Jeu de Hex et théorème de Brouwer

Mathematik Park, avril 2011

Diagramme plein, puis avec compo connexe de bleus pour argument impossibilité nulle.

1 Résumé

Aujourd'hui, je vais vous raconter le lien entre un jeu de société, appelé *Hex*, et un théorème de topologie, le *théorème de point fixe de Brouwer*. Plus précisément, je vais expliquer comment on peut démontrer ce théorème en utilisant un aspect du jeu de Hex, à savoir l'impossibilité d'une partie nulle.

2 Jeu de Hex

Le jeu de Hex est un jeu de plateau à deux joueurs, ici les rouges et les bleus. Le principe est très simple. Le plateau de jeu est un losange pavé par des cases hexagonales, dont deux des côtés opposés sont peint de la couleur du premier joueur, et les deux autres de la couleur du deuxième joueur. Les joueurs posent à tour de rôle un pion sur la case libre de leur choix ; pour gagner, il faut parvenir à relier les deux côtés de sa couleur par une chaîne de pions ininterrompue.

C'est un vrai jeu, plaisant à jouer ; l'un des intérêts du jeu, c'est qu'il n'y a jamais de partie nulle.

Théorème (Théorème de Hex)**.** *A Hex, il y a toujours un gagnant.*

DEMO option (1) S'il y avait une partie nulle, alors le terrain serait entièrement recouvert de pions rouges ou bleus. Donc il 'agit de considérer un terrain entièrement recouvert de pions rouges ou bleus, (voici un exemple), et de montrer qu'il y a forcément un chemin de pions rouges reliant les deux côtés rouges, ou un chemin de pions bleus reliant les deux côtés bleus. Pour voir ceci, on considère l'ensemble R des cases de pions rouges reliés au côté bas-gauche par un chemin de pions rouge. Si l'un des pions de R touche le côté droit, rouge a gagné. Sinon, l'ensemble R est bordé par un chemin de pions bleus reliant les deux côtés rouges (DESSINS).

DEMO option (2) Imaginons une partie nulle : en particulier, les deux joueur ont complètement rempli le plateau de jeu. Donc, pour montrer qu'il ne peut pas y avoir de partie nulle, il s'agit de considérer un plateau rempli de pion rouges et bleus, et de montrer que *s'il n'y a pas de chemin rouge reliant les deux côtés rouges, alors il y a un chemin bleu reliant les deux côtés bleus.*

Pour voir ceci, on fait la chose suivante. On part du coin en bas. On commence à se déplacer le long des arête du plateau, en dessinant un chemin en vert ici, de façon à ce que à tout moment, on ait une case rouge à gauche du chemin et une case bleue à droite. Sur cet exemple, voici le début du chemin. Ici on arrive à une case bleue, on tourne à gauche, de façon à ce que la nouvelle arête ait encore une case rouge à sa gauche et une case bleue à sa droite. Si on arrive à une case rouge, on tourne à droite. et caetera, de cette façon on peux toujours continuer à tracer notre chemin, case rouge à gauche, case bleue à droite.

D'abord, le chemin ne peut jamais boucler. En effet, en supposant qu'il boucle, on regarde la première fois où le chemin arrive à un sommet par lequel il est déjà passé. Ce sommet est commun à trois cases. Le chemin est arrivé une première fois à ce sommet et en est reparti, mettons qu'il a tourné à droite. D'après la règle suivie pour tracer le chemin, case rouge à gauche et case bleue à droite, il doit y avoir deux cases rouges ici et une bleue là. Vous voyez que le chemin n'a pas pu emprunter la dernière arête, puisqu'elle est entourée de deux cases rouges, et on a une contradiction : donc le chemin ne peut pas boucler.

Comme le chemin ne peut pas boucler, et qu'il n'y a qu'un nombre fini d'arête, il faut bien que le processus s'arrête. Comment peut-il se terminer ? En fait, il n'y a que deux possibilités : le chemin va aboutir au coin gauche ou au coin droit du plateau de jeu ; c'est le seul endroit du plateau où il est coincé.

