

GEOMETRIE HYPERBOLIQUE DES SURFACES NON COMPACTES

JONATHAN CONEJEROS.

Maître de mémoire : Frédéric LE ROUX

Juillet 2012.

à Paris

Table des matières

Table des matières	ii
Introduction	v
1 Surfaces hyperboliques	1
1.1 Métrique sur une surface hyperbolique	2
1.2 Construction de surfaces hyperboliques	4
1.2.1 Surfaces compactes de genre supérieur à 1	5
1.2.2 La surface $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$	6
1.3 Groupes de première espèce	9
2 Propriétés des géodésiques sur une surface compacte	13
2.1 Propriétés des géodésiques sur une surface compacte	13
2.2 Propriétés des collections de géodésiques sur une surface compacte	16
3 Propriétés des géodésiques sur la surface $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$	25
3.1 Propriétés des géodésiques sur la surface $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$	25
3.2 Propriétés des collections de géodésiques sur la surface $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$. .	32
Bibliographie	40

Introduction

Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ un homéomorphisme qui préserve l'orientation. On sait d'après le théorème de Brouwer que f a un point fixe dans $\overline{\mathbb{D}}$. Handel a donné des conditions "dynamiques" pour conclure que f a un point fixe dans \mathbb{D} . Le théorème de point fixe de Handel est le suivant. Les autres références sont [LR12] et [LC06].

Théorème 0.1. [Théorème de point fixe de Handel, Théorème 2.2 [Han99]]
Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ un homéomorphisme qui préserve l'orientation. On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- (H1) Il existe un entier $r \geq 3$ et des points x_1, \dots, x_r dans \mathbb{D} distincts.
- (H2) Il existe $2r$ points $\alpha_1, \omega_1, \dots, \alpha_r, \omega_r$ dans $\partial\mathbb{D}$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(x_i) = \alpha_i, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_i) = \omega_i.$$

- (H3) L'ordre cyclique sur $\partial\mathbb{D}$ est

$$\alpha_1, \omega_r, \alpha_2, \omega_{r-1}, \dots, \alpha_r, \omega_1, \alpha_1.$$

Alors f a un point fixe dans \mathbb{D} .

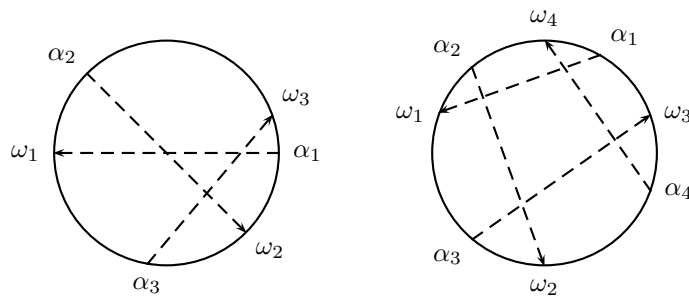


FIGURE 1 – Diagrammes des orbites pour le théorème du point fixe de Handel : cas $r = 3$ et $r = 4$.

Ce théorème est un “outil” pour prouver l’existence de point fixe pour un homéomorphisme isotope à l’identité qui préserve l’orientation sur les surfaces munies d’une métrique hyperbolique de la manière suivante : considérons une surface S munie d’une métrique hyperbolique (complète) et $f : S \rightarrow S$ un homéomorphisme isotope à l’identité qui préserve l’orientation. Alors le revêtement universel de S est le disque hyperbolique \mathbb{H}^2 (topologiquement égal à \mathbb{D}). En relevant l’isotopie, on obtient un homéomorphisme $\tilde{f} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ qui est un relevé de f et qui s’entend (voir lemme 3.2 [Han99]) à un homéomorphisme $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ qui est l’identité sur $\partial\mathbb{D}$. Dans ce sens tous les points fixes de \tilde{f} dans \mathbb{H}^2 se projettent sur des points fixes de f . Voici une application du théorème de Handel. Si $(F_t)_{t \in [0,1]}$ est une isotopie issue de l’identité sur une surface S , on peut définir la trajectoire de tout point $x \in S$ comme l’application $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow S$ définie par $\gamma_x(t) = F_t(x)$, notons que la trajectoire de $x \in S$ est un chemin qui joint x à $f(x)$. De plus si x est un point périodique de f , de période $p \geq 1$, on obtient alors un lacet avec point base x (par assemblage des trajectoires)

$$\Gamma_x := \gamma_x * \gamma_{f(x)} * \cdots * \gamma_{f^{p-1}(x)}.$$

Le résultat suivant est attribué à Betsvina et Handel.

Théorème 0.2. [LC06] *Soit S une partie ouverte de la sphère \mathbb{S}^2 , dont le complémentaire a au moins trois composantes connexes. Soit $f : S \rightarrow S$ un homéomorphisme isotope à l’identité. S’il existe un point périodique x de f , de période $p \geq 1$, tel que sa trajectoire Γ_x est homologue à zéro. Alors f a au moins un point fixe.*

Poincaré \mathbb{H}^2

La preuve de Handel de ce théorème est considérée comme difficile. Ce mémoire est consacré à écrire les détails de la première partie de la preuve du théorème.

Dans le premier chapitre, on écrira les détails des propriétés hyperboliques utilisées par Handel, c’est-à-dire qu’on donnera une construction détaillée d’une structure hyperbolique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$ qui soit de première espèce. Autrement dit, il s’agit de construire un sous-groupe discret, noté Γ_2 du groupe des isométries du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 (le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$) tel que \mathbb{H}^2/Γ_2 soit homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$, et tel que l’ensemble limite de Γ_2 soit égal à tout le bord à l’infini \mathbb{S}_∞ .

Dans le deuxième chapitre, on écrira les détails des propriétés des géodésiques sur une surface hyperbolique compacte. C’est-à-dire qu’on prouvera que toute classe d’homotopie de courbes fermées simples essentielles contient une unique géodésique fermée simple.

Dans le troisième chapitre, on écrira les détails des propriétés des géodésiques sur la surface hyperbolique $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$, où \mathcal{O} est une partie discrète infinie de \mathbb{R}^2 . C’est-à-dire qu’on prouvera que toute classe d’homotopie de courbes fermées simples “essentiels” (respectivement courbes simples propres ‘essentiels’)

contient une unique géodésique fermée simple (respectivement géodésique simple propre).

Je tiens à remercier à mon maître M. Frédéric LE ROUX pour ses conseils, sa patience mais surtout pour son aide et sa compréhension.

Chapitre 1

Surfaces hyperboliques

Le but de ce chapitre est de donner une construction détaillée d'une structure hyperbolique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$, où \mathcal{O} est une partie discrète infinie de \mathbb{R}^2 qui soit de première espèce. Autrement dit, d'après la proposition 1.14 il s'agit de construire un sous-groupe discret, noté Γ_2 du groupe des isométries du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 (le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$) tel que \mathbb{H}^2/Γ_2 soit homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$, et tel que l'ensemble limite de Γ_2 soit égal à tout le bord à l'infini \mathbb{S}_∞ . Quelques références pour ce chapitre sont [Rat94], [Bea83] et [Kat92].

Soit S une surface topologique, c'est-à-dire un espace topologique séparé, connexe et localement homéomorphe à une partie ouverte de \mathbb{R}^2 . Un atlas sur S est la donnée d'une collection de fonctions

$$\{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{H}^2\}_{i \in I},$$

appelées cartes qui satisfait les conditions suivantes :

- (1) pour tout $i \in I$ l'ensemble U_i est une partie ouverte et connexe de S et $\cup_{i \in I} U_i = S$,
- (2) pour tout $i \in I$ la fonction $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{H}^2$ est un homéomorphisme sur une partie ouverte de \mathbb{H}^2 , et
- (3) pour tout $i, j \in I$ tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que le changements de cartes

$$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

coïncide avec g sur $\varphi_i(U_i \cap U_j)$.

Définition 1.1 (Structure hyperbolique). *Soit S une surface topologique. Une structure hyperbolique sur S est la donnée d'un atlas (maximal) sur S .*

Définition 1.2 (Surface hyperbolique). *Une surface hyperbolique est une surface topologique S munie d'une structure hyperbolique.*

1.1 Métrique sur une surface hyperbolique

Dans cette section nous définirons une notion de longueur des courbes, dans une surface hyperbolique S , puis nous définirons une distance sur S basée sur la recherche de la courbe la plus courte joignant deux points.

Fixons une surface hyperbolique S et a, b deux nombres réels avec $a < b$. Une courbe dans S est une fonction continue $\gamma : [a, b] \rightarrow S$. On va définir la longueur d'une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow S$. Supposons premièrement qu'il existe une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{H}^2$ telle que $\gamma([a, b]) \subset U$. On définit la **longueur de γ** (éventuellement infinie), comme

$$l(\gamma) := l_{\mathbb{H}^2}(\varphi \circ \gamma).$$

Lemme 1.3. *La longueur d'une courbe est indépendante de la carte φ .*

Démonstration. Soit $\psi : V \rightarrow \mathbb{H}^2$ une autre carte telle que $\gamma([a, b]) \subset V$, il existe $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que $\psi = g\varphi$, et donc

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= l_{\mathbb{H}^2}(\varphi \circ \gamma); \\ &= l_{\mathbb{H}^2}(g\varphi \circ \gamma); \\ &= l_{\mathbb{H}^2}(\psi \circ \gamma). \end{aligned}$$

■

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ est une courbe arbitraire, comme $\gamma([a, b])$ est une partie compacte de S , il existe une partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ de $[a, b]$ et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ une carte $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{H}^2$ telle que $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$. On définit la longueur de γ , comme

$$l(\gamma) := \sum_{i=1}^m l_{\mathbb{H}^2}(\varphi_i \circ \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]})$$

où $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ est la courbe $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow S$.

Lemme 1.4. *La longueur d'une courbe est indépendante de la partition.*

Démonstration. Soit $a = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_n = b$ une autre partition de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\gamma([t'_{i-1}, t'_i]) \subset U_i$. Considérons la partition $a = t''_0 < t''_1 < \dots < t''_k = b$ de $[a, b]$ telle que $\{t''_i\}_{i=0}^k = \{t_i\}_{i=0}^m \cup \{t'_i\}_{i=0}^n$. On a,

$$\sum_{i=1}^k l(\gamma|_{[t''_{i-1}, t''_i]}) = \sum_{i=1}^m l(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) = \sum_{i=1}^n l(\gamma|_{[t'_{i-1}, t'_i]}).$$

■

Théorème 1.5. *Soit S une surface hyperbolique. Alors la fonction $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, définie par*

$$d(x, y) := \inf_{\gamma} l(\gamma)$$

où γ est une courbe qui joint x à y , est une distance dans S .

Démonstration. Montrons que la fonction d est bien définie.

Lemme 1.6. *Pour tout $x, y \in S$ il existe une courbe de longueur finie qui joint x à y .*

Démonstration. On définit dans S la relation suivante : $x \sim y$ si et seulement s'il existe une courbe de longueur finie qui joint x à y . Notons que \sim est une relation d'équivalence. Pour $x \in S$ notons par $[x]$ la classe d'équivalence de x . Montrons que l'ensemble $[x]$ est une partie ouverte de S . Soit $y \in [x]$ et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{H}^2$ une carte avec $y \in U$. Soit $z \in U$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ une courbe de longueur finie qui joint $\varphi(y)$ à $\varphi(z)$, donc $\varphi^{-1} \circ \gamma : [a, b] \rightarrow U$ est une courbe de longueur finie qui joint y à z . Donc $z \in [x]$. De la même manière, on montre que $[x]$ est une partie fermée de S . Donc comme la surface S est connexe, on a $[x] = S$. ■

Lemme 1.7. *La distance d est non-dégénérée.*

Démonstration. Soient x, y points distincts dans S , comme S est séparé, il existe une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{H}^2$ avec $x \in U$ et $y \notin U$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B(\varphi(x), r)} \subset \varphi(U)$. Comme $\overline{B(\varphi(x), r)}$ est une partie compacte de \mathbb{H}^2 , on a que $K := \varphi^{-1}(\overline{B(\varphi(x), r)})$ est une partie compacte de S . Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ une courbe qui joint x à y , comme $\gamma([a, b])$ est une partie connexe de S il existe $c \in (a, b)$ tel que $\gamma(c) \in \partial K$. Donc

$$\begin{aligned} l(\gamma) &\geq l(\gamma_{a,c}); \\ &= l_{\mathbb{H}^2}(\varphi \circ \gamma_{a,c}); \\ &\geq \rho(\varphi(x), \varphi(\gamma(c))) = r. \end{aligned}$$

Donc $d(x, y) \geq r > 0$. ■

Continuation de la démonstration du théorème 1.5. Montrons que d est symétrique. Soient $x, y \in S$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ une courbe qui joint x à y , alors $\gamma^{-1} : [a, b] \rightarrow S$ est une courbe qui joint y à x et satisfait $l(\gamma) = l(\gamma^{-1})$. Maintenant montrons que d satisfait l'inégalité triangulaire. Soient $x, y, z \in S$ et $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow S$ une courbe qui joint x à y et $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow S$ une courbe qui joint y à z alors $\gamma_1 * \gamma_2 : [a, c] \rightarrow S$ est une courbe qui joint x à z et satisfait $l(\gamma_1 * \gamma_2) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$. Donc

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

■

■

1.2 Construction de surfaces hyperboliques

Le but de cette section est de “montrer”, qu’on peut construire de surfaces hyperboliques en recollant les bords d’une collection de polygones convexes abstraits et disjoints de \mathbb{H}^2 .

