Une promenade du côté de l'homologie de Morse

Grenoble, mars 2015

Argument

Plan

Point de départ : systèmes mécaniques (de la physique), espace des phases, Energie.
Promenade parallèle : homologie simpliciale, homologie de Morse.
Fin : homologie de Floer.

Argument résumé

Les systèmes mécaniques peuvent être modélisés par un hamiltonien sur leur espace des phases. Les points d'équilibre correspondent aux points critiques du hamiltonien. Certains systèmes mécaniques sontmodélisés par un hamiltonien dépendant du temps..

L'homologie de Morse donne une borne inférieure sur le nombre de points critiques d'un hamiltonien, en fonction de la forme de son espace des phases.

L'homologie de Floer permet de généraliser ceci (1) a des hamiltoniens dépendant du temps, (comme pour le pendule à ressort), mais malheureusement sur des espaces compacts, et (2) a des hamiltoniens sur certains espaces non compacts (avec des hypothèses à l'infini), comme pour le pendule double.

1 Systèmes mécaniques, trajectoires périodiques

(a) Dynamique des systèmes mécaniques

Le pendule est un exemple classique de système mécanique particulièrement monotone, mais si on s'amuse à accrocher un deuxième bras articulé au bout du premier, on obtient un pendule double, et c'est tout de suite plus spectaculaire. ** VIDEO pendule double**. Ce système assez fascinant est un peu une motivation pour tout l'exposé : je voudrais vous présenter des outils mathématiques qui permettent de dire quelque chose sur le comportement de cet objet.

(b) Espace des configurations

Avant de pouvoir dire quelque chose sur le pendule double, il faut comprendre le pendule simple.

L'espace des configurations doit modéliser l'ensemble des positions possibles du pendule. Numériquement, la position du pendule est codée par exemple par l'angle qu'il fait avec la verticale, c'est donc un nombre modulo 2π. Géométriquement, l'extrémité libre du pendule décrit un cercle, l'ensemble des positions est donc en bijection avec ce cercle.

Cet espace des configurations, c'est un espace statique, chaque configuration correspond en quelque sorte à une photo du pendule. Mais si vous me donnez une configuration du pendule (un angle θ), autrement dit si vous me montrez une photo du pendule, je serai incapable de prévoir le mouvement, puisque je ne saurai même pas dans quel sens le pendule se déplaçait lorsque la photo a été prise.

(c) Espace des phases

Que manque-t-il pour pouvoir prédire le mouvement futur ? Il manque l'impulsion initiale, autrement dit la vitesse au moment où la photo a été prise. Géométriquement, la vitesse est représentée par un vecteur tangent au cercle. Numériquement, on peut la mesurer en tour par minutes, ou en radian par seconde, et on peut décider qu'elle a un signe selon sa direction ; ainsi, c'est un nombre réel qu'on note $\dot{\theta}$. On définit donc *l'espace des phases* du pendule comme l'ensemble des couples $(\theta, \dot{\theta})$. C'est le produit cartésien d'un cercle et d'une droite.

Si je veux dessiner cet espace des phases sur le tableau, je vais prendre un axe horizontal correspondant aux valeurs de θ, et un axe vertical correspondant aux valeurs de $\dot{\theta}$. En réalité, il ne faut pas oublier que θ est un angle : sur ce dessin, le point $(\theta+2\pi, \dot{\theta})$ représente le même état du pendule que le point $(\theta, \dot{\theta})$. Mais laissons de côté ce problème pour le moment, et représentons quelques mouvements du pendule dans l'espace des phases.

Le point $(0, 0)$, par exemple, correspond à l'état d'équilibre : le pendule est vertical et immobile. Le point $(\pi/4, 0)$ correspond à un angle de 45 degrés par rapport à la verticale avec une vitesse nulle. Si on lache le pendule à partir de cet état, il se met à osciller selon un mouvement périodique, et on peut aussi représenter ce mouvement dans l'espace des phases. Le pendule commence par descendre et passe par la position verticale avec une vitesse négative, puis il remonte jusqu'à atteindre le point $(-\pi/4, 0)$ (si on néglige les frottements), etc. Ce mouvement périodique est représenté par une courbe fermée dans l'espace des phases, courbe qui entoure le point d'équilibre $(0, 0)$.