S'il aboutit au coin gauche, comme ici, alors en suivant les cases qui bordent ce chemin sur sa gauche, on va trouver un chemin de pions bleus, qui relie les deux côtés bleus : le joueur bleu à gagné. S'il aboutit au coin droit, alors en suivant les cases qui bordent ce chemin sur sa gauche, on va trouver un chemin de pions rouge qui relie les deux côtés rouges, et c'est le joueur rouge qui a gagné.

On va utiliser ce résultat sous une forme un peu différente, plus mathématique (un théorème sans guillemet). On commence par dessiner le terrain de jeu de façon un peu différente (DESSINS).

On fixe un entier n (le plateau a n cases de côté).

– Un *sommet* est un point de coordonnées $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$, avec $p, q \in \{0, \dots, n\}$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des sommets. (Sur le dessin, ce sont les points noirs).

– Deux sommets $s = (x, y), s' = (x', y') \in \mathcal{S}_n$ sont *adjacents* si $x' = x$ et $y' = y + 1/n$ ou $y - 1/n$, ou ... (Un sommet a au plus 6 sommets adjacents, ce qui correspond au fait que le plateau d'Hex est formé de cases hexagonales).

– Un *chemin* est une suite finie $s_0, \dots, s_\ell \in \mathcal{S}_n$ telle que, pour tout i, s_i et s_{i+1} sont adjacents.

Théorème (Théorème de Hex)**.** *Soient $B, R \subset \mathcal{S}_n$ tels que $B \cup R = \mathcal{S}_n$. Alors il existe un chemin $s_0, \dots, s_\ell \subset B$ reliant le côté gauche au côté droit, ou il existe un chemin $s_0, \dots, s_\ell \subset R$ reliant le côté bas au côté haut.*

3 Théorème de Brouwer

Soit $C = [0, 1]^2$ (le carré constitués des points dont les deux coordonnées sont entre 0 et 1).

Théorème (Brouwer, 1912)**.** *Toute application continue $f : C \to C$ a un* point fixe*, c'est-à-dire un point P tel que $f(P) = P$.*

Remarques

1) Brouwer a en fait énoncé et démontré son théorème en toute dimension : vrai aussi en remplaçant le carré par le cube $[0, 1]^3$, ou même par $[0, 1]^n$ pour tout $n \geq 1$.

2) (Théorème joli et important... On parlera des applications tout à l'heure, on fait d'abord les choses difficiles).

4 Continuité et compacité

Théorème. *Le carré C est compact : si (P_n) est une suite de point de C, il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k), telle que la suite extraite (P_{n_k}) converge.*

Théorème. *Une application continue $f : C \to C$ est uniformément continue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $P, Q \in C$,*

$$d(P, Q) < \eta \Rightarrow d(f(P), f(Q)) < \varepsilon.$$

5 Hex implique Brouwer

Soit $f : C \to C$ une application continue. On fixe $\varepsilon > 0$.

Proposition 5.1. *Il existe un point P de C tel que*

$$d(P, f(p)) < \epsilon.$$

Démonstration. Soit n un entier donné par la continuité uniforme :

$$\forall P, Q \in C, d(P, Q) < \frac{2}{n} \Rightarrow d(f(P), f(Q)) < \varepsilon.$$

On suppose aussi que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

On considère l'ensemble de sommets $\mathcal{S}_n$ (dessin).

Soient

$$B^+ = \{P = (x, y) \in \mathcal{S}_n \text{ tels que } f(P) = (x', y') \text{ avec } x' \geq x + \varepsilon\},$$

$$B^- = \{P = (x, y) \in \mathcal{S}_n \text{ tels que } f(P) = (x', y') \text{ avec } x' \leq x - \varepsilon\},$$

$$R^+ = \{P = (x, y) \in \mathcal{S}_n \text{ tels que } f(P) = (x', y') \text{ avec } y' \geq y + \varepsilon\},$$

$$R^- = \{P = (x, y) \in \mathcal{S}_n \text{ tels que } f(P) = (x', y') \text{ avec } y' \leq y - \varepsilon\},$$

et posons $R = R^+ \cup R^-, B = B^+ \cap B^-$.