Définition 1.8 (Polygone convexe abstrait). *Un polygone convexe abstrait P est une partie fermée, connexe de \mathbb{H}^2 et convexe, c’est-à-dire pour tout $x, y \in P$, l’unique arc de géodésique qui passe par x et y est contenu dans P et la donnée d’une collection \mathcal{S} de parties de ∂P (dans \mathbb{H}^2), appelés bords de P , qui satisfait les conditions suivantes :*

- (1) *tout bord de P est un arc de géodésique, éventuellement de longueur infinie,*
- (2) *l’intersection de deux bords de P , si elle n’est pas vide, est une extrémité de chacun des deux bords,*
- (3) *l’union des bords de P est égal à ∂P , et*
- (4) *la collection \mathcal{S} est localement finie.*

Soit \mathcal{P} une collection de polygones convexes abstraits et disjoints dans \mathbb{H}^2 et \mathcal{S} la collection des bords des polygones de \mathcal{P} . On rappelle que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est le groupe d’isométries de \mathbb{H}^2 (voir le théorème 7.4.1 [Bea83]).

Définition 1.9 (Appariement de bords). *Un appariement de bords pour l’ensemble \mathcal{P} est la donnée d’une collection d’applications de \mathbb{H}^2*

$$\Phi := \{g_s : s \in \mathcal{S}\};$$

indexée par l’ensemble des bords des polygones de \mathcal{P} qui satisfait les conditions suivantes :

- (1) *pour tout $s \in \mathcal{S}$, $g_s \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$,*
- (2) *pour tout $s \in \mathcal{S}$, il existe $s' \in \mathcal{S}$ tel que $g_s(s') = s$,*
- (3) *pour tout $s \in \mathcal{S}$ et $s' \in \mathcal{S}$ (comme dans (2)), les isométries g_s et $g_{s'}$ satisfont $g_{s'} = g_s^{-1}$, et*
- (4) *si $s \in \mathcal{S}$ est un bord de $P \in \mathcal{P}$ et $s' \in \mathcal{S}$ (comme dans (2)) est un bord de $P' \in \mathcal{P}$ alors $P \cap g_s(P') = s$.*

Soit $\Phi := \{g_s : s \in \mathcal{S}\}$ un appariement de bords pour \mathcal{P} et considérons l’ensemble

$$S^* := \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P.$$

On va définir une relation d’équivalence dans S^* comme suit : on dit que deux points $x, x' \in S^*$ sont une paire pour Φ , notée $x \simeq x'$, s’il existe $s, s' \in \mathcal{S}$ tels que $x \in s$ et $x' \in s'$ et $g_s(x') = x$. On dit que deux points $x, y \in S^*$ sont appariés par Φ , noté $x \sim y$, si $x = y$ ou s’il existe une suite finie de points $x_1, \dots, x_n \in S^*$ tels que

$$x = x_1 \simeq x_2 \simeq \dots \simeq x_m = y.$$

Lemme 1.10. *La relation \sim est une relation d'équivalence sur S^* .*

Définition 1.11 (Cycles). *Les classes d'équivalence de la relation \sim sont appelées cycles de Φ .*

Soit $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$ un cycle fini de Φ , et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ soit $P_i \in \mathcal{P}$ le polygone qui contient x_i et soit $\theta(P_i, x_i)$ l'angle de x_i dans P_i , c'est-à-dire

$$\theta(P_i, x_i) = \begin{cases} \pi, & \text{si } x_i \text{ n'est pas un sommet;} \\ \text{"angle"}, & \text{si } x_i \text{ est un sommet.} \end{cases}$$

On définit l'angle du cycle $[x]$, par

$$\theta(x) := \sum_{i=1}^m \theta(P_i, x_i).$$

Définition 1.12 (Appariement propre). *Un appariement de bords pour \mathcal{P} , est dit propre si tout cycle de Φ est fini et a un angle égal à 2π .*

Définissons S l'ensemble $S = S^* / \sim$ avec la topologie quotient et soit $\pi : S^* \rightarrow S$ l'application quotient. Nous allons assumer le théorème suivant, (voir la section 9.2 de [Rat94] et la section 9.8 de [Bea83]).

Théorème 1.13. *Soit \mathcal{P} une collection de polygones convexes abstraits et dis-joints dans \mathbb{H}^2 et soit Φ un appariement de bords propre de \mathcal{P} . Alors S est une surface hyperbolique.*

1.2.1 Surfaces compactes de genre supérieur à 1

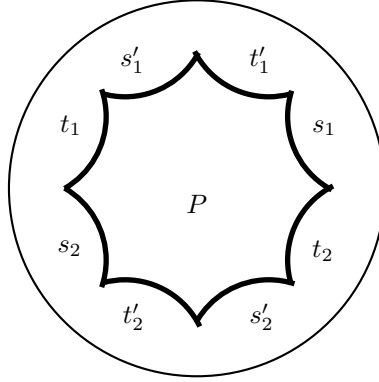
Le but de ce paragraphe est de donner une construction détaillée d'une structure hyperbolique sur une surface compacte de genre supérieur à 1. Soit n un nombre entier supérieur à 1. Alors on a,

$$\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{4n} + \frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{n} < \pi.$$

On sait qu'il existe un triangle avec angles $\frac{\pi}{2n}$, $\frac{\pi}{4n}$ et $\frac{\pi}{4n}$ (voir le théorème 3.5.9 [Rat94]). A partir de ce triangle on construit un $4n$ -gone régulier P tel que les angles des sommets sont $\frac{\pi}{2n}$. Posons P dans \mathbb{H}^2 (le disque de Poincaré) tel que son centre coïncide avec l'origine et notons $s_1, t'_1, s'_1, t_1, \dots, s_n, t'_n, s'_n, t_n$ les côtés (orientés) de P , (voir la figure 1.1 pour le cas $n = 2$). Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ soit σ_i (respectivement σ'_i) la réflexion par rapport à la droite qui passe par l'origine et au milieu du bord t'_i (respectivement s_i). Soient $\sigma_{s_1}, \sigma_{t'_1}, \sigma_{s'_1}, \sigma_{t_1}, \dots, \sigma_{s_n}, \sigma_{t'_n}, \sigma_{s'_n}, \sigma_{t_n}$ les "réflexions euclidiennes" par rapport aux côtés $s_1, t'_1, s'_1, t_1, \dots, s_n, t'_n, s'_n, t_n$ respectivement. Alors

$$\Phi = \{\sigma_{s_i} \sigma_i, \sigma_{s'_i} \sigma'_i, \sigma_{t_i} \sigma'_i, \sigma_{t'_i} \sigma_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$$

est un appariement de bords pour P et la surface obtenue en recollant les bords de P pour Φ , est la surface compacte de genre n .

FIGURE 1.1 – Exemple pour le cas $n = 2$.

1.2.2 La surface $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$

Le but de ce paragraphe est de donner une construction détaillée d'une structure hyperbolique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$, où \mathcal{O} est une partie discrète infinie de \mathbb{R}^2 . Autrement dit, d'après la proposition 1.14 il s'agit de construire un sous groupe discret de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, noté Γ_2 , tel que \mathbb{H}^2/Γ_2 soit homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$.

Voici la motivation : soit $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ un homéomorphisme qui satisfait les hypothèses du théorème de Handel, voir le théorème 0.1 et notons $\Lambda_f = \cup_{i=1}^r \cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x_i)$. Nous allons munir $\mathbb{D} \setminus \Lambda_f$ d'une structure hyperbolique. En effet, l'application $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x) = \frac{\|x\|}{1-\|x\|^2}x$ induit un homéomorphisme de $\mathbb{D} \setminus \Lambda_f$ vers $\mathbb{R}^2 \setminus \phi(\Lambda_f)$. Notons que l'ensemble $\mathcal{O} = \phi(\Lambda_f)$ est une partie discrète infinie de \mathbb{R}^2 . On va identifier \mathbb{Z} à $\mathbb{Z} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, via le plongement naturel $n \mapsto (n, 0)$.

Proposition 1.14. *Soit \mathcal{O} une partie discrète infinie de \mathbb{R}^2 . Alors $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Remarquons que \mathcal{O} est un ensemble infini dénombrable de \mathbb{R}^2 et donc fixons une bijection $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}$. Comme \mathcal{O} et \mathbb{Z} sont des ensembles discrets pour $i \in \mathbb{Z}$ nous pouvons choisir un chemin (linéaire par morceaux) $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui joint i et $\phi(i)$ tels que $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Pour $i \in \mathbb{Z}$ posons un nombre réel $\epsilon(i) > 0$ tel que

$$\epsilon(i) < \inf_{i \neq j} \text{dist}(\alpha_i, \alpha_j).$$

Pour $i \in \mathbb{Z}$ posons D_i le $\epsilon(i)$ -voisinage (fermé) de α_i , c'est-à-dire

$$D_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \alpha_i) \leq \epsilon(i)\}.$$

Quitte à diminuer $\epsilon(i)$, on peut supposer qu'il existe un homéomorphisme $\phi_i : D_i \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ et soit $h_i : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ un homéomorphisme envoyant $\phi_i(i)$ sur $\phi_i(\phi(i))$ et qui est l'identité sur \mathbb{S}^1 . Alors la fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} \phi_i^{-1}(h_i(\phi_i(x))), & \text{si } x \in D_i; \\ x, & \text{si } x \notin \cup_{i \in \mathbb{Z}} D_i. \end{cases}$$

est un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 envoyant \mathbb{Z} sur \mathcal{O} . ■

On va identifier \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} , via l'isomorphisme naturel $(x, y) \mapsto x + iy$. Pour $j \in \mathbb{Z}$, posons le cercle $C_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - (j + \frac{1}{2})| = \frac{1}{2}\}$ et notons H_j son extérieur, c'est-à-dire $H_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - (j + \frac{1}{2})| \geq \frac{1}{2}\}$. Soit X la surface topologique (à bord) définie par $X = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} H_j \cap \mathbb{H}^2$, où $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$. On va obtenir $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$ comme la "surface double" de la surface X , notée \hat{X} . Autrement dit d'abord on va considérer une "copie" de X , notée X' , c'est-à-dire X' sera une surface homéomorphe à X et disjointe de X , et puis on va obtenir \hat{X} , en recollant par des homéomorphismes "les mêmes bords" de X et X' . Finalement on va montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$ est homéomorphe à \hat{X} . Plus précisément, considérons $X' := \{\bar{z} \in \mathbb{C} : z \in X\}$, où \bar{z} est le nombre complexe conjugué de z . Pour $j \in \mathbb{Z}$ notons $\sigma_j : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ la "réflexion euclidienne" inversion par rapport au cercle C_j , c'est-à-dire

$$\sigma_j(z) = \frac{(2j+1)\bar{z} - 2j(j+1)}{2\bar{z} - (2j+1)}.$$

Pour $j \in \mathbb{Z}$, posons $e_j := C_j \cap X$ (un morceaux du bord de X) et $e'_j := C_j \cap X'$ "le même bord" de X' . La surface double de X , \hat{X} sera la surface obtenue en recollant e_j et e'_j pour l'homéomorphisme $f_i(z) = \sigma_j(\bar{z})$, voir la figure 1.2.

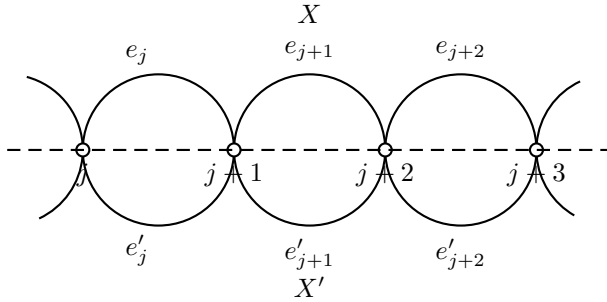


FIGURE 1.2 – La surface "double" de X .

Lemme 1.15. *La surface \hat{X} est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$.*

Démonstration. La fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z} \rightarrow X \cup X'$ définie par :

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \phi_1(x, y) = \left(x, y + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \left(j + \frac{1}{2}\right)\right)^2} \right), & \text{si } x \in [j, j+1] \text{ et } y \geq 0; \\ \phi_2(x, y) = \left(x, y - \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \left(j + \frac{1}{2}\right)\right)^2} \right), & \text{si } x \in [j, j+1] \text{ et } y \leq 0. \end{cases}$$

induit un homéomorphisme entre \hat{X} et $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$. En effet, notons que l'homéomorphisme est une fonction bien définie parce que $f_j \circ \phi_1 = \phi_2$ sur l'intervalle $(j, j+1)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. ■

De plus, considérons $\overline{\sigma}_0 : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ la fonction définie par $\overline{\sigma}_0(z) := \overline{\sigma_0(z)}$ et posons $P = X \cup \overline{\sigma}_0(X')$. Notons que P est un polygone convexe abstrait dans \mathbb{H}^2 , avec ensemble de bords $\mathcal{S} = \{e_j, \sigma_0(e_j) : j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Alors $\Phi := \{\sigma_0\sigma_j, \sigma_j\sigma_0 : j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ est un appariement de bords propre pour P , en recollant e_j et $\sigma_0(e_j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, voir la figure 1.3.