Décrivons un second type de mouvement. Si, au lieu de simplement le lâcher, je donne au pendule une grande impulsion, on va obtenir un mouvement qualitativement différent : le pendule fait un tour complet avant de repasser par la même position (et avec la même vitesse) : cette fois si θ est une fonction monotone, par exemple croissante, du temps, la vitesse $\dot{\theta}$ est toujours strictement positive ; si la condition initiale est $(\theta, \dot{\theta})$, au bout d'un moment on arrivera en $(\theta + 2\pi, \dot{\theta})$, ce qui correspond bien au fait que le pendule est revenu à son état initial. Le mouvement se répète périodiquement, mais dans l'espace des phases la courbe n'est pas fermée, elle vérifie $(\theta(t + T), \dot{\theta}(t + T)) = (\theta(t) + 2\pi, \dot{\theta}(t))$.

Qu'y a-t-il à l'interface entre ces deux types de courbes ? D'abord le point d'équilibre instable $(\pi, 0)$ correspondant à la position verticale vers le haut, avec vitesse nulle. Ensuite deux trajectoires dont l'existence est seulement théorique, qui sont asymptotes à cet état d'équilibre instable. Ces trajectoires n'ont pas d'existence pratique mais elles permettent de compléter le dessin. On obtient ainsi ce qu'on appelle le portrait de phase du pendule. On y voit, en un seul coup d'oeil, tous les mouvements possibles du pendule simple.

J'ai utilisé le tableau par commodité, mais en réalité l'espace des phases est le produit d'un cercle et d'une droite, et on devrait plutôt le réprésenter par un cylindre. Dans cette représentation, le problème du modulo 2π disparait : chaque point du cylindre représente bien un unique état du pendule (et réciproquement). Voici une animation qui montre un certain nombres de trajectoires du pendule, vues dans l'espace des phases. ** ANIMATION JAVA **.

(d) Energie, équations de Hamilton

Un autre objet important dans la modélisation est la fonction énergie $E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 - mg\ell\cos(\theta)$. On peut le voir comme une fonction définie sur l'espace des phases, à valeur réelles. L'énergie est préservée lors du mouvement... En réalité, les courbes que nous avons dessinées dans notre cylindre décrivent les lignes de niveau de la fonction E. ** DESSIN **.

Jusqu'à présent, j'ai soigneusement évité de parler d'équation différentielle. Vous savez bien sûr que depuis Newton, on sait qu'on peut modéliser le mouvement du pendule par une équation différentielle. C'est une équation d'ordre deux (elle fait intervenir l'accélération) ; les théorèmes classiques de Cauchy et Lipschitz d'existence et d'unicité s'appliquent, et on peut les décrire ainsi : par chaque point de l'espace des phases passe une unique courbe solution ; autrement dit, chaque état détermine complètement le mouvement du pendule, ce qui correspond merveilleusement à l'expérience.

Hamilton a découvert qu'on pouvait retrouver l'équation différentielle du pendule (et donc le mouvement complet) à partir de E, en écrivant simplement

$$\dot{q} = \frac{\partial E}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial E}{\partial q}$$

où $q = \theta$ et $p = m\ell^2\dot{\theta}$. Ce qui est remarquable, c'est que ce principe de Hamilton est très général : toutes les équations différentielles des systèmes mécaniques sans frottement peuvent se mettre sous cette forme ; ceci permet un traitement mathématique unifié de tous ces systèmes, qu'on appelle *systèmes dynamiques hamiltoniens*. La fonction énergie est aussi appelée fonction hamiltonienne.

Comment lire ces équations : il y a une difficulté qui est que p, q sont parfois utilisées comme des variables, parfois comme des fonctions. E est une fonction de p, q (ici ce sont des variables). Rappelons la définition des dérivées partielles : on a deux variables, si on décide de fixer l'une des deux on se retrouve avec une fonction d'une seule variable qu'on sait dériver, ce qu'on obtient est la dérivée partielle par rapport à cette variable. Une solution du sysème d'équations est, par définition, une courbe paramétrée $t \mapsto (p(t), q(t))$ (ici p et q sont des fonctions), qui vérifie que pour tout t,

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial E}{\partial p}(p(t), q(t)), \dot{p}(t) = -\frac{\partial E}{\partial q}(p(t), q(t)).$$

En particulier, en un point (p_0, q_0) de l'espace des phases où les deux dérivées partielles s'annulent simultanément, on voit que la courbe constante $t \mapsto (p_0, q_0)$ est solution. On a donc une correspondance entre les points d'équilibre et les "points critiques" de E, et ceci pour tout système qui se met sous forme hamiltonienne.

