases de dimension quatre...
- Pendule à ressort : l'énergie dépend périodiquement du temps...

Pendule double, pendule à ressort

- Pendule double : espace des phases de dimension quatre...
- Pendule à ressort : l'énergie dépend périodiquement du temps...

Question *Existe-t-il des trajectoires périodiques pour le pendule double et pour le pendule à ressort ?*

Conjecture d'Arnol'd (1965)

≪ *La forme de l'espace des phases peut forcer l'existence de trajectoires périodiques* ≫.

Conjecture d'Arnol'd (1965)

≪ *La forme de l'espace des phases peut forcer l'existence de trajectoires périodiques* ≫.

(indépendamment de la formule définissant l'énergie, qu'elle dépende ou non du temps)

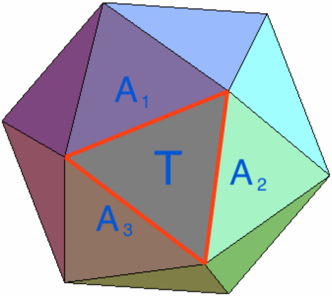
II. “L’homologie simpliciale” ou la combinatoire des polyèdres

Leonhard Euler XVIIème,
Bernhard Riemann, Enrico Betti XVIIIème,
Henri Poincaré 1895,
Emmy Noether, Leopold Vietoris, Walther Mayer 1925.

Les applications “bords”

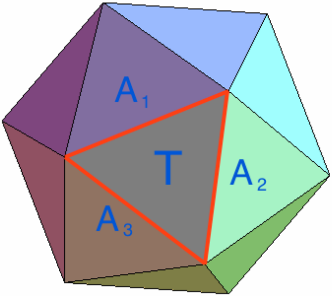
Les applications “bords”

- $\partial T = A_1 + A_2 + A_3$

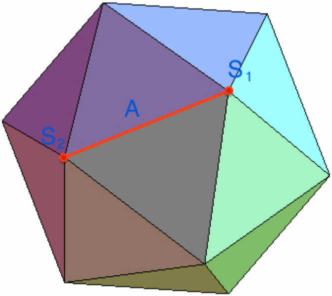


Les applications “bords”

- $\partial T = A_1 + A_2 + A_3$

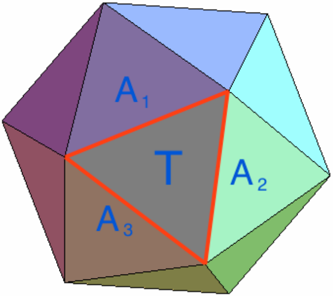


- $\partial A = S_1 + S_2$

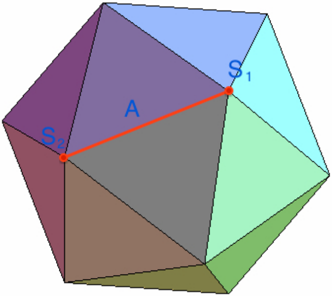


Les applications "bords"

- $\partial T = A_1 + A_2 + A_3$



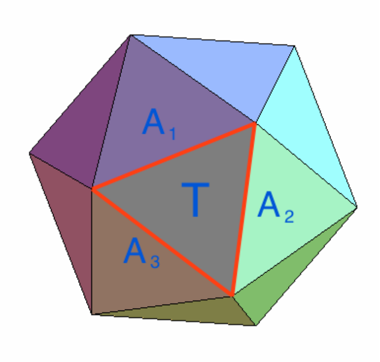
- $\partial A = S_1 + S_2$



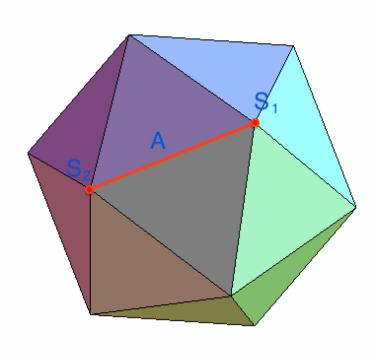
- On étend "linéairement" et on calcule modulo 2 !

Les applications "bords"

- $\partial T = A_1 + A_2 + A_3$



- $\partial A = S_1 + S_2$



- On étend "linéairement" et on calcule modulo 2 !
- Le bord d'un bord est ... ?

Cycles et bords

- Le bord d'un bord est vide !

Cycles et bords

- Le bord d'un bord est vide !
- *Cycle* = réunion d'arêtes dont le bord est vide.

Cycles et bords

- Le bord d'un bord est vide !
- *Cycle* = réunion d'arêtes dont le bord est vide.
- *Bord de faces* = réunion d'arêtes bord d'une réunion de faces.