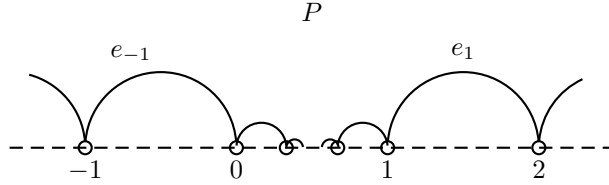


FIGURE 1.3 – Le polygone convexe abstrait P .

La proposition suivante montre que la surface hyperbolique S obtenue en recollant les bords de P par Φ , est homéomorphe à \hat{X} .

Proposition 1.16. *La surface hyperbolique S est homéomorphe à \hat{X} .*

Démonstration. L'application continue $\phi : X \cup X' \rightarrow P$ définie par

$$\phi(z) = \begin{cases} z, & \text{si } z \in X; \\ \overline{\sigma}_0(z), & \text{si } z \in X'. \end{cases}$$

induit un homéomorphisme entre la surface hyperbolique S et \hat{X} . ■

D'après les résultats précédents, on obtient une structure hyperbolique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$ (et donc sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$) en transportant la structure hyperbolique de S par l'homéomorphisme. De plus, on a choisi les homéomorphismes tels que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ l'intervalle $(j, j+1)$ soit une géodésique de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$. Enfin notons

$$\Gamma_2 := \langle \sigma_0\sigma_j : j \in \mathbb{Z} \rangle,$$

le groupe engendré par l'appariement de bords propre Φ de P . Pour conclure que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$ est homéomorphe à \mathbb{H}^2/Γ_2 nous aurons besoin du théorème de Poincaré, (voir la section 9.8 de [Bea83] et la section 11.2 de [Rat94]).

Théorème 1.17 (Théorème de Poincaré). *Soit Φ un appariement de bords propre pour un polygone abstrait P de \mathbb{H}^2 tel que la surface S obtenue en collant les bords de P par Φ soit complète. Alors le groupe engendré par Φ , noté Γ est un sous groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et agit librement dans \mathbb{H}^2 , P est un domaine fondamental pour Γ . De plus l'inclusion $i : P \rightarrow \mathbb{H}^2$ induit une isométrie de S sur \mathbb{H}^2/Γ .*

1.3 Groupes de première espèce

Le but de cette section est de prouver que le groupe fuchsien

$$\Gamma_2 := \langle \sigma_0 \sigma_j : j \in \mathbb{Z} \rangle,$$

défini à la section précédente est de première espèce, c'est-à-dire l'adhérence (dans $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$) de l'ensemble des points fixes des éléments hyperboliques dans Γ_2 est égale à tout le bord à l'infini de \mathbb{H}^2 .

Définition 1.18 (Groupe fuchsien). *Un groupe fuchsien est un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.*

Remarque 1. Tout groupe fuchsien est un ensemble dénombrable de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Définition 1.19 (Ensemble limite). *Soit Γ un groupe fuchsien et notons Λ_0 l'ensemble des points fixes des éléments hyperboliques dans Γ . L'ensemble limite de Γ , noté $\Lambda(\Gamma)$ est défini par l'adhérence (dans $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$) de Λ_0 .*

Définition 1.20 (Groupe élémentaire). *Un groupe fuchsien Γ est dit élémentaire s'il existe une Γ -orbite finie dans $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$, autrement dit s'il existe $x \in \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$ tel que l'ensemble $\{gx : g \in \Gamma\}$ est fini.*

Si Γ est un groupe fuchsien non élémentaire, alors l'ensemble limite de Γ est toujours non vide. En effet, supposons que Γ est vide, autrement dit Γ ne contient pas d'éléments hyperboliques. Si tout élément est elliptique alors Γ est élémentaire (voir le théorème 2.4.1 [Kat92]), une contradiction. Donc Γ contient un élément parabolique g (à conjugaison près) on peut supposer que $g(z) = z+1$. Soit $h \in \Gamma$, donc

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$g^n(h(z)) = \frac{(a + nc)z + (b + nd)}{cz + d},$$

et

$$\mathrm{tr}^2(g^n h) = (a + d + nc)^2.$$

Si nous supposons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'élément $g^n h$ n'est pas hyperbolique, on a

$$0 \leq (a + d + nc)^2 \leq 4,$$

(voir le théorème 4.3.4 [Bea83]), et donc $c = 0$. Alors tout $h \in \Gamma$ fixe l'infini et donc Γ est élémentaire, une contradiction.

Définition 1.21 (Partie Γ -invariante). Soit Γ un groupe fuchsien. Une partie X de $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$ est dite Γ -invariante, si $g(X) = X$ pour tout g dans Γ .

On peut montrer que pour un groupe fuchsien non élémentaire Γ , son ensemble limite, Λ est une partie fermée non vide, Γ -invariante. De plus, l'ensemble limite est la plus petite partie que satisfait cette propriété.

Théorème 1.22. Soit Γ un groupe fuchsien non élémentaire. Alors l'ensemble limite de Γ est la plus petite partie fermée non vide, Γ -invariante de $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$.

Démonstration. D'abord Λ est toujours non vide (remarque précédente) et est une partie fermée par définition. De plus, comme Λ_0 est Γ -invariant, Λ est Γ -invariant. Soit E une partie non vide, fermée et Γ -invariante de $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$. Comme Γ n'est pas élémentaire toute orbite est infinie et donc E est infini. Si $x \in \Lambda_0$, alors il existe un élément hyperbolique g de Γ qui fixe x . Soit $y \in E$ qui n'est pas fixe par g donc l'ensemble $\{g^n(y) : n \in \mathbb{Z}\}$ s'accumule sur x . Comme E est fermé, on a $x \in E$, (voir le théorème 4.3.10 [Bea83]). Ce qui prouve que $\Lambda_0 \subset E$ et donc $\Lambda \subset E$. ■

Pour chaque $z \in \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$, définissons $\Lambda(z)$ comme l'ensemble de tous les $w \in \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$ qui satisfont la propriété suivante : il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments distincts dans Γ tels que la suite $(g_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers w , quand n tend vers $+\infty$.

Théorème 1.23. Soit Γ un groupe fuchsien non élémentaire. Alors pour tout $z \in \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$, on a $\Lambda = \Lambda(z)$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$, comme $\Lambda(z)$ est une partie fermée, non-vide et Γ -invariante d'après le théorème 1.22, donc Λ est contenu dans $\Lambda(z)$. Supposons maintenant que $z \in \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$ et soit $w \in \Lambda(z)$, on va prouver que $w \in \Lambda$. Sinon, $w \notin \Lambda$ et donc il existe un disque U (dans $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$) avec centre w et tel que $\overline{U} \subset \Lambda^c$. On va supposer que 0 et "l'infini" n'appartiennent pas à $g(U)$ pour tout $g \in \Gamma$ et posons $K = \overline{U} \cup \{z\}$. Pour tout élément $g \in \Gamma$ et tout $z' \in U$, il existe une constante positive m telle que

$$\rho(gz, gz') \leq \frac{m}{\|g\|^2} \rho(z, z'),$$

(voir le théorème 4.5.5 [Bea83]). Comme $w \in \Lambda(z)$ il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments distincts de Γ tels que $g_n(z) \rightarrow w$ quand $n \rightarrow +\infty$. Comme $\|g_n\|^2 \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, on a $g_n \rightarrow w$ uniformément sur \overline{U} . Ceci implique que pour n assez grand $g_n(\overline{U}) \subset U$ et puis $U \cap \Lambda \neq \emptyset$, (voir le lemme 5.3.5 [Bea83]). Ceci est une contradiction avec $U \subset \Lambda^c$. ■

Définition 1.24 (Groupe de première espèce). Un groupe fuchsien est dit de première espèce si l'ensemble limite est tout le cercle à l'infini de \mathbb{H}^2 .

Théorème 1.25. Soit Γ un groupe de fuchsien dont un domaine fondamental a une aire hyperbolique finie. Alors Γ est de première espèce.

Démonstration. Soit D un domaine fondamental de Dirichlet pour Γ . Comme par hypothèse D a une aire hyperbolique finie, donc D est localement fini (voir le théorème 3.5.1 [Kat92]). Pour la preuve nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.26. *Soit $\Gamma = \{Id, g_1, g_2, \dots\}$ un groupe fuchsien qui agit sur \mathbb{H}^2 et D un domaine fondamental localement fini de Γ . Alors la suite de diamètres euclidiens $(\text{diam}(g_n(D)))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Sinon, il existe une sous-suite $n_k \rightarrow +\infty$ quand $k \rightarrow +\infty$ et des points $z_k, w_k \in g_{n_k}(D)$ tels que $z_k \rightarrow z$ et $w_k \rightarrow w$ quand $k \rightarrow +\infty$ avec $z \neq w$. Si nous supposons que $z \in \mathbb{H}^2$ ou $w \in \mathbb{H}^2$, obtenons une contradiction parce que D est localement fini, et donc $z, w \in \mathbb{S}_\infty$. Alors la suite $(g_{n_k}(D))_{k \in \mathbb{N}}$ s'accumule sur la géodésique avec extrémités z et w , une contradiction parce que D est localement fini. ■

Continuation de la démonstration du théorème 1.25. Soient $z \in \mathbb{S}_\infty$ et un nombre réel $\epsilon > 0$, considérons $U(z, \epsilon)$ un voisinage de z dans \mathbb{H}^2 , notons que l'aire hyperbolique de $U(z, \epsilon)$ est infinie. Donc d'après le lemme 1.26 comme D est un domaine fondamental d'aire hyperbolique finie, il existe $g_1 \in \Gamma$ tel que $g_1(D) \subset U(z, \epsilon)$. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans Γ telle que pour tout $w \in D$ on a $g_n(w) \rightarrow z$. Ceci prouve que $z \in \Lambda$, d'après le théorème 1.23 et comme $z \in \mathbb{S}_\infty$ est arbitraire nous concluons que $\Lambda = \mathbb{S}_\infty$. ■

■

Nous utiliserons les résultats précédents pour prouver que le groupe fuchsien

$$\Gamma_2 := \langle \sigma_0 \sigma_j : j \in \mathbb{Z} \rangle,$$

(voir la section précédente pour la définition) est de première espèce. L'idée de la preuve est de voir Γ_2 comme un sous-groupe distingué d'un groupe fuchsien de première espèce Γ'_2 . Soit $h \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ l'application définie par $h(z) = z + 1$ et considérons le groupe

$$\Gamma'_2 := \langle \Gamma_2, h \rangle.$$

Lemme 1.27. *Le groupe Γ_2 est un sous-groupe distingué de Γ'_2 .*

Démonstration. Notons que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a $h \sigma_j h^{-1} = \sigma_{j+1}$ et donc

$$\begin{aligned} h \sigma_0 \sigma_j h^{-1} &= h \sigma_0 h^{-1} h \sigma_j h^{-1}; \\ &= \sigma_1 \sigma_{j+1} \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

Ceci prouve que Γ_2 est un sous-groupe distingué de Γ'_2 . ■

Proposition 1.28. *Le groupe Γ'_2 est de première espèce.*

Démonstration. Notons que l'application $h : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ induit une application $[h] : \mathbb{H}^2/\Gamma_2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma_2$ qui agit sur \mathbb{H}^2/Γ_2 . D'après les résultats obtenus à la section précédente il existe un homéomorphisme $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma_2$ et donc $[h]$ induit une application $T : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$ définie par $T := \phi^{-1} \circ [h] \circ \phi$. Observons que pour un choix particulier d'homéomorphisme ϕ on a $T(x) = x+1$ et donc nous obtenons une chaîne d'homéomorphismes

$$\mathbb{H}^2/\Gamma'_2 \simeq (\mathbb{H}^2/\Gamma_2) / \langle [h] \rangle \simeq (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}) / \langle T \rangle \simeq \mathbb{S}^2 \setminus \{2 \text{ points}\}.$$

D'après le théorème 1.25 la conclusion de la proposition suit en trouvant un domaine fondamental de $\mathbb{S}^2 \setminus \{2 \text{ points}\}$ avec un aire hyperbolique finie. En effet, considérons D comme dans la figure suivante.