(e) Trajectoires périodiques

L'une des premières questions que se pose un mathématicien face à un système hamiltonien, c'est de savoir s'il existe beaucoup de trajectoires périodiques. Pour le pendule simple, toutes les trajectoires (sauf 2 !) sont périodiques. Pour le pendule double, il n'est pas clair qu'il existe ne serait-ce qu'un trajectoire périodique, si on excepte les deux points d'équilibre ! !

Pourquoi est-ce que le pendule double est beaucoup plus compliqué que le pendule simple ? Une réponse est que l'espace des phases M est maintenant de dimension quatre : en effet, pour décrire l'état du pendule il nous faut la position et la vitesse de chacun des deux bras...

Je voudrais vous montrer une animation d'un troisième système mécanique, il s'git d'un pendule où le bras est remplacé par un ressort. ** VIDEO spring pendulum **. Quelle est l'espace des phases ? Une première possibilité serait de décrire à la fois l'état du pendule et l'état du ressort, et on obtiendrait un espace des phases de dimension quatre. Mais on peut remarquer qu'en première approximation, le ressort décrit un mouvement sinusoïdal indépendant du mouvement du pendule (et qu'on peut expliciter). On suppose connu l'équation du mouvement du ressort, il ne reste plus alors qu'à décrire l'état du pendule, et on retombe sur un espace des phases de dimension deux, le même que celui du pendule simple. A nouveau les équations peuvent se mettre sous forme hamiltonienne, mais avec une fonction E qui dépend périodiquement du temps (dépendence due aux mouvements périodiques du ressort). Là encore il n'y a pas de façon simple de savoir si un état donné du pendule va conduire à une trajectoire périodique.

Existe-t-il des trajectoires périodiques pour le pendule double et pour le pendule à ressort ?

Je vais essayer de vous expliquer le cheminement mathématique qui permet de montrer, par exemple, qu'il existe une infinité de trajectoires périodiques pour le pendule double. L'impulsion fondamentale pour les mathématiciens a été la *Conjecture d'Arnol'd : certaines "formes" de l'espace des phases garantissent un nombre minimal d'orbites périodiques.* Pour préciser cette hypothèse sur la "forme" de l'espace des phases, il nous faut parler d'homologie.

2 De la combinatoire des polyèdres à la topologie

Oublions provisoirement tout ce qu'on vient de faire...

On considère un polyhèdre, pour simplifier disons que les faces sont triangulaires. L'homologie simpliciale est une façon très efficace (et ludique) de coder les propriétés relations combinatoires entre faces, arêtes et sommets.

(a) Les applications "bord"

Si T est une face dont les arêtes sont A_1, A_2, A_3, on écrira $\partial T = A_1 + A_2 + A_3$ (c'est juste une façon condensée de décrire le bord du triangle). De la même façon, si A est une arête d'extrémités S_1, S_2, on écrira $\partial A = S_1 + S_2$.

On étend cette écriture aux réunions de faces ou d'arêtes en décidant, par exemple, que $\partial(T_1 + T_2) := \partial T_1 + \partial T_2$. On décide aussi de calculer modulo 2. Regardons alors ce qui se passe lorsque T_1 et T_2 on une arête A_3 en commun :

$$\partial(T_1 + T_2) = A_1 + A_2 + A_3 + A_3 + A_4 + A_5 = A_1 + A_2 + A_4 + A_5$$

ce qu'on peut interpréter en disant que le bord de $T_1 \cup T_2$ est la réunion des quatre arêtes.

On a ainsi défini deux applications, on peut mettre des indices pour les distinguer :

$$\partial_2 : \{\text{sommes de faces}\} \longrightarrow \{\text{sommes d'arêtes}\}$$

et

$$\partial_1 : \{\text{sommes d'arêtes}\} \longrightarrow \{\text{sommes de sommets}\}.$$

Si je pars d'un triangle, je peux prendre le bord de son bord : j'obtient 0, ce que j'interprète en disant que le bord. Par "linéarité", ce sera encore vraie pour toute réunion de faces : le bord d'un bord est vide, ou encore $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$. C'est la propriété algébrique essentielle de notre codage.