Cycles et bords

- Le bord d'un bord est vide !
- *Cycle* $=$ réunion d'arêtes dont le bord est vide.
- *Bord de faces* $=$ réunion d'arêtes bord d'une réunion de faces.
- Le bord d'un bord est vide :

Cycles et bords

- Le bord d'un bord est vide !
- *Cycle* = réunion d'arêtes dont le bord est vide.
- *Bord de faces* = réunion d'arêtes bord d'une réunion de faces.
- Le bord d'un bord est vide : tout bord de faces est un cycle !

Cycles et bords

- Le bord d'un bord est vide !
- *Cycle* = réunion d'arêtes dont le bord est vide.
- *Bord de faces* = réunion d'arêtes bord d'une réunion de faces.
- Le bord d'un bord est vide : tout bord de faces est un cycle !
- *Est-ce que tout cycle est un bord de faces ?*

Compter les trous

Compter les trous

- trou = cycle qui n'est pas un bord...

Compter les trous

- trou $=$ cycle qui n'est pas un bord... Bof !

Compter les trous

- trou $=$ cycle qui n'est pas un bord... Bof !
- deux cycles "font le tour du même trou" si leur réunion est un bord :

Compter les trous

- trou = cycle qui n'est pas un bord... Bof !
- deux cycles "font le tour du même trou" si leur réunion est un bord :
- trou = cycle modulo bords !

Compter les trous

- trou = cycle qui n'est pas un bord... Bof !
- deux cycles "font le tour du même trou" si leur réunion est un bord :
- trou = cycle modulo bords !
- Sur un polyèdre torique, tout cycle est égal à l'un des quatre cycles suivants :

Compter les trous

- trou = cycle qui n'est pas un bord... Bof !
- deux cycles “font le tour du même trou” si leur réunion est un bord :
- trou = cycle modulo bords !
- Sur un polyèdre torique, tout cycle est égal à l'un des quatre cycles suivants :

  $$0, C_1, C_2, C_1 + C_2$$

  plus le bord d'une somme de faces.

L'homologie est un invariant topologique (I)

Théorème

Sur tout polyèdre torique, il y a exactement quatre cycles comptés modulo les bords.

L'homologie est un invariant topologique (II)

Théorème

Pour tout polyèdre, le nombre de "cycles modulo bords" ne dépend que de la topologie du polyèdre.

L'homologie est un invariant topologique (II)

Théorème

Pour tout polyèdre, le nombre de "cycles modulo bords" ne dépend que de la topologie du polyèdre.

Théorème

Pour tout polyèdre X, et tout i, la dimension b_1 de l'espace vectoriel

$$H_1(X) = \mathrm{Ker}(\partial_{1\to 0})/\mathrm{Im}(\partial_{2\to 1})$$

ne dépend que de la topologie du polyèdre.

L'homologie est un invariant topologique (II)

Théorème

Pour tout polyèdre, le nombre de "cycles modulo bords" ne dépend que de la topologie du polyèdre.

Théorème

Pour tout polyèdre X, et tout i, la dimension b_1 de l'espace vectoriel

$$H_1(X) = \mathrm{Ker}(\partial_{1\to 0})/\mathrm{Im}(\partial_{2\to 1})$$

ne dépend que de la topologie du polyèdre.

(b_1 est appelé *premier nombre de Betti* du polyèdre.)

L'homologie est un invariant topologique (III)

Corollaire (Euler-Cauchy-Poincaré)

La caractéristique d'Euler

$$\sharp faces - \sharp aretes + \sharp sommets = \dim(H_2) - \dim(H_1) + \dim(H_0)$$

ne dépend que de la topologie du polyèdre.

III. "L'homologie de Morse" ou la combinatoire des gouttes d'eau...

Marston Morse 1934.
René Thom 1949, Stephen Smale 1960, John Milnor 1965.
Edward Witten 1982.

Cycles et bords...

Homologie de Morse = homologie simpliciale

Théorème

Le nombre de cycle modulo bord pour l'homologie de Morse sur une surface S est égal au nombre de cycles modulo bord pour l'homologie simpliciale de n'importe quel polyhèdre qui a la même topologie que S.

Homologie de Morse = homologie simpliciale

Théorème

Le nombre de cycle modulo bord pour l'homologie de Morse sur une surface S est égal au nombre de cycles modulo bord pour l'homologie simpliciale de n'importe quel polyhèdre qui a la même topologie que S.

Théorème

L'espace H_1 défini par l'homologie de Morse sur une surface S a la même dimension que l'espace H_1 défini sur n'importe quel polyèdre qui a la même topologie que S.

Corollaire (“Inégalités de Morse”)

La fonction hauteur sur une surface torique a au moins deux points selles (et quatre points critiques).

Corollaire ("Inégalités de Morse")

Toute fonction définie sur une surface torique a au moins deux points selles (et quatre points critiques).

Corollaire (“Inégalités de Morse”)

Toute fonction définie sur une surface torique a au moins deux points selles (et quatre points critiques).