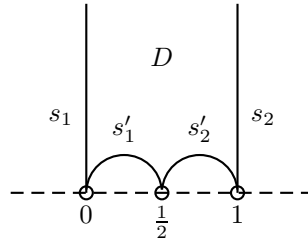


FIGURE 1.4 – Domaine fondamental pour Γ'_2 .

où s_1 et s_2 sont des “droites” géodésiques avec partie réelle égale 0 et 1 respectivement et s'_1 et s'_2 sont des “circles” géodésiques de centre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ respectivement et rayon $\frac{1}{4}$. Notons que D est un polygone convexe abstrait de \mathbb{H}^2 et on obtient $\mathbb{S}^2 \setminus \{2 \text{ points}\}$ en recollant les bords s_i et s'_i pour $i = 1, 2$. De plus, l'aire hyperbolique de D est égale à 2π , (voir le théorème 7.13.1 [Bea83]). ■

Théorème 1.29. *Le groupe Γ_2 est de première espèce.*

Démonstration. D'après le lemme 1.27 et la proposition 1.28 la conclusion suit du lemme suivant :

Lemme 1.30. *Soit Γ' un groupe fuchsien non élémentaire et soit Γ un sous-groupe distingué de Γ' . Alors $\Lambda(\Gamma) = \Lambda(\Gamma')$.*

Démonstration. Comme $\Gamma \subset \Gamma'$, on a $\Lambda(\Gamma) \subset \Lambda(\Gamma')$. Pour prouver l'inclusion $\Lambda(\Gamma') \subset \Lambda(\Gamma)$, d'après le théorème 1.22 il suffit de prouver que $\Lambda(\Gamma)$ est Γ' -invariant. D'après le théorème 1.23 il suffit de prouver pour tout $z \in \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$ et $h \in \Gamma'$ que $h(\Lambda(z)) = \Lambda(h(z))$. Soit $z \in \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$ et $x \in h(\Lambda(z))$, comme $w = h^{-1}(x) \in \Lambda(z)$ d'après le théorème 1.23, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments distincts de Γ tels que $g_n(z) \rightarrow w$ quand $n \rightarrow +\infty$. Donc $hg_n h^{-1}(h(z)) \rightarrow h(w) = x$ quand $n \rightarrow +\infty$ et $(hg_n h^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments distincts de Γ . Ceci prouve que $h(\Lambda(z)) \subset \Lambda(h(z))$. L'inclusion inverse s'obtient de l'inclusion précédente en remplaçant h par h^{-1} et z par $h(z)$. ■

Chapitre 2

Propriétés des géodésiques sur une surface compacte

Le but de ce chapitre est de prouver pour une surface hyperbolique compacte sans bord S les propriétés suivantes :

- (1) toute courbe fermée essentielle c dans S est librement homotope à une unique géodésique fermée γ ,
- (2) si c est simple, alors γ est simple,
- (3) si C est une sous-variété essentielle de dimension 1 dans S , c'est-à-dire une collection finie de courbes fermées simples essentielles 2 à 2 disjointes et non homotopes, alors il existe un homéomorphisme $h : S \rightarrow S$ isotope à l'identité tel que $h(c)$ est une géodésique pour toute courbe c dans C , et
- (4) soient C_1 et C_2 deux sous-variétés essentielles de dimension 1 dans S telles qu'aucun élément de C_1 est isotope à un élément de C_2 . Si on suppose que C_1 et C_2 ont intersection minimale, alors il existe un homéomorphisme $h : S \rightarrow S$ isotope à l'identité tel que pour tous éléments c_1 et c_2 de C_1 et C_2 respectivement, $h(c_1)$ et $h(c_2)$ sont géodésiques.

On fixe quelques notations, on considère une surface hyperbolique compacte S sans bord et d'après le théorème d'uniformisation de Poincaré $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$, où Γ est un groupe fuchsien. On notera $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow S$ et $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1$ les projections naturelles. Quelques références pour ce chapitre sont [Beg07] et [Cas88].

2.1 Propriétés des géodésiques sur une surface compacte

Le but de cette section est de prouver que toute courbe fermée simple essentielle est librement homotope à une unique géodésique fermée simple.

Définition 2.1 (Courbe essentielle). *Une courbe (respectivement géodésique) fermée $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ est dite courbe (respectivement géodésique) fermée simple essentielle si α est une application injective et non homotope à zéro.*

Lemme 2.2. *Soit $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une courbe fermée essentielle. Pour tout relevé $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ de c les limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{c}(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{c}(t)$ existent dans \mathbb{S}_∞ , sont distinctes et valent g^\pm , où $g \in \Gamma$ satisfait $g\tilde{c}(0) = \tilde{c}(1)$.*

Démonstration. Comme les points $\tilde{c}(0)$ et $\tilde{c}(1)$ sont des relevés d'un même point de S , il existe un élément $g \in \Gamma$ tel que $\tilde{c}(1) = g\tilde{c}(0)$. Nous remarquons que comme la courbe c n'est pas homotope à zéro g n'est pas l'identité. La courbe $\tilde{c}' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ définie pour $t \in [0, 1)$ et $n \in \mathbb{Z}$ comme $\tilde{c}'(t+n) = g^n \tilde{c}(t)$ est un relevé de \tilde{c} qui satisfait $\tilde{c}'(0) = \tilde{c}(0)$, donc par unicité du relevé on a $\tilde{c}' = \tilde{c}$, c'est-à-dire pour tout $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a $\tilde{c}(t+n) = g^n \tilde{c}(t)$. Comme $g \in \Gamma$ est un élément hyperbolique, il a deux points fixes distincts, notons-les g^- et g^+ dans \mathbb{S}_∞ tels que pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{H}^2$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n \tilde{x} = g^+$ et $\lim_{n \rightarrow -\infty} g^n \tilde{x} = g^-$ (voir le théorème 4.3.10 [Bea83]). Prouvons que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{c}(t) = g^+$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{c}(t) = g^-$. En effet, il existe un nombre réel $R > 0$ tel que $\tilde{c}([0, 1])$ est contenu dans la boule hyperbolique de centre $\tilde{c}(0)$ et rayon R , notée $B(\tilde{c}(0), R)$. Donc pour $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{c}([n, n+1]) &= g^n(\tilde{c}([0, 1])); \\ &\subset g^n(B(\tilde{c}(0), R)); \\ &= B(\tilde{c}(n), R), \text{ puisque } g^n \tilde{c}(0) = \tilde{c}(n). \end{aligned}$$

Donc le rayon euclidien de la boule hyperbolique $B(\tilde{c}(n), R)$ tend vers 0 lorsque le centre de cette boule $\tilde{c}(n)$ tend vers g^+ ou g^- dans \mathbb{S}_∞ . ■

Définition 2.3 (Extrémités). *Soit $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une courbe fermée essentielle et soit \tilde{c} un relevé de c . On appellera extrémités de \tilde{c} les limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{c}(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{c}(t)$.*

Théorème 2.4. *Toute courbe fermée essentielle $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ dans S est librement homotope à une unique géodésique fermée.*

Démonstration. Existence : Soit $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ un relevé de c . D'après le lemme 2.2 il existe $g \in \Gamma$ tel que les extrémités de \tilde{c} sont les points fixes de g , notons-les g^+ et g^- . Considérons la géodésique $\tilde{\gamma}$ de \mathbb{H}^2 avec extrémités g^+ et g^- . On va montrer que la géodésique fermée $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ est homotope à c . Soit $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ un chemin quelconque qui joint $\tilde{c}(0)$ à $\tilde{\gamma}(0)$. Alors $g\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ est un chemin qui joint $g\tilde{c}(0) = \tilde{c}(1)$ à $\tilde{\gamma}(1)$. On considère le lacet obtenu en concaténant le chemin $\tilde{\alpha}$, le chemin $\tilde{\gamma}|_{[0,1]}$, le chemin $g\tilde{\alpha}^{-1}$ et le chemin $\tilde{c}^{-1}|_{[0,1]}$. Comme ce lacet est contractile dans \mathbb{H}^2 , on peut trouver une application continue $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ telle que :

$$\tilde{H}(t, 0) = \tilde{c}(t); \quad \tilde{H}(t, 1) = \tilde{\gamma}(t); \quad \tilde{H}(0, s) = \tilde{\alpha}(s) \quad \text{et} \quad \tilde{H}(1, s) = g\tilde{\alpha}(s).$$

Comme les chemins $\tilde{\alpha}$ et $g\tilde{\alpha}$ ont la même projection dans S , la projection $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow S$ de \tilde{H} est une homotopie libre entre la courbe c et la géodésique fermée γ . Pour montrer l'unicité nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.5. Soient $c_1, c_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ deux courbes fermées essentielles, homotopes l'une à l'autre et soit $\tilde{c}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ un relevé de la courbe c_1 . Alors il existe un relevé $\tilde{c}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ de la courbe c_2 qui reste à distance (hyperbolique) bornée de c_1 , c'est-à-dire il existe un nombre réel $R > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\rho(\tilde{c}_1(t), \tilde{c}_2(t)) < R.$$

En particulier, \tilde{c}_2 a les mêmes extrémités que \tilde{c}_1 .

Démonstration. Notons $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow S$ l'homotopie entre c_1 et c_2 . Donc on peut relever H en une homotopie $\tilde{H} : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\tilde{H}(t, 0) = \tilde{c}_1(t)$. Alors pour $t \in \mathbb{R}$ on définit $\tilde{c}_2(t) = \tilde{H}(t, 1)$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ le chemin $\tilde{H}(\{t\} \times [0, 1])$ est un relevé du chemin $H(\{p(t)\} \times [0, 1])$. Puisque \mathbb{S}^1 est compact, il existe un nombre réel $R > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\rho(\tilde{c}_1(t), \tilde{c}_2(t)) < R$. D'après le lemme 2.2, nous savons que $\tilde{c}_1(t)$ et $\tilde{c}_2(t)$ tend vers \mathbb{S}_∞ quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, donc la distance euclidienne entre $\tilde{c}_1(t)$ et $\tilde{c}_2(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Par conséquent \tilde{c}_2 a les mêmes extrémités que \tilde{c}_1 . ■

Suite de la démonstration du théorème 2.4. Unicité : Supposons qu'il existe une deuxième géodésique fermée γ' de S homotope à c . Alors les géodésiques γ et γ' sont homotopes. D'après le lemme 2.5, il existe deux relevés $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$ de γ et γ' respectivement, qui ont les mêmes extrémités. Alors $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$ et donc $\gamma = \gamma'$. ■

Définition 2.6 (Relevés équivalents). Soit $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une courbe (ou géodésique) simple essentielle dans S . On dira que deux relevés $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ de α sont équivalents s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que tout $t \in \mathbb{R}$ satisfait $\tilde{\alpha}_2(t) = \tilde{\alpha}_1(t + n)$.

Lemme 2.7. Soit $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une courbe fermée simple essentielle dans S . Si deux relevés de c s'intersectent, alors ils sont équivalents.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux relevés $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ de c qui s'intersectent. Donc il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\tilde{c}_1(t_1) = \tilde{c}_2(t_2)$. On a alors $c(p(t_1)) = c(p(t_2))$. Comme c est une courbe simple, on a $p(t_1) = p(t_2)$ et donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $t_1 - t_2 = n$. Posons $\tilde{c}_2' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ la courbe définie par $\tilde{c}_2'(t) = \tilde{c}_1(t + (t_1 - t_2))$. Alors \tilde{c}_2' et \tilde{c}_2 sont deux relevés de c , qui coïncident en $t = t_2$. Par unicité, on a donc $\tilde{c}_2' = \tilde{c}_2$ et par conséquent, les relevés \tilde{c}_1 et \tilde{c}_2 sont équivalents. ■

Lemme 2.8. Soit $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une géodésique fermée dans S . Si γ n'est pas simple, alors il existe deux relevés non-équivalents qui s'intersectent.

Démonstration. Comme γ n'est pas simple, il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $p(t_1) \neq p(t_2)$ et $\gamma(p(t_1)) = \gamma(p(t_2))$. Soit $\tilde{\gamma}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ un relevé de γ , alors $\pi(\tilde{\gamma}_1(t_1)) = \gamma(p(t_1))$. Donc il existe $\tilde{\gamma}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ relevé de γ tel que $\tilde{\gamma}_1(t_1) = \tilde{\gamma}_2(t_2)$. Les relevés $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ ne sont pas équivalents car $\tilde{\gamma}_1$ est une géodésique donc simple,

et $p(t_1) \neq p(t_2)$ donc $t_1 - t_2 \notin \mathbb{Z}$. Par conséquent $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont deux relevés non-équivalents de γ qui s'intersectent. ■

Théorème 2.9. *Soit $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une courbe fermée simple essentielle dans S . Alors l'unique géodésique fermée $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ qui est librement homotope à la courbe c est simple.*

Démonstration. Supposons que la géodésique γ n'est pas simple. D'après le lemme 2.8, il existe deux relevés de γ non-équivalents $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ qui s'intersectent. Comme $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont géodésiques, les extrémités de $\tilde{\gamma}_1$ séparent les extrémités de $\tilde{\gamma}_2$ sur \mathbb{S}_∞ , c'est-à-dire les extrémités de $\tilde{\gamma}_2$ appartiennent à différentes composantes connexes (dans \mathbb{S}_∞) du complémentaire des extrémités de $\tilde{\gamma}_1$. D'après le lemme 2.5, il existe deux relevés $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ de c qui ont les mêmes extrémités que $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ respectivement. Par conséquent les extrémités de \tilde{c}_1 séparent les extrémités de \tilde{c}_2 sur \mathbb{S}_∞ . Donc \tilde{c}_1 et \tilde{c}_2 sont deux relevés non-équivalents de c qui s'intersectent. D'après le lemme 2.7, la courbe c n'est pas simple, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, la géodésique γ est simple. ■

2.2 Propriétés des collections de géodésiques sur une surface compacte

Le but de cette section est de prouver que toute sous-variété essentielle de dimension 1 dans S est isotope à une unique sous-variété géodésique de dimension 1. Plus généralement, si C_1 et C_2 sont deux sous-variétés essentielles de dimension 1, telles qu'aucun élément de C_1 est isotope à un élément de C_2 . Si on suppose que C_1 et C_2 ont intersection minimale, alors tous les éléments de C_1 et C_2 sont simultanément isotopes à des géodésiques.