(b) Cycles et bords

Appelons *cycle* est réunion d'arêtes qui forme une ou plusieurs courbes fermées, c'est-à-dire sans bord. Dans notre formalisme, une réunion d'arêtes $A_1 + \cdots + A_k$ est un cycle si son bord est vide. On peut aussi définir un *bord de faces*, c'est une réunion d'arêtes qui est le bord d'une certaine réunion de triangles. "Le bord d'un bord est vide" se reformule en disant que tout bord est un cycle. Est-ce que tout cycle est un bord ?

Oui sur celui-ci et celui-ci... Non sur celui-là ! Quelle est la différence ? Il a un trou !

(c) Compter les cycles

L'un des objets de ce "calcul des polyèdres", c'est de pouvoir donner un sens et calculer le "nombre de trous" d'un polyèdre. Comment faire ? Intuitivement, un "trou" correspond à un cycle qui n'est pas un bord. Une première idée serait donc de de compter les cycles qui ne sont pas des bords. Mais il y a plusieurs cycles qui font le tour du même "trou", et qu'on ne devrait compter qu'une seule fois... La bonne idée est de compter les **"cycles**

modulo les bords" : par exemple ces deux cycles $A_1 + A_2 + A_3$ et $A'_1 + A'_2 + A'_3$ forment le bord de cette réunion de faces $T_1 + T_2 + T_3$, ainsi on a

$$A_1 + A_2 + A_3 = A'_1 + A'_2 + A'_3 + \partial(T_1 + T_2 + T_3)$$

et on dira que les deux cycles son "égaux modulo un bord".

Par exemple, sur celui-ci, les quatre cycles sont 0 (le cycle vide !), C_1, C_2, et $C_1 + C_2$.

(d) Topologie

Théorème. *Sur tout polyhèdre torique, il y a exactement quatre cycles comptés modulo les bords.*

Le théorème dit que (1) ces quatre cycles sont distincts même modulo les bords, et (2) tout cycle est égale à l'un de ces quatre modulo un bord.

Qu'est-ce qu'un polyèdre torique ? Intuitivement, c'est un polyèdre qu'on peut déformer continument en une bouée, qu'on appelle un tore. On dit qu'il a la topologie du tore. La topologie, ce sont les mathématiques du caoutchouc, le monde où les objets sont considérés comme équivalents lorsqu'on peut déformer continument l'un en l'autre, comme sur cette animation. Formellement, "avoir la topologie du tore" signifie qu'il existe un homéomorphisme avec le tore. La sphère et le cube ont la même topologie, qui est différente de celle d'une bouée (qu'on appelle un tore).

Ce qui est remarquable dans ce thèorème, c'est que les polyèdres toriques peuvent avoir des combinatoires très différentes. Le nombre de faces, arêtes, sommets diffèrent de l'un à l'autre, certains sont fait de triangle et d'autres de quadrilatères ou d'autres types de polygones, etc. Mais quelle que soit cette combinatoire, lorsqu'on compte le nombre de cycles modulo bords, on trouve le même nombre !

L'objet de l'homologie, c'est de coder de façon algébrique des propriétés topologiques. On dit que l'homologie produit des invariants topologiques.

Formulation conceptuelle On numérote nos arêtes. Une réunion d'arêtes peut alors être codée par une suite de 0 et de 1, 0 signifie qu'on ne prend pas l'arête correspondante et 1 qu'on la prend. Par exemple, $(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$ code la réunion $A_3 \cup A_5 \cup A_6$. Ainsi, l'ensemble des réunion d'arêtes s'identifie à $\{0, 1\}^{N_A}$. Même chose pour les faces et les sommets. Cet ensemble est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: ceci signifie essentiellement qu'on sait ajouter deux éléments, ce qui est évident en calculant modulo 2. Les applications bords que nous avons définies sont linéaires, les cycles sont les éléments du noyau de $\partial_{1\to 0}$, les bords de faces sont les éléments de l'image de $\partial_{2\to 1}$. Les cycles modulo bord sont les éléments de ce qu'on appelle un espace vectoriel quotient. Dans cet exemple, ce quotient est de dimension 2, (C_1, C_2) en forme une base. Cet espace vectoriel "cycles modulo bords" est appelé "premier groupe d'homologie simpliciale à coefficients dans $\{0, 1\}$".