Un retour aux systèmes mécaniques...

Corollaire (“Inégalités de Morse”)

Toute fonction définie sur une surface torique a au moins deux points selles (et quatre points critiques).

Un retour aux systèmes mécaniques...

Corollaire

Si un système mécanique avec une fonction d’énergie qui ne dépend pas du temps a un espace des phases qui est un tore, alors il y a au moins quatre points d’équilibre.

IV. “L’homologie de Floer”

Mikhail Gromov 1985.
Andreas Floer 1988.
....

Andreas Floer et Clifford Taubes

"j'ai trouvé comment faire de l'homologie de Morse pour la fonctionnelle de Chern-Simons."

Andreas Floer et Clifford Taubes

“j’ai trouvé comment faire de l’homologie de Morse pour la fonctionnelle de Chern-Simons.”

“– Et alors ? !”

Solution de la conjecture d'Arnol'd

Théorème (Conley-Zendher – Floer – Weinstein – ...)

Un système dynamique hamiltonien (dans lequel la fonction hamiltonienne peut dépendre périodiquement du temps), avec pour espace des phases un espace M compact, a toujours des orbites périodiques, au moins autant que la somme de tous les nombres de Betti de M.

Analogies

- Homologie de Morse $\leftrightarrow$ Homologie de Floer

Analogies

- Homologie de Morse $\leftrightarrow$ Homologie de Floer
- Surface S $\leftrightarrow$

Analogies

- Homologie de Morse $\leftrightarrow$ Homologie de Floer
- Surface S $\leftrightarrow$
- Fonction hauteur $\leftrightarrow$

Analogies

- Homologie de Morse $\leftrightarrow$ Homologie de Floer
- Surface S $\leftrightarrow$
- Fonction hauteur $\leftrightarrow$
- Trajectoires des gouttes d'eau $\leftrightarrow$

Analogies

- Homologie de Morse $\leftrightarrow$ Homologie de Floer
- Surface S $\leftrightarrow$
- Fonction hauteur $\leftrightarrow$
- Trajectoires des gouttes d'eau $\leftrightarrow$
- Applications bord, cycles, homologie...

Analogies

- Homologie de Morse $\leftrightarrow$ Homologie de Floer
- Surface S $\leftrightarrow$
- Fonction hauteur $\leftrightarrow$
- Trajectoires des gouttes d'eau $\leftrightarrow$
- Applications bord, cycles, homologie...

Analogies

- Homologie de Morse $\leftrightarrow$ Homologie de Floer
- Surface S $\leftrightarrow$
- Fonction hauteur $\leftrightarrow$
- Trajectoires des gouttes d'eau $\leftrightarrow$
- Applications bord, cycles, homologie...

Analogies

- Homologie de Morse $\leftrightarrow$ Homologie de Floer
- Surface S $\leftrightarrow$ Espace des courbes $\mathcal{S}$
- Fonction hauteur $\leftrightarrow$
- Trajectoires des gouttes d'eau $\leftrightarrow$
- Applications bord, cycles, homologie...

Analogies

- Homologie de Morse $\leftrightarrow$ Homologie de Floer
- Surface S $\leftrightarrow$ Espace des courbes $\mathcal{S}$
- Fonction hauteur $\leftrightarrow$ Fonctionnelle d'action $\mathcal{A} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$
- Trajectoires des gouttes d'eau $\leftrightarrow$
- Applications bord, cycles, homologie...

Analogies

- Homologie de Morse $\leftrightarrow$ Homologie de Floer
- Surface S $\leftrightarrow$ Espace des courbes $\mathcal{S}$
- Fonction hauteur $\leftrightarrow$ Fonctionnelle d'action $\mathcal{A} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$
  Les points critiques de $\mathcal{A}$ sont les trajectoires périodiques
- Trajectoires des gouttes d'eau $\leftrightarrow$
- Applications bord, cycles, homologie...

Analogies

- Homologie de Morse $\leftrightarrow$ Homologie de Floer
- Surface S $\leftrightarrow$ Espace des courbes $\mathcal{S}$
- Fonction hauteur $\leftrightarrow$ Fonctionnelle d'action $\mathcal{A} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$
  Les points critiques de $\mathcal{A}$ sont les trajectoires périodiques
- Trajectoires des gouttes d'eau $\leftrightarrow$ "courbes pseudo-holomorphes" de Gromov
- Applications bord, cycles, homologie...

Et le pendule double ? ?

Et le pendule double ? ?

Théorème (Viterbo 1996)

Il existe une infinité de trajectoires périodiques. Plus précisément : pour tout couple d'entiers relatifs (n_1, n_2)*, il existe au moins quatre trajectoires périodiques vérifiant la propriété suivante : au cours d'une période, le premier bras fait au total* n_1 *tours (comptés algébriquement), et le second en fait* n_2*.*