Affirmation 5.2. *On ne peut pas avoir $B \cup R = \mathcal{S}_n$.*

Preuve de l'affirmation. (Par l'absurde). Supposons que $B \cup R = \mathcal{S}_n$. D'après le théorème de Hex, il existe (1) un chemin de sommets de $\mathcal{S}_n$ dans B reliant le côté gauche au côté droit du carré, ou (2) un chemin de sommets de $\mathcal{S}_n$ dans R reliant le côté bas au côté haut du carré.

On se place dans le cas (1). Notons $s_0, \ldots, s_k \in B \cap \mathcal{S}_n$ le chemin (dessin).

Remarque : un point sur le côté gauche ne peut pas être dans B^-. Donc $s_0 \in B^+$. De même, $s_k \in B^-$. Il existe donc deux sommets s_i, s_{i+1} successifs tels que

$$x_1' \geq x_1 + \varepsilon \text{ et } x_1' \leq x_1 - \varepsilon.$$

(Contradiction : s_i, s_{i+1} sont très proches, donc, par continuité uniforme, leurs images aussi, mais l'image de s_i est loin de s_i vers la droite tandis que celle de s_{i+1} est loin de s_i vers la gauche).

Dans le cas (2), on conclut de façon analogue.

□

Fin de la preuve de la proposition.

D'après le Fait, il existe un point P (sommet de $\mathcal{S}_n$) dont les deux coordonnées changent moins que ε. On a $d(P, f(P)) < \sqrt{2}\varepsilon$, ce qui prouve la proposition. □

Preuve du théorème à partir de la proposition. Pour chaque entier n, on applique la proposition pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$: il existe $P_n \in C$ tel que

$$d(P_n, f(P_n)) < \frac{1}{n}.$$

Par compacité, il existe une sous-suite (P_{n_k}) convergeant vers un point P. Par continuité de f, la suite $(f(P_{n_k}))$ converge vers le point $f(P)$. Puisque la fonction distance est continue, on obtient $f(P) = P$. □

Commentaires.

Remarque 1 : la continuité uniforme est essentielle, puisqu'on doit choisir n avant de connaître les points P, Q.

Remarque 2 : la preuve peut se généraliser pour $[0,1]^n$. Le jeu de Hex généralisé se joue à n joueurs...

6 Importance

Brouwer, c'est le tout début de la topologie : convergence et continuité. Ce qui va faire son succès, c'est la possibilité d'appliquer des résultats de topologie en analyse, en voyant les fonctions comme les points d'un espace, et en généralisant des propriétés du plan ou de l'espace euclidien. La notion abstraite de compacité, par exemple, vient de cette démarche.

Pour illustrer l'importance du théorème de Brouwer, Un exemple en analyse, les équations différentielles.

1) Si on considère l'équation différentielle $y' = y$, $y(0) = 1$ (ici y symbolise une fonction, autrement dit, on cherche les fonctions égales à leur dérivée, et dont la valeur en 0 est 1). Une solution unique, la fonction $x \mapsto e^x$.

2) Pour $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$, la fonction nulle est solution, mais aussi $x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ (pour $x \geq 0$).

En fait, (1) illustre le théorème de Cauchy-Lipschitz : sous certaines hypothèses, il y a existence et unicité des solutions. (2) illustre le théorème Cauchy-Péano : sous des hypothèses plus générales, on a existence, mais pas forcément unicité. Une façon de démontrer CL, théorème de point fixe de Banach. Une façon de démontrer CP, théorème de point fixe de Schauder, qui est à la fois une généralisation et une conséquence du théorème de Brouwer.

7 Applications

(Point de vue Systèmes dynamiques) Le théorème est vrai sur tout ce qui est "topologiquement équivalent" au carré C. Une partie D (du plan, ou de $\mathbb{R}^n$) est *topologiquement équivalente* (ou *homéomorphe*) à C s'il existe un homéomorphisme $h : C \to D$ (...). Exercice : par exemple, le disque D. Le théorème est vrai sur le disque : en effet, si $f : D \to D$ est continue, $h^{-1}fh : C \to C$ est continue. D'après ce qu'on vient de démontrer, $h^{-1}fh$ a alors un point fixe P_0. Alors f fixe le point $h(P_0)$.