En généralisant à tout polyèdre, on obtient la formulation :

Théorème. *Pour tout polyhèdre X, et tout i, la dimension b_i de l'espace vectoriel*

$$H_i(X) = \mathrm{Ker}(\partial_{i\to i-1})/\mathrm{Im}(\partial_{i+1\to i})$$

ne dépend que de la topologie du polyhèdre.

(Ou encore, le nombre de cycle module bord est égal à 2_i^b). Le nombre b_i s'appelle nombre de Betti du polyhèdre. On a par exemple $b_1 = 0$ pour la sphère, pour le tore $b_1 = 2$, pour la surface "de genre deux" $b_1 = 4$, etc. Ainsi, le nombre de Betti est un invariant algébrique qui classifie les surfaces. L'espace $H_i(X)$ est appelé *ième groupe d'homologie simpliciale à coefficients dans* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *de* X.

Corollaire (Euler-Cauchy-Poincaré)**.** *La caractéristique d'Euler*

$$\sharp faces - \sharp aretes + \sharp sommets = \dim(H_2) - \dim(H_1) + \dim(H_0)$$

ne dépend que de la topologie du polyèdre.

3 L'homologie de Morse, ou la dynamique des gouttes d'eau...

On n'est plus très loin du terme de la promenade : on a beaucoup travaillé mais maintenant, ça va être très facile d'expliquer ce qu'est l'homologie de Morse, et comment elle permet de compter les trajectoires périodiques des systèmes mécaniques. Ca va être très facile en particulier parce que les détails mathématiques vont devenir de plus en plus difficiles, et mes explications vont donc être de plus en plus poétiques !

Pour jouer à l'homologie de Morse, on quitte le monde des polyèdres pour le monde des surfaces lisses. On dessine une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère $Oxyz$. On s'intéresse alors à la fonction hauteur $z : S \to \mathbb{R}$" (si vous voulez tenir le fil complet de l'exposé, vous pouvez pensez que dans cette séquence la hauteur joue le rôle de la fonction énergie dans nos systèmes mécaniques du début, mais il n'est pas nécessaire d'avoir ceci en tête pour le moment), et surtout à ses "points critiques" : ce sont simplement les points en lesquels le plan tangent à la surface est horizontal. Il y a trois types de points critiques :
— Les maximum locaux qu'on notera $M_1, ...,$
— Les points "col" ou "selle" qu'on notera $S_1, ...,$
— Les minimum locaux qu'on notera $m_1, ...$

Une application bord **** PREPARER UN EXEMPLE **** Etant donné un point selle S, on peut suivre par la pensée la trajectoire d'une goutte d'eau qui glisse doucement sur la surface sous l'effet d'un champ de gravitation vertical, [1] en partant de S. Si la goutte est exactement au point S, bien sûr, elle ne bouge pas, mais si on la pousse un tout petit peu, elle se met à glisser. Elle peut suivre essentiellement deux trajectoires, selon qu'on l'ait poussée initialement d'un côté de S ou de l'autre, et elle va nécessairement aboutir à un minimum local m_1 ou m_2. On écrira

$$\partial S = m_1 + m_2.$$

Cette écriture s'interprète en disant que le bord de la réunion des deux trajectoires issues de S est constitué des points m_1 et m_2.

On peut faire la même chose en partant des maxima locaux. Si M est un maximum local, on écrira

$$\partial M = S_1 + \cdots + S_k$$

où la somme de droite contient un terme S pour chaque trajectoire de goutte d'eau qui va de M à S. Exemples.... Comme avant, on compte modulo 2, par exemple $\partial S = 0$ si les deux trajectoires issues de S aboutissent au même point (c'est compatible avec l'interprétation géométrique puisque leur réunion est une courbe fermée, elle n'a pas de bord). Cette dernière somme parait plus difficile à interpréter géométriquement... Regardons pourtant la région couverte par toutes les trajectoires de gouttes d'eau issues d'un maximum local donné M. Elle est bordée par des courbes qui sont des réunions de trajectoires issues de certains points selles. Ces points selles sont exactement ceux qui interviennent dans la somme définissant ∂M.