Théorème 2.10. *Soit $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une courbe fermée simple essentielle. Alors il existe un plongement topologique $\phi : \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] \rightarrow S$ telle que $\phi(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) = c$.*

Démonstration. Soit $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ un relevé de c et $g \in \Gamma$ l'élément hyperbolique avec les mêmes extrémités que \tilde{c} . Notons G le sous-groupe de Γ engendré par g et posons $\pi_1 : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/G$ la projection naturelle. Notons que $\pi_1(\tilde{c})$ est une courbe simple dans \mathbb{H}^2/G (homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$) qui est homotope à $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$. D'après le théorème de Schoenflies "dans l'anneau", il existe un homéomorphisme $\phi_1 : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, envoyant $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ sur $\pi_1(\tilde{c})$. Pour un nombre réel $\epsilon > 0$ (assez petit) notons $A_\epsilon := \phi_1(\mathbb{S}^1 \times [-\epsilon, \epsilon])$. Nous concluons la preuve de ce théorème avec le lemme suivant.

Lemme 2.11. *Il existe $\epsilon > 0$ tel que l'application $\pi_2 : \mathbb{H}^2/G \rightarrow S$ est injective en restriction à A_ϵ .*

Démonstration. Soit $h \in \Gamma \setminus G$. Comme c est une courbe simple dans S , d'après le lemme 2.7, on a $h(\tilde{c}) \cap \tilde{c} = \emptyset$ et comme Γ est une collection localement finie

2.2. PROPRIÉTÉS DES COLLECTIONS DE GÉODÉSIIQUES SUR UNE SURFACE COMPACTE 17

la collection $\{h(\tilde{c}) : h \in \Gamma \setminus G\}$ ne s'accumule pas dans \tilde{c} . Une autre façon de dire, il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ tel que

$$\epsilon < \inf_{h \in \Gamma \setminus G} \text{dist}(\tilde{c}, h(\tilde{c})). \quad (2.1)$$

En effet, pour chaque $t \in \mathbb{R}$ comme la collection $\{h(\tilde{c}) : h \in \Gamma \setminus G\}$ est localement finie il existe un nombre réel $\epsilon(t) > 0$ tel que

$$\epsilon(t) < \inf_{h \in \Gamma \setminus G} \text{dist}(\tilde{c}(t), h(\tilde{c})).$$

Puisque \mathbb{S}^1 est compact, il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ que satisfait (2.1). ■

Lemme 2.12. *Soit $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une courbe fermée simple homotope à zéro. Alors il existe un plongement topologique $\phi : \overline{B}(0, 2) \rightarrow S$ telle que $\phi(\mathbb{S}^1) = \alpha$, où \mathbb{S}^1 est identifié à $\partial B(0, 1)$.*

Démonstration. Soit $\tilde{\alpha} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{H}^2$ un relevé de α , notons que $\tilde{\alpha}$ est une courbe fermée simple homotope à \mathbb{S}^1 (dans \mathbb{R}^2). D'après le théorème de Schoenflies "dans \mathbb{R}^2 ", il existe un homéomorphisme $\phi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, envoyant \mathbb{S}^1 sur $\tilde{\alpha}$. Posons \tilde{D} le disque topologique (fermé) délimité par $\tilde{\alpha}$. Il faut trouver un voisinage U de \tilde{D} tel que π soit injective en restriction à U . En effet, comme la courbe α est simple, on a $h\tilde{\alpha} \cap \tilde{\alpha} = \emptyset$ pour tout $h \in \Gamma \setminus \{Id\}$. Donc $h\tilde{D} \cap \tilde{D} = \emptyset$ pour tout $h \in \Gamma \setminus \{Id\}$, sinon on aurait $h\tilde{D} \subset \tilde{D}$ ou $h^{-1}\tilde{D} \subset \tilde{D}$ et d'après le théorème du point fixe de Brouwer h aurait un point fixe dans \tilde{D} , ceci est une contradiction parce que h est hyperbolique. Donc π est injective en restriction à \tilde{D} . Ensuite la collection $\{h\tilde{D} : h \in \Gamma\}$ est localement finie et comme la preuve du lemme précédent, il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ tel que

$$\epsilon < \inf_{h \in \Gamma \setminus \{Id\}} \text{dist}(\tilde{D}, h\tilde{D}).$$

Définition 2.13 (Sous-variété de dimension 1). *On appellera sous-variété essentielle de dimension 1 une collection finie de courbes simples fermées essentielles, 2 à 2 disjointes et non homotopes.*

Définition 2.14 (Intersection minimale). *Soient $c_1, c_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ deux courbes fermées essentielles dans S .*

1. *On dira que c_1 et c_2 s'intersectent transversalement si pour tout point $x \in c_1 \cap c_2$ il existe un voisinage U de x et un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $\varphi(x) = 0$; envoyant $U \cap c_1$ sur $\varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ et envoyant $U \cap c_2$ sur $\varphi(U) \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$.*
2. *On dira que c_1 et c_2 ont intersection minimale si elles s'intersectent transversalement et toute composante connexe de $S \setminus (c_1 \cup c_2)$, dont la frontière est l'union de deux arcs $I_1 \subset c_1$ et $I_2 \subset c_2$, n'est pas un disque topologique.*

3. On dira que deux sous-variétés essentielles de dimension 1 C_1, C_2 ont intersection minimale si toute paire $c_1 \in C_1$ et $c_2 \in C_2$ ont intersection minimale.

Lemme 2.15. 1. Si γ_1, γ_2 sont deux géodésiques fermées essentielles dans S , alors elles ont intersection minimale.

2. Si c_1 et c_2 sont deux courbes fermées simples essentielles qui ont intersection minimale et $h : S \rightarrow S$ est un homéomorphisme de S , alors $h(c_1)$ et $h(c_2)$ ont intersection minimale.

Démonstration. Nous fixons un relevé $\tilde{\gamma}_1$ de γ_1 et soit $\tilde{\gamma}_2$ un relevé de γ_2 . Comme $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont géodésiques dans \mathbb{H}^2 , elles s'intersectent au plus une fois. Donc γ_1 et γ_2 ont intersection minimale. La preuve de 2 est évidente. ■

Définition 2.16 (Homéomorphisme isotope à l'identité). Soit $h : S \rightarrow S$ un homéomorphisme.

1. On appellera *support de h* , noté $\text{Supp}(h)$, l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels l'homéomorphisme h n'est pas l'identité, c'est-à-dire

$$\text{Supp}(h) := \overline{\{x \in S : h(x) \neq x\}}.$$

2. On dira que h est isotope à l'identité s'il existe une homotopie $H : S \times [0, 1] \rightarrow S$ entre l'identité de S et h telle que pour tout $s \in [0, 1]$ la fonction $H(\cdot, s) : S \rightarrow S$ est un homéomorphisme de S .
3. On dira que h est isotope à l'identité à support dans N si h est isotope à l'identité et pour tout $s \in [0, 1]$ le support de l'homéomorphisme $H(\cdot, s) : S \rightarrow S$ est contenu dans N .

Proposition 2.17. Soit $h_i : S \rightarrow S$ une collection finie d'homéomorphismes isotopes à l'identité à support dans N_i . Supposons que la collection $(N_i)_{i=1}^n$ est disjointe 2 à 2. Alors la fonction $h : S \rightarrow S$ définie par :

$$h(x) = \begin{cases} h_i(x), & \text{si } x \in N_i; \\ x, & \text{si } x \notin \cup_{i=1}^n N_i. \end{cases}$$

est un homéomorphisme isotope à l'identité.

Démonstration. Nous remarquons que pour les hypothèses de la proposition il suffit montrer que h est une fonction continue. En effet soit F une partie fermée de S , alors l'ensemble

$$h^{-1}(F) = \bigcup_{i=1}^n h_i^{-1}(F) \cup F$$

est l'union finie de parties fermées de S . Donc $h^{-1}(F)$ est une partie fermée de S . ■

Définition 2.18 (Isotopies entre sous-variétés). Soit $C = (c_i)_{i=1}^n$ une sous-variété essentielle de dimension 1 dans S . On dira que C est **isotope** à une sous-variété essentielle de dimension 1 $C' = (c'_i)_{i=1}^n$ s'il existe un homéomorphisme $h : S \rightarrow S$ isotope à l'identité tel que pour tout $i = 1, \dots, n$ satisfait $h(c_i) = c'_i$.

Lemme 2.19. Soient C_1, C_2 deux sous-variétés essentielles de dimension 1 dans S . Alors C_2 est isotope à une sous-variété essentielle de dimension 1 ayant intersection minimale avec C_1 .

Démonstration. Quitte à faire une petite isotopie à C_2 , on peut se ramener au cas où toute paire $c_1 \in C_1$ et $c_2 \in C_2$ s'intersectent transversalement et donc c_1 et c_2 ont un nombre fini de points d'intersection. L'idée de la démonstration est "pousser C_2 à travers un disque". On va procéder par récurrence. Supposons qu'il existe $c_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ dans C_1 et $c_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ dans C_2 qui n'ont pas intersection minimale. Alors il existe des nombres réels $a_1, b_1, a_2, b_2 \in [0, 1]$ avec $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$, tels que pour $i = 1, 2$ les arcs $I_i : [a_i, b_i] \rightarrow S$ définis par $c_i|_{[a_i, b_i]} := I_i \subset c_i$ satisfont $c_1(a_1) = c_2(a_2)$, $c_1(b_1) = c_2(b_2)$ et le domaine délimité par I_1 et I_2 , noté D est un disque topologique dans S . Posons

$$\alpha_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right\} \cap \overline{B(0, 2)};$$

$$\alpha_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right\} \cap \overline{B(0, 2)};$$

et

$$J_1 := \{(x, y) \in \alpha_1 : y \geq 0\} \text{ et } J_2 := \{(x, y) \in \alpha_2 : y \leq 0\}.$$

D'après le lemme 2.12 et comme c_1 et c_2 s'intersectent transversalement (à homéomorphisme près) il existe un plongement $\phi_1 : \overline{B(0, 2)} \rightarrow S$ tel que :

$$\phi_1(\alpha_1) \subset c_1 ; \phi_1(\alpha_2) \subset c_2 ; \phi_1(J_1) = I_1 \text{ et } \phi_1(J_2) = I_2.$$

Posons x_0 le nombre réel positif (inférieur à 2) tel que $(x_0, y_0) \in \alpha_2 \cap \partial B(0, \frac{3}{2})$, voir la figure 2.1.

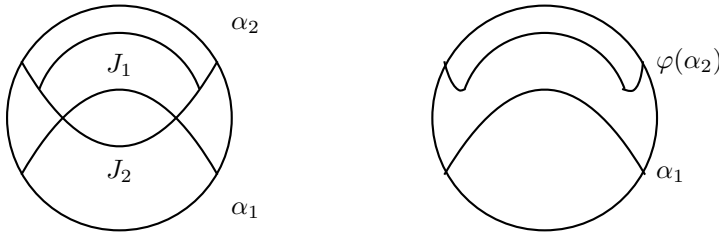


FIGURE 2.1 – "Pousser c_2 à travers un disque".

Pour $x \in [-2, 2]$ nous définissons l'homéomorphisme

$$\varphi_x : [-\sqrt{4-x^2}, \sqrt{4-x^2}] \rightarrow [-\sqrt{4-x^2}, \sqrt{4-x^2}]$$

par : l'application linéaire par morceaux qui satisfait

$$\varphi_x(-\sqrt{4-x^2}) = -\sqrt{4-x^2}; \quad \varphi_x(\sqrt{4-x^2}) = \sqrt{4-x^2}$$

et

$$\begin{cases} \varphi_x(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}, & \text{si } x \in [-x_0, x_0]; \\ \varphi_x(0) = 0 & \text{si } x \in [-2, -x_0] \cup (x_0, 2]. \end{cases}$$

Soit $\varphi : \overline{B(0, 2)} \rightarrow \overline{B(0, 2)}$ l'homéomorphisme défini par $\varphi(x, y) = (x, \varphi_x(y))$ et on définit $h_1 : S \rightarrow S$ l'homéomorphisme isotope à l'identité par :

$$h_1(z) = \begin{cases} z, & \text{si } z \notin \phi_1(\overline{B(0, 2)}); \\ \phi_1(\varphi(\phi_1^{-1}(z))), & \text{si } z \in \phi_1(\overline{B(0, 2)}). \end{cases}$$

Comme c_1 et c_2 s'intersectent transversalement cette procédure diminue de deux le nombre de points d'intersection de c_1 et c_2 . Comme c_1 et c_2 ont un nombre fini de point d'intersection d'après la proposition 2.17 par récurrence on obtient une courbe c'_2 qui est isotope à c_2 et a intersection minimale avec c_1 . ■

Théorème 2.20. *Soit C une sous-variété essentielle de dimension 1 dans S . Alors C est isotope à une unique sous-variété géodésique de dimension 1.*

Démonstration. Nous allons démontrer ce théorème en 4 étapes : Supposons $C = \{c_i : i = 1, \dots, n\}$.