On ne peut pas déformer continûment le cercle unité en un point sans passer par l'origine. (Théorème de l'antivol).

Notons $\mathcal{C}$ le cercle unité de centre O, D le disque qu'il borde.

Théorème. *Il n'existe pas d'application continue $H : \mathcal{C} \times [0, 1] \to D$ (comme homotopie) telle que, pour tout point P du cercle,*

1. *$H(P, 0) = P$,*
2. *$H(P, 1)$ est un point P_0 indépendant de P,*
3. *pour tout t, $H(P, t) \neq O$.*

Démonstration. Résumé : sinon, en regardant en polaires, on a une application du disque dans lui-même, qui fixe chaque point du bord, et qui évite zéro. On projette depuis zéro sur le cercle, et on obtient une rétraction du disque sur le cercle : en particulier, tous les points du bord sont fixes, et aucun autre. On compose par une rotation, et on a une application du disque dans lui-même, sans point fixe.

On raisonne par l'absurde : on suppose donnée une application H, et on essaie d'utiliser H pour construire une application continue du disque dans lui-même, qui violerait le théorème de Brouwer. Pour simplifier, on va supposer que, pour tout P, t, $H(P, t)$ appartient au disque unité D. (la déformation a lieu à l'intérieur du disque unité ; exercice : traiter le cas général selon la même idée). On utilise la notation complexe trigonométrique (les coordonnées polaires !). On pose $f_1(re^{i\theta}) = H(e^{i\theta}, 1 - r)$. Ceci définit une application continue du disque dans lui-même : le point important est que, grâce à (2), l'application est bien définie pour $r = 0$. Cette application a une propriété intéressante : aucun point n'est envoyé sur O (grâce à (3)). On peut donc la composer avec l'application $f_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{C}$, continue, qui envoie chaque $re^{i\theta}$ sur $e^{i\theta}$ (en notation complexe, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$). On obtient alors une application $f_2 \circ f_1 : D \to D$, qui envoie chaque point dur le cercle $\mathbb{C}$, et qui fixe chaque point de $\mathbb{C}$ (grâce à (1)). On compose par une rotation, par exemple $z \mapsto -z$, et c'est bon. $\square$

Liens.
http ://www.mazeworks.com/hex7/index.htm
http ://maarup.net/thomas/hex/

Histoire

Brouwer montre son théorème comme corollaire d'un théorème de point fixe sur la sphère, application de sa notion de degré. Brouwer et la topologie : 1911-1912.

Dieudonné : Poincaré a introduit les objets, et Brouwer les méthodes. Alexander prouve les "théorèmes" de Poincaré sur l'homologie simpliciale en utilisant les méthodes de Brouwer).

Preuve de Cauchy-Peano

$y'(x) = f(x, y(x))$ équivaut à $y = T(y)$ où

$$T(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Trouver une solution à l'équadiff revient à trouver un point fixe de T. Théorème de point fixe contractant de Banach, mais seulement dans les cas où il existe un unique point fixe. http ://www.math.unl.edu/ s-bbockel1/933-notes/node1.html

There exists $a > 0$ such that f is continuous in the closed square

$Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq a\}$.

Let $\mathcal{C} := \{u$ continuous on $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]\}$, $\alpha = \frac{a}{M}$, $M = \max_Q |f(x, y)|$. Let $A := \{u \in sC :\ |u(x) - y_0| \leq a,\ |u(x_1) - u(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|\}$ Then T maps A into A. A is convex and compact (Arzela), thus Shauder-Tychonoff theorem applies.

Théorème de Schader-Tychonoff : If $T : X \to X$ is continuous and if $A \subset X$ is a convex compact subset of the normed linear space X and $T(A) \subset A$, then T has a fixed point in A .

Le théorème de Shauder-Tychonoff se déduit de Brouwer par approximation.