1. Pour éviter les contre-sens, précisons que l'objet n'est pas de faire de la mécanique des gouttes d'eau, mais simplement d'utiliser les gouttes d'eau comme une métaphore pour un objet mathématique qu'on appelle "flot du champ de gradient de la fonction hauteur".

Ainsi, nous avons défini deux applications bords $\partial_{2\to1}$ et $\partial_{1\to0}$. Comme avec nos polyhèdre, on peut vérifier que leur composition est nul : le bord d'un bord est vide (l'argument est le même qu'avant avec notre interprétation géométrique). Comme avant, on peut définir les cycles et les bords, et compter le nombre de cycles modulo bords.

Théorème. *Le nombre de cycle modulo bord pour l'homologie de Morse sur une surface S est égal au nombre de cycles modulo bord pour l'homologie simpliciale de n'importe quel polyhèdre qui a la même topologie que S.*

Ou, plus conceptuellement :

Théorème. *Chaque H_i défini par l'homologie de Morse sur une surface S a la même dimension que le H_i défini sur n'importe quel polyhèdre qui a la même topologie que S.*

Corollaire. *("Inégalités de Morse") Sur toute surface torique, la fonction "hauteur" a au moins deux points selles. Pour toute surface qui est topologiquement une bouée à g places, la fonction "hauteur" a au moins $2g$ points selles.*

Ce corollaire relie donc une quantité topologique (le nombre de Betti) et une quantité analytique (le nombre de points critiques d'une fonction quelconque sur la surface. Comme avant, l'homologie de Morse fonctionne en toute dimension. (Théorème de Reeb : les seuls espaces admettant une fonciton avec exactement deux points critiques sont les sphères).

Corollaire. *Si l'espace des phases d'un système mécanique est un tore, et que l'énergie ne dépend pas du temps, alors il y a au moins quatre points d'équilibre.*

Ce corollaire se généralise à toute surface compacte, et même à toute "surface compacte de dimension quelconque" (qu'on appelle plutôt *variété*.

La conjecture d'Arnol'd dit précisément que si on prend un système représenté par une énergie qui dépend du temps de façon périodique avec une période T, alors il y a au moins autant de trajectoires de période T que le nombre de points déquilibre qu'on trouverait dans le corollaire précédent pour une énergie qui ne dépend pas du temps.

4 Homologie de Floer et conjecture d'Arnol'd

Le mathématicien Clifford Taubes (1954-), prof à Harvard), raconte qu'un jour Andreas Floer, qui commençait sa thèse sous sa direction à Berkeley, est arrivé dans son bureau et a déclaré : "j'ai trouvé comment faire de l'homologie de Morse pour la fonctionnelle de Chern-Simons." Il se souvient très bien avoir répondu (comme aurait fait n'importe lequel d'entre nous !) "Et alors ? ?"...

Et alors, une trentaine d'années plus tard, "Floer homology" donne plus de 5000 résultats dans Arxiv.

De quoi s'agit-il ? En particulier d'une méthode pour démontrer la conjecture d'Arnol'd. On a vu qu'il peut y avoir deux types de systèmes dynamiques hamlitoniens. Le plus simple, c'est lorsque la fonction hamiltonienne E ne dépend pas du temps. On peut alors lui appliquer les inégalités de Morse, qui donne un nombre minimal de points critiques, et ces points critiques correspondent à des états d'équilibre, qui sont des trajcetoires périodiques pérticulières. La conjecture d'Arnol'd, c'est que cette borne inférieure sur le nombre de trajectoires périodiques devrait encore être vraie lorsque la fonction hamiltonienne dépend du temps (comme pour le pendule à ressort).