Étape 1 : existence d'une sous-variété géodésique G de dimension 1. D'après le théorème 2.4 et le théorème 2.9 tout élément c_i dans C est librement homotope à une unique géodésique fermée simple γ_i . Notons G la collection $\{\gamma_i : i = 1, \dots, n\}$. Il reste à prouver que G est une sous-variété géodésique de dimension 1. Remarquons que le relevé de tout élément γ_i de G est une géodésique qui a les mêmes extrémités qu'un relevé d'un élément c_i de C . Comme deux relevés \tilde{c}_i, \tilde{c}_j d'éléments distincts de C sont disjoints, les deux géodésiques qui ont les mêmes extrémités que \tilde{c}_i, \tilde{c}_j sont disjoints aussi et donc G est une collection d'éléments disjoints.

Étape 2 : on peut supposer que $c_i \cap \gamma_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$. En effet, d'après le lemme 2.19, on peut supposer (après isotopie) que C et G ont intersection minimale. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.21. *Pour toute paire i, j , tout relevé \tilde{c}_i de c_i rencontre au plus une fois tout relevé $\tilde{\gamma}_j$ de γ_j .*

Démonstration. Sinon il existe \tilde{c}_i relevé de c_i et $\tilde{\gamma}_j$ relevé de γ_j tels que $|\tilde{c}_i \cap \tilde{\gamma}_j| \geq 2$. Posons \tilde{I}_0 l'arc de \tilde{c}_i et \tilde{J}_0 l'arc de $\tilde{\gamma}_j$ qui sont le bord d'un disque topologique dans \mathbb{H}^2 , noté \tilde{D}_0 . Notons que pour tout $h \in \Gamma \setminus \{Id\}$ on a $h\tilde{I}_0 \cap \tilde{I}_0 = \emptyset$ et $h\tilde{J}_0 \cap \tilde{J}_0 = \emptyset$. De plus si supposons que pour tout $h \in \Gamma \setminus \{Id\}$ on a $h\tilde{D}_0 \cap \tilde{D}_0 = \emptyset$, alors π est une injection en restriction à \tilde{D}_0 . Donc $\pi(\tilde{D}_0)$ est un disque topologique bordé par deux arcs $I_0 \subset c_i$ et $J_0 \subset \gamma_j$. Ceci est une contradiction parce c_i et γ_j ont intersection minimale. Sinon il existe $h_0 \in \Gamma \setminus \{Id\}$ tel que $h_0\tilde{D}_0 \cap \tilde{D}_0 \neq \emptyset$, donc $h_0\tilde{\gamma}_j \cap \tilde{I}_0 \neq \emptyset$ ou $h_0\tilde{c}_i \cap \tilde{J}_0 \neq \emptyset$. Supposons $h_0\tilde{\gamma}_j \cap \tilde{I}_0 \neq \emptyset$ et posons \tilde{D}_1 la composante connexe de $\tilde{D}_0 \setminus h_0\tilde{\gamma}_j$ telle que $\tilde{D}_1 \cap \tilde{J}_0 = \emptyset$. Comme c_i et γ_j ont intersection minimale on peut choisir h_0 tel que $h\tilde{\gamma}_j \cap \tilde{D}_1 = \emptyset$ pour tout $h \in \Gamma \setminus \{Id\}$. Posons \tilde{I}_1 et \tilde{J}_1 les arcs de \tilde{c}_i et $h_0\tilde{\gamma}_j$ respectivement qui sont le bord du disque \tilde{D}_1 . S'il existe $h \in \Gamma \setminus \{Id\}$ tel que $h\tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_1 \neq \emptyset$ de la même manière précédente on peut choisir h_1 tel que $h_1\tilde{c}_i \cap \tilde{J}_1 \neq \emptyset$ et si posons \tilde{D}_2 la composante connexe de $\tilde{D}_1 \setminus h_1\tilde{c}_i$ telle que $\tilde{D}_2 \cap \tilde{I}_1 = \emptyset$, alors $h\tilde{D}_2 \cap \tilde{D}_2 = \emptyset$ pour tout $h \in \Gamma \setminus \{Id\}$. Ceci est une contradiction parce que c_i et γ_j ont intersection minimale. ■

Étape 3 : pour tout i la “surface bordée” pour c_i et γ_i est homéomorphe à un anneau compact. Pour $i = 1, \dots, n$ comme c_i et γ_i sont homotopes et disjointes, posons \tilde{c}_i et $\tilde{\gamma}_i$ relevés de c_i et γ_i respectivement avec les mêmes extrémités dans \mathbb{S}_∞ et soit $g \in \Gamma$ tel que $g\tilde{\gamma}_i = \tilde{\gamma}_i$. Posons \tilde{N}_i l'ensemble bordé par \tilde{c}_i et $\tilde{\gamma}_i$ et soit $N_i := \pi(\tilde{N}_i)$. Nous allons prouver que N_i est homéomorphe à un anneau compact en deux parties. Soit $\pi_1 : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\langle g \rangle$.

Partie 1 : $\pi_1(\tilde{N}_i)$ est homéomorphe à un anneau compact. En effet, comme $\mathbb{H}^2/\langle g \rangle$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ donc (à homéomorphisme près) $\pi_1(\tilde{c}_i), \pi_1(\tilde{\gamma}_i) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sont deux courbes fermées simples essentielles et disjointes. Nous concluons cette partie avec le lemme de l'anneau.

Lemme 2.22 (Lemme de l'anneau). *Soient $\alpha, \beta : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux courbes fermées simples telles que α est contenue dans l'intérieur de β . Alors l'ensemble bordé par α et β est homéomorphe à un anneau compact.*

Partie 2 : l'application $\pi_2 : \mathbb{H}^2/\langle g \rangle \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$ est injective en restriction à $\pi_1(\tilde{N}_i)$. En effet, d'après de l'étape 2 on a $h\tilde{c}_i \cap \tilde{\gamma}_i = \emptyset$ et $\tilde{c}_i \cap h\tilde{\gamma}_i = \emptyset$ pour tout $h \in \Gamma \setminus \langle g \rangle$ et en plus comme c_i et γ_i sont courbes simples on a $h\tilde{c}_i \cap \tilde{c}_i = \emptyset$ et $h\tilde{\gamma}_i \cap \tilde{\gamma}_i = \emptyset$ pour tout $h \in \Gamma \setminus \langle g \rangle$. Donc $h\tilde{N}_i \cap \tilde{N}_i = \emptyset$ pour tout $h \in \Gamma \setminus \langle g \rangle$.

Étape 4 : on prouve que C est isotope à G . D'après l'étape 3 pour tout $i = 1, \dots, n$ la surface $N_i = \pi(\tilde{N}_i)$ est homéomorphe à un anneau compact $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ et d'après l'étape 2 on a $N_i \cap N_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$. D'après le théorème 2.10 il existe un anneau compact N'_i dans S tel que $N_i \subset N'_i$ et un homéomorphisme $\phi_i : \mathbb{S}^1 \times [-2, 2] \rightarrow N'_i$ qui satisfait $\phi_i(\mathbb{S}^1 \times \{-1\}) = c_i$ et $\phi_i(\mathbb{S}^1 \times \{1\}) = \gamma_i$. Notons que comme C et G sont collections finies on peut choisir la collection $(N'_i)_{i=1}^n$ tel que $N'_i \cap N'_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$. Pour $z \in [-2, 2]$ nous définissons l'homéomorphisme $\varphi_z : [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$ par l'application linéaire

par morceaux qui satisfait $\varphi_z(-2) = -2$; $\varphi_z(2) = 2$ et $\varphi_z(-1) = 1$. Donc soit $\varphi : \mathbb{S}^1 \times [-2, 2] \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [-2, 2]$ l'homéomorphisme défini par $\varphi(z, t) = (z, \varphi_z(t))$ et pour $i = 1, \dots, n$ soit $h_i : S \rightarrow S$ l'homéomorphisme isotope à l'identité défini par :

$$h_i(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \notin N'_i; \\ \phi_i(\varphi(\phi_i^{-1}(x))), & \text{si } x \in N'_i. \end{cases}$$

Alors d'après la proposition 2.17 l'application $h : S \rightarrow S$ définie par :

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \notin \cup_i N'_i; \\ h_i(x), & \text{si } x \in N'_i. \end{cases}$$

est un homéomorphisme isotope à l'identité et pour tout $i = 1, \dots, n$ satisfait $h(c_i) = \gamma_i$. ■

Théorème 2.23. *Soient C_1 et C_2 deux sous-variétés essentielles de dimension 1, telles qu'aucun élément de C_1 est isotope à un élément de C_2 . Si on suppose que C_1 et C_2 ont intersection minimale, alors tous les éléments de C_1 et C_2 sont simultanément isotopes à des géodésiques, c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme $h : S \rightarrow S$ isotope à l'identité tel que pour tous éléments c_1 et c_2 de C_1 et C_2 respectivement, $h(c_1)$ et $h(c_2)$ sont géodésiques.*

Démonstration. D'après le théorème 2.20, la sous-variété essentielle C_2 est isotope par h_2 à une sous-variété géodésique de dimension 1, notée G_2 . Alors comme C_1 et C_2 ont intersection minimale, d'après le lemme 2.15 $h_2(C_1)$ et $h_2(C_2) = G_2$ ont intersection minimale. Donc on peut supposer (après isotopie) que tous les éléments de C_2 sont géodésiques. D'après le théorème 2.20, la sous-variété essentielle C_1 est isotope par h_1 à une sous-variété géodésique de dimension 1, notée G_1 . D'après la preuve du théorème 2.20 cette isotopie peut se faire avec une série d'étapes consistant à "pousser C_1 à travers un disque" et une série d'étapes consistant à "pousser C_1 à travers un anneau compact". Il suffit de prouver que cette isotopie peut être choisie de façon à laisser invariante la sous-variété essentielle C_2 .

"Pousser C_1 à travers un disque". Supposons que I_i et δ_j sont des arcs des éléments c_i de C_1 et γ_j de G_1 tels que $I_i \cup \delta_j$ est le bord d'un disque topologique dans S , noté D . D'après le lemme 2.12 il existe un homéomorphisme $\phi : \overline{B(0, 2)} \rightarrow N$ tel que $\phi(J_1 \cup J_2) = I_i \cup \delta_j$. Comme C_2 a intersection minimale avec C_1 (par hypothèse) et G_1 (d'après le lemme 2.15), on a que $C_2 \cap N$ est une famille des arcs que poussant N "de haut en bas". D'après le théorème de Schoenflies on peut considérer un homéomorphisme $\varphi : \overline{B(0, 2)} \rightarrow \overline{B(0, 2)}$ qui "redresse" les arcs de $C_2 \cap N$, voir figure 2.2.

"Pousser C_1 à travers un anneau compact". Maintenant nous pouvons déplacer C_1 sur G_1 par un homéomorphisme $h : S \rightarrow S$ isotope à l'identité qui est l'identité en dehors d'un nombre fini d'anneaux compacts N'_i homéomorphes à $\mathbb{S}^1 \times [-2, 2]$, notons ϕ_i cet homéomorphisme, voir la démonstration du théorème

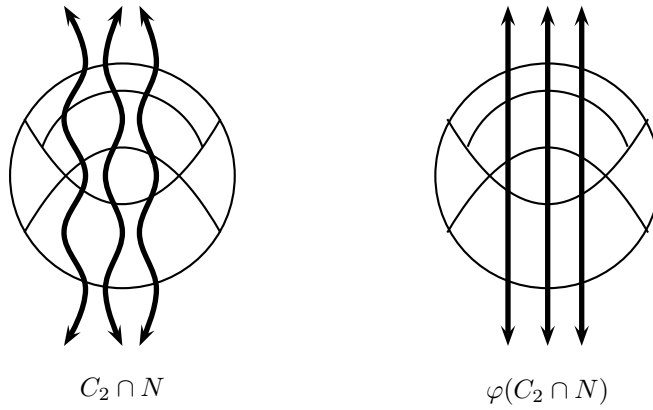


FIGURE 2.2 – Fonction de Schoenflies qui “redresse” les arcs de $C_2 \cap N$.

2.20. D’après la preuve du théorème 2.20 on peut choisir la suite $(N'_i)_{i=1}^n$ telle que $N'_i \cap N'_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Comme C_2 a intersection minimale avec C_1 et G_1 chacun des éléments de $C_2 \cap N'_i$ sont des arcs qui joignent les “deux composantes” de N'_i . D’après le théorème de Schoenflies on peut considérer un homéomorphisme $\varphi_i : \mathbb{S}^1 \times [-2, 2] \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [-2, 2]$ qui “redresse” les arcs de $C_2 \cap N'_i$, voir figure 2.3. Alors cette isotopie peut être choisie de façon à laisser invariante la sous-variété essentielle C_2 . ■

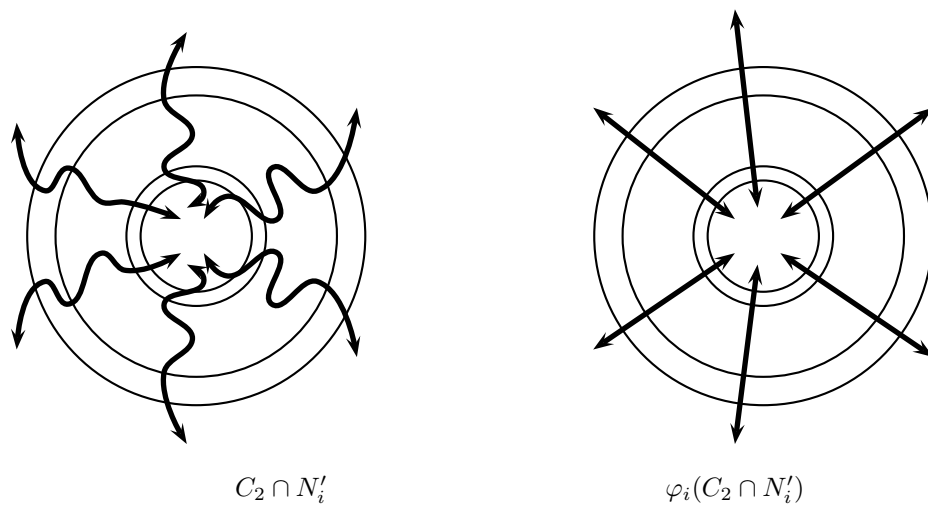


FIGURE 2.3 – Fonction φ_i de Schoenflies qui “redresse” les arcs de $C_2 \cap N'_i$.

Chapitre 3

Propriétés des géodésiques sur la surface $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$

Le but de ce chapitre est de prouver pour la surface hyperbolique $S = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$, celle construite de première espèce, où \mathcal{O} est une partie discrète infinie de \mathbb{R}^2 , les propriétés suivantes : si nous notons \mathbf{P} l'ensemble des courbes fermées simples "essentiels" dans S et des courbes simples propres "essentiels" dans S , alors

- (1) tout élément $c \in \mathbf{P}$ est isotope à une unique géodésique dans \mathbf{P} ,
- (2) si P est une collection localement finie d'éléments disjoints de \mathbf{P} qui sont isotopes à des géodésiques distinctes, alors il existe un homéomorphisme $h : S \rightarrow S$ isotope à l'identité tel que $h(c)$ est une géodésique pour toute courbe c dans \mathbf{P} , et
- (3) si P_1 et P_2 sont deux collections localement finies d'éléments disjoints de \mathbf{P} qui sont isotopes à des géodésiques distinctes et si P_1 et P_2 ont intersection minimale, alors il existe un homéomorphisme $h : S \rightarrow S$ isotope à l'identité tel que pour tous éléments c_1 et c_2 de P_1 et P_2 respectivement, $h(c_1)$ et $h(c_2)$ sont géodésiques.

On fixe quelques notations, dans ce chapitre on considère la surface hyperbolique $S = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$, où \mathcal{O} est une partie discrète infinie de \mathbb{R}^2 et d'après le chapitre 1 $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$, où Γ est un groupe fuchsien de première espèce. On notera $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow S$ la projection naturelle. Quelques références par ce chapitre sont [Mat00] et [Han99].

3.1 Propriétés des géodésiques sur la surface $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$

Le but de cette section est de prouver que toute courbe fermée simple "essentielle" dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$ est librement homotope à une unique géodésique fermée

simple et aussi que toute courbe simple propre “essentielle” dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$ est proprement homotope à une unique géodésique simple propre.

Définition 3.1 (Courbe fermée simple essentielle). *Une courbe fermée $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ est dite courbe fermée simple essentielle si c est une application injective et telle que toute composante connexe de son complémentaire contient au moins deux éléments de \mathcal{O} .*

Lemme 3.2. *Soit $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une courbe fermée simple et soient $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ un relevé de c et $g \in \Gamma$ tel que $g\tilde{c}(0) = \tilde{c}(1)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) g est un élément parabolique de Γ .
- (2) Il existe une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de courbes librement homotopes à c telles que $l(c_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- (3) c entoure un seul point de \mathcal{O} .

Démonstration. D’abord montrons (1) \Leftrightarrow (2), puis (2) \Leftrightarrow (3).

(1) \Rightarrow (2) Supposons que $g \in \Gamma$ est un élément parabolique tel que $g\tilde{c}(0) = \tilde{c}(1)$, (à conjugaison près) on peut supposer que $g(z) = z + 1$. Posons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$N > \sup_{t \in \mathbb{R}} \Im(\tilde{c}(t)).$$

Pour un entier positif n nous définissons la courbe $\tilde{c}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ par $c_n(t) = t + (N+n)i$ qui est librement homotope à \tilde{c} . Alors la courbe fermée $c_n := \pi \circ \tilde{c}_n$ est librement homotope à c et

$$l(c_n) = \int_0^1 \frac{1}{N+n} dt = \frac{1}{N+n} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

(2) \Rightarrow (1) Si (2) est vrai, on a $\inf_{\tilde{x} \in \mathbb{H}^2} \rho(g\tilde{x}, \tilde{x}) = 0$, et donc g n’est pas hyperbolique.

(2) \Rightarrow (3) (Á isométrie près on peut supposer que $S = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$). Par le contraposée, supposons que c entoure au moins deux points distincts de \mathbb{Z} . Nous considérons $i \in \mathbb{Z}$ (respectivement $j \in \mathbb{Z}$) l’entier le plus petit (respectivement grand) qu’entoure c . Posons deux cercles disjoints (petits), notons-les α_1 et α_2 , qui entourent seulement $i-1, i$ et $j, j+1$ respectivement. Soit $c' : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une courbe librement homotope à c , donc il existe $x \in c' \cap \alpha_1$ et $y \in c' \cap \alpha_2$. Alors

$$l(c') \geq l([x, y]_{c'}) \geq d(x, y) \geq \text{dist}(\alpha_1, \alpha_2) > 0,$$

où $[x, y]_{c'}$ est l’arc de la courbe c' entre x et y . Ceci est une contradiction à (3).

(3) \Rightarrow (2) Si nous supposons que c entoure un seul point $p \in \mathcal{O}$, alors c est librement homotope à un tout petit cercle qui entoure p . ■

Lemme 3.3. *Soit $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une courbe fermée simple essentielle dans S . Pour tout relevé $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ de c les limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{c}(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{c}(t)$ existent dans \mathbb{S}_∞ et sont distinctes.*

Démonstration. Soit $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ un relevé de c et $g \in \Gamma$ tel que $g\tilde{c}(0) = \tilde{c}(1)$. Si nous supposons que g est un élément parabolique de Γ , alors d'après le lemme 3.2 la courbe c entoure un seul point de \mathcal{O} . Ceci est une contradiction puisque c est essentielle. Donc g est un élément hyperbolique de Γ et la preuve se déroule comme dans le cas compact, voir le lemme 2.2. ■

Théorème 3.4. *Toute courbe fermée simple essentielle $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ dans S est librement homotope à une unique géodésique fermée simple.*

Démonstration. D'après le lemme 3.3, on peut recopier la preuve du cas compact, voir le théorème 2.4 et le théorème 2.9. ■

Définition 3.5 (Courbe simple propre). *Une courbe (respectivement géodésique) $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow S$ est dite courbe (respectivement géodésique) simple propre si α est une application injective et pour toute partie compacte K de S , l'ensemble $\alpha^{-1}(K)$ est une partie compacte de \mathbb{R} .*

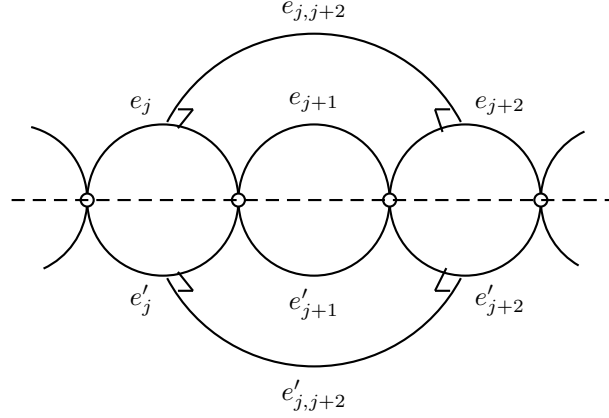
D'après le théorème 3.4, il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de disques fermés dans \mathbb{R}^2 telle que :

- (1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la frontière $\lambda_n = \partial A_n$ est une géodésique fermée simple dans S ,
- (2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n est contenu dans $\text{Int}(A_{n+1})$,
- (3) l'ensemble A_0 contient exactement deux points de \mathcal{O} ,
- (4) pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_{n+1} \setminus A_n$ contient exactement un point de \mathcal{O} , et
- (5) l'ensemble \mathcal{O} est contenu dans l'union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

En effet, (à homéomorphisme près) on peut supposer que $S = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$. On peut construire (explicitement) une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de disques fermés dans \mathbb{R}^2 qui satisfait les propriétés (2) – (5) ci-dessus. De plus, d'après (2) et (3), pour tout $n \in \mathbb{N}$ la courbe $\partial A_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ est une courbe fermée simple essentielle. Donc d'après le théorème 3.4, il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de disques fermés dans \mathbb{R}^2 qui satisfait les propriétés (1) – (5) ci-dessus.

Remarquons qu'on peut construire une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui satisfait les propriétés (1) – (5) ci-dessus explicitement dans le modèle de $S = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$ du chapitre 1. En effet pour chaque $i, j \in \mathbb{Z}$ comme les géodésiques e_i et e_j sont disjointes, il existe une unique géodésique, notée $e_{i,j}$, qui est orthogonale aux géodésiques e_i et e_j , (voir section 7.22 de [Bea83]). Donc on peut construire λ_n en recollant la géodésique $e_{i,j}$ dans X avec “la même” dans X' , voir la figure 3.1.

Dans le lemme suivant, on va voir l'importance que Γ soit un groupe de première espèce. Cette propriété du groupe Γ implique que la suite de géodésiques $(\lambda_n = \partial A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui satisfait les propriétés (1) – (5) ci-dessus est une collection localement finie dans S .


 FIGURE 3.1 – Exemple des géodésiques λ_n dans le modèle $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$.

Lemme 3.6. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui satisfait (1) – (5) ci-dessus. Alors

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}^2.$$

Démonstration. Notons $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et supposons que $\partial A \neq \emptyset$. Par (1) et (2) tous les points dans ∂A sont points d'accumulation d'une suite de géodésiques distinctes. Donc ∂A est l'union de géodésiques complètes de S . La même propriété est vraie pour l'image inverse $\pi^{-1}(A \cap S)$, qui est connexe parce par (5) l'inclusion $A \cap S \hookrightarrow S$ est une équivalence d'homotopie. Alors l'adhérence de $\pi^{-1}(A \cap S)$ (dans $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$) est une partie fermée, Γ -invariante de $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$. D'après le théorème 1.22 l'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$ est contenu dans l'adhérence de $\pi^{-1}(A \cap S)$ (dans $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$). Comme d'après le théorème 1.29, Γ est de première espèce et comme $\pi^{-1}(A \cap S)$ est connexe, on a $\pi^{-1}(A \cap S) = \mathbb{H}^2$ et donc $A = \mathbb{R}^2$, ceci est une contradiction. ■

Définition 3.7 (Coupûre propre). Une courbe simple $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ est dite *coupûre propre* si les limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} c(t)$ existent dans \mathbb{S}_∞ et sont distinctes. Les limites sont appelées *extrémités* de c et on note ∂c l'ensemble des extrémités.

Fixons un point $x_0 \in \mathbb{H}^2$ et considérons seulement les coupûres propres c qui ne passent pas par x_0 . On notera $D(c)$ la composante connexe de $\mathbb{H}^2 \setminus c$ qui ne contient pas x_0 .

Définition 3.8 (Chaîne propre). Une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de coupûres propres est dite *une chaîne propre* si elle satisfait les conditions suivantes :

- (1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $D(c_{n+1})$ est contenu dans $D(c_n)$,
- (2) l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D(c_n)$ est vide, et
- (3) la suite $(\text{diam}(\partial c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Remarque 2. Les conditions (2) et (3) sont équivalentes à dire que l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{D(c_n)}$ est un singleton dans \mathbb{S}_∞ .

Définition 3.9 (Courbe simple propre essentielle). *Une courbe simple propre $c : \mathbb{R} \rightarrow S$ est dite courbe simple propre essentielle si toute composante connexe de son complémentaire contient au moins un élément de \mathcal{O} .*

Lemme 3.10. *Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow S$ une courbe simple propre dans S . Pour tout relevé $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ de c les limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{c}(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{c}(t)$ existent dans \mathbb{S}_∞ .*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas quand t tend vers $+\infty$. Comme la courbe c est propre il y a deux cas possibles.

Cas où c tend vers une pointe quand t tend vers $+\infty$. Soit $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'horocycles dans S qui converge vers la pointe quand n tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons t_n la valeur maximale de $t \in \mathbb{R}$ telle que $c(t_n) \in \delta_n$ et soit $\tilde{\delta}_n$ un relevé de δ_n qui rencontre $\tilde{c}(t_n)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $\tilde{c}([t_n, +\infty))$ est contenu dans l'horoboule entourée par $\tilde{\delta}_n$. Ce prouve que la suite d'horocycles $(\tilde{\delta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont le même point base dans \mathbb{S}_∞ . Par conséquent la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{c}(t)$ existe.

Cas où c ne tend pas vers une pointe quand t tend vers $+\infty$. Dans ce cas c "tend vers l'infini de \mathbb{R}^2 " et la courbe (ou l'intervalle de c) $c|_{[0, +\infty)}$ est propre dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$. Choisissons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $c(0) \in \text{Int } A_{n_0}$. Alors pour tout entier $n \geq n_0$ le rayon $c([0, +\infty))$ intersecte la frontière $\lambda_n = \partial A_n$ du disque fermé A_n . De plus comme la courbe $c|_{[0, +\infty)}$ est propre dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$, pour tout entier $n \geq n_0$ posons $t_n > 0$ la valeur maximale de $t \in \mathbb{R}$ telle que $c(t_n) \in \lambda_n$. Clairement la suite $(t_n)_{n \geq n_0}$ est croissante et tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et posons $\tilde{\lambda}_n$ un relevé de λ_n qui rencontre $\tilde{c}(t_n)$. Choisissons le point de base $\tilde{c}(0)$ et notons $D(\tilde{\lambda}_n)$ la composante connexe de $\mathbb{H}^2 \setminus \tilde{\lambda}_n$ qui ne contient pas $\tilde{c}(0)$. Alors $\tilde{c}([t_n, +\infty))$ est contenu dans $D(\tilde{\lambda}_n)$, et comme les géodésiques λ_n et λ_{n+1} sont disjointes, on a $D(\tilde{\lambda}_{n+1})$ est contenu dans $D(\tilde{\lambda}_n)$. Montrons que la suite $(\tilde{\lambda}_n)_{n \geq n_0}$ est une chaîne propre. Il suffit de prouver que $\bigcap_{n \geq n_0} D_n(\tilde{\lambda}_n) = \emptyset$ et que $\text{diam}(\partial \tilde{\lambda}_n)$ tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$. Sinon, la suite $(\tilde{\lambda}_n)_{n \geq n_0}$ doit converger vers une géodésique dans \mathbb{H}^2 . Alors il existe une partie compacte K de \mathbb{H}^2 qui rencontre un nombre infini de $\tilde{\lambda}_n$. Donc $\pi(K)$ est une partie compacte de S qui rencontre un nombre infini de λ_n , une contradiction, avec le lemme 3.6. ■

Lemme 3.11. *Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow S$ une courbe simple propre essentielle dans S . Pour tout relevé $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ de c les limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{c}(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{c}(t)$ sont distinctes.*

Démonstration. Supposons pour contradiction que les extrémités de \tilde{c} sont un même point dans \mathbb{S}_∞ . Comme la famille $\{g(\tilde{c}) : g \in \Gamma\}$ est disjointe et divergente; c'est-à-dire, toute partie compacte de \mathbb{H}^2 intersecte seulement un nombre fini d'éléments de la famille. Posons D la composante connexe de $\mathbb{H}^2 \setminus \tilde{c}$ dont l'adhérence dans $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$ intersecte \mathbb{S}_∞ en un seul point. On a deux cas.

Cas 1. Il existe $g \in \Gamma$ tel que $g(\tilde{c})$ est contenu dans D . Par la divergence de la famille, on peut choisir g tel que soit le plus à l'extérieur. Notons A le domaine borné par \tilde{c} et $g(\tilde{c})$. Donc pour tout élément h non trivial de Γ , on a $h(A) \cap A = \emptyset$. Donc l'image par π de l'adhérence de A (dans \mathbb{H}^2) est un anneau ouvert plongé dans S . Clairement le plongé est propre. Alors S est égal à un anneau.

Cas 2. Pour tout $g \in \Gamma$ on a $g(D)$ et D sont disjoints. Alors la projection $\pi(D)$ de D est une composante connexe de $S \setminus c$ homéomorphe à un disque ouvert. Ceci est une contradiction avec l'hypothèse sur c , puisque toute composante connexe de $S \setminus c$ contient au moins un élément de \mathcal{O} . ■

Définition 3.12 (Homotopie propre). *On dira que deux courbes propres $c_1, c_2 : \mathbb{R} \rightarrow S$ dans S sont proprement homotopes si l'homotopie $H : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow S$ entre c_1 et c_2 est une fonction propre, c'est-à-dire pour toute partie compacte K de S , l'ensemble $H^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R} \times [0, 1]$.*

Théorème 3.13. *Toute courbe simple propre essentielle $c : \mathbb{R} \rightarrow S$ dans S est proprement homotope à une unique géodésique simple propre.*

Démonstration. La preuve est une conclusion des résultats suivants. ■

Théorème 3.14. *Toute courbe simple propre essentielle $c : \mathbb{R} \rightarrow S$ dans S est proprement homotope à une unique géodésique propre.*

Démonstration. Existence. Soit \tilde{c} un relevé de c , d'après le lemme 3.11 les extrémités de \tilde{c} sont distinctes. Posons $\tilde{\gamma}$ la géodésique de \mathbb{H}^2 avec les mêmes extrémités que \tilde{c} . Donc il existe une homotopie \tilde{H} entre \tilde{c} et $\tilde{\gamma}$ qui laisse les extrémités fixes dans \mathbb{S}_∞ . Alors $H = \pi \circ \tilde{H}$ est une homotopie entre c et la géodésique $\gamma = \pi(\tilde{\gamma})$. Il faut démontrer que on peut choisir l'homotopie \tilde{H} telle que H soit propre. La preuve utilise les mêmes arguments que la preuve du lemme 3.10. On va considérer un seul cas.

Cas où c tend vers une pointe quand t tend vers $+\infty$. Soit $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'horocycles dans S qui converge vers la pointe quand n tend vers $+\infty$. Soit $\tilde{\delta}_n$ un relevé de δ_n qui rencontre \tilde{c} . Nous remarquons que, on peut choisir l'homotopie \tilde{H} telle que ne s'approche pas à \mathbb{S}_∞ , sauf à proximité des extrémités. Autrement dit pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre réel $t_n > 0$

maximal tel que pour tout $s \in [0, 1]$ satisfait $\tilde{H}((t_n, +\infty), s)$ est contenu dans l'horoboule entourée par $\tilde{\delta}_n$. ■

Pour montrer la unicité nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.15. *Soient $c_1, c_2 : \mathbb{R} \rightarrow S$ deux courbes simples propres essentielles proprement homotopes l'une à l'autre et soit $\tilde{c}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ un relevé de la courbe c_1 . Alors il existe un relevé $\tilde{c}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ de la courbe c_2 qui a les mêmes extrémités que \tilde{c}_1 .*

Démonstration. Notons $H : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow S$ l'homotopie propre entre c_1 et c_2 . Donc on peut relever H en une homotopie $\tilde{H} : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\tilde{H}(t, 0) = \tilde{c}_1(t)$. Alors pour $t \in \mathbb{R}$ on définit $\tilde{c}_2(t) = \tilde{H}(t, 1)$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ le chemin $\tilde{H}(\{t\} \times [0, 1])$ est un relevé du chemin $H(\{t\} \times [0, 1])$. La preuve utilise les mêmes arguments que la preuve du lemme 3.10. On va considérer un seul cas.

Cas où c_1 tend vers une pointe quand t tend vers $+\infty$. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties compactes de S telles que $(\partial K_n = \delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite d'horocycles dans S qui converge vers la pointe quand n tend vers $+\infty$. Soit $\tilde{\delta}_n$ un relevé de δ_n qui rencontre \tilde{c}_1 . Comme l'homotopie H est propre, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un nombre réel t_n maximal tel que pour tout $s \in [0, 1]$ le rayon $H((t_n, +\infty), s)$ n'est pas contenu dans K_n . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in [0, 1]$ le rayon $\tilde{H}((t_n, +\infty), s)$ est contenu dans l'horoboule entourée par $\tilde{\delta}_n$. Comme la suite d'horocycles $(\tilde{\delta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont le même point base dans \mathbb{S}_∞ nous concluons que pour tout $s \in [0, 1]$ les limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{H}(t, s)$ sont le même point dans \mathbb{S}_∞ . En particulier, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{c}_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{c}_2(t)$. ■

Suite de la démonstration du théorème 3.14. Unicité. Supposons qu'il existe une deuxième géodésique propre γ' de S proprement homotope à c . Alors les géodésiques γ et γ' sont proprement homotopes. Soit $\tilde{\gamma}$ un relevé de γ , d'après le lemme 3.15, il existe un relevé $\tilde{\gamma}'$ de γ' qui a les mêmes extrémités que $\tilde{\gamma}$. Alors $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$ et donc $\gamma = \gamma'$. ■

Lemme 3.16. *Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow S$ une courbe simple propre essentielle dans S . Alors il n'existe pas deux relevés de c distincts qui s'intersectent.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux relevés $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ de c que s'intersectent. Donc il existe deux nombres réels t_1, t_2 tels que $\tilde{c}_1(t_1) = \tilde{c}_2(t_2)$ et donc $c_1(t_1) = c_2(t_2)$. Comme c est une courbe simple, on a $t_1 = t_2$ et donc $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$. ■

Lemme 3.17. *Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow S$ une courbe simple propre essentielle. Alors la unique géodésique γ proprement homotope à c est simple.*

Démonstration. Supposons que γ n'est pas simple. Alors il existe deux relevés distincts $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ de γ que s'intersectent. Donc les relevés \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 de c avec les mêmes extrémités que $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ respectivement s'intersectent. Ceci est une contradiction avec le lemme 3.16. ■

3.2 Propriétés des collections de géodésiques sur la surface $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$

Le but de cette section est d'écrire les détails de la démonstration du lemme 3.5 de [Han99].

Définition 3.18 (Ensemble \mathbf{P}). *On notera \mathbf{P} l'ensemble des courbes fermées simples $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ essentielles et des courbes simples propres $c : \mathbb{R} \rightarrow S$ essentielles.*

Théorème 3.19 (Lemme 3.5 [Han99]). *1. Tout élément $c \in \mathbf{P}$ est isotope à une unique géodésique.*

2. Soit P une collection localement finie d'éléments disjoints de \mathbf{P} que sont isotopes à des géodésiques distinctes. Alors les éléments de P sont simultanément isotopes à des géodésiques, c'est-à-dire il existe un homéomorphisme $h : S \rightarrow S$, isotope à l'identité, tel que pour tout élément c de P , $h(c)$ est une géodésique.

3. Si P_1 et P_2 sont deux collections localement finies d'éléments disjoints de \mathbf{P} que sont isotopes à des géodésiques distinctes. Si supposons que P_1 et P_2 ont intersection minimale, alors tout élément de P_1 et P_2 sont simultanément isotopes à des géodésiques, c'est-à-dire il existe un homéomorphisme $h : S \rightarrow S$, isotope à l'identité, tel que pour tout élément c_1 et c_2 de P_1 et P_2 respectivement, $h(c_1)$ et $h(c_2)$ sont géodésiques.

Théorème 3.20. *Soit c une courbe dans \mathbf{P} .*

1. Si $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ est une courbe fermée simple essentielle dans S , alors il existe un plongement $\phi : \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] \rightarrow S$ tel que $\phi(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) = c$.

2. Si $c : \mathbb{R} \rightarrow S$ est une courbe simple propre essentielle dans S , alors il existe un plongement $\phi : \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow S$ tel que $\phi(\mathbb{R} \times \{0\}) = c$.

Démonstration de 1. D'après le lemme 3.3, on peut recopier la preuve du cas compact, voir le théorème 2.10. ■

Démonstration de 2. Soit $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ un relevé de c et soit $\varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme. Notons que $\varphi(\tilde{c})$ est une courbe simple propre homotope à $\mathbb{R} \times \{0\}$. D'après le théorème de Schoenflies "dans \mathbb{R}^2 ", il existe un homéomorphisme $\phi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, envoyant $\mathbb{R} \times \{0\}$ sur $\varphi(\tilde{c})$. Pour une fonction $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ posons $R_\epsilon = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi^{-1} \circ \phi_1(\{t\} \times [-\epsilon(t), \epsilon(t)])$. Notons que R_ϵ est homéomorphe à un ruban $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Nous concluons la preuve de ce théorème avec le lemme suivant.

Lemme 3.21. *Il existe une fonction $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ telle que l'application $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow S$ est injective en restriction à R_ϵ .*

Démonstration. Soit $h \in \Gamma$ distinct à l'identité. Comme c est une courbe simple dans S d'après le lemme 3.16, on a $h(\tilde{c}) \cap \tilde{c} = \emptyset$ et comme Γ est une collection localement finie la famille $\{h(\tilde{c}) : h \in \Gamma \setminus \{Id\}\}$ ne s'accumule pas dans \tilde{c} . En

3.2. PROPRIÉTÉS DES COLLECTIONS DE GÉODÉSIIQUES SUR LA SURFACE $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}33$

effet, pour chaque nombre réel t comme la collection $\{h(\tilde{c}) : h \in \Gamma \setminus \{Id\}\}$ est localement finie il existe un nombre réel $\