Conjecture. *(Arnol'd) Un système dynamique hamiltonien (dans lequel la fonction hamiltonienne peut dépendre périodiquement du temps avec une période* 1*), avec pour espace des phases un espace* M *compact, a toujours des orbites périodiques de période* 1*, au moins autant que la somme de tous les nombres de Betti de* M*.*

Mais au delà de cet énoncé (solution de la conjecture d'Arnol'd), c'est la théorie développée pour le démontrer qui est incroyable. AF fait marcher l'analogie suivante :

Il considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des "lacets" dans M (c'est l'analogue de la surface S dans l'homologie de Morse). Sur cet ensemble de lacet, il y a une "fonction" $\mathcal{A} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ appelé l'action d'un lacet. On peut définir l'ensemble des points critiques de $\mathcal{A}$, et vérifier que les points critiques sont exactement les trajectoires périodiques du système mécanique (c'est l'analogue des points critiques de la fonction hauteur sur notre surface S). Surtout, AF montre comment définir le "flot du gradient de $\mathcal{A}$" (les trajectoires des gouttes d'eau), et construit ainsi des fonctions bord ∂. Enfin, il montre :

Théorème. *Chaque espace vectoriel* H_i *défini par l'homologie de Floer sur* $\mathcal{A}$ *a la même dimension que le* H_i *défini par l'homologie de Morse sur l'espace* M *des phases du système mécanique.*

Ce qui implique le théorème précédent. Par exemple, pour un système dynamique hamiltonien sur la sphère, il y a au moins deux trajectoires périodiques, et au moins quatre sur le tore.

Conclusion

Vous allez me dire... La conjecture d'Arnol'd concerne les espaces compacts. Pour la motiver, je vous ai parlé de systèmes mécaniques dont l'espace des phases était un cylindre (ou un produit de cylindre), qui ne sont pas compacts ! En réalité les espaces des phases des systèmes mécaniques ne sont jamais compacts, parce que rien n'interdit à la vitesse de prendre des valeurs arbitrairement grandes... Evidemment, cette objection est très génante pour mon exposé, et on pourrait même dire qu'elle le rend carrément bancal...

Il y a un intérêt à ce que cette histoire soit un peu bancale, c'est que ça donne une assez bonne idée de la recherche en maths pures. Beaucoup de questions ou de sujets sont motivés par des problèmes physiques, et on garde toujours ces motivations physiques dans un coin de la tête, mais le but n'est pas avant tout de rémondre à une question trop précise ; c'est plutôt de produire des outils conceptuels adaptés à la question. Pour réfléchir, les mathématiciens ont besoin de se placer dans un cadre général, pas trop spécifique (tous les hamiltoniens et non pas ceux corrrespondant à un systèmes mécanique donné) ; dans ce cadre, l'hypothèse de compacité est très "naturelle".

Pour revenir à notre histoire, l'homologie de Floer est suffisamment souple pour qu'on puisse l'adapter. Des mathématiciens (Viterbo, Abonddandolo-Schwarz) ont démontré un théorème similaire à celui de Floer dans des cadres non compacts. On peut appliquer ce théorème pour le pendule double, et conclure qu'il existe une infinité de trajectoires périodiques. Plus précisément : pour tout couple d'entiers relatifs (n_1, n_2), il existe au moins quatre trajectoires périodiques vérifiant la propriété suivante : au cours d'une période, le premier bras fait au total n_1 tours (comptés algébriquement), et le second en fait n_2.

Histoire

Géométrie symplectique et la conjecture d'Arnol'd

Newton 1687 : lois de la mécanique.

Formulation lagrangienne, Lagrange 1788. Formulation hamiltonienne, Hamilton 1833. Théorème de Liouville, Liouville 1838, Gibbs 1902. Théorème de Poincaré, Poincaré

Poincaré-Birkhoff 1912 (7 mars–26 octobre, Poincaré meurt entre temps). L'un des obstacles à la généralisation en dimension supérieure était de réaliser l'importance de la préservation de la forme symplectique.

Conjecture d'Arnol'd 1965. Il la démontre pour un difféo hamiltonien proche de l'identité. "Remarque C : il est pausible que le théorème reste vrai...". Question formelle en 1974, pour le tore $\mathbb{T}^2$: a-t-on au moins un point fixe ?

Conley-Zendher 1983.

Gromov 1985.

Floer 1988-89, puis Weinstein.

Homologie de Morse-Floer

Théorie de Morse, Morse 1934.

Homologie de Morse, formulation classique par attachement d'anses : Thom 1949, Smale 1960, Milnor 1965. Formulation par flot de gradient, Witten 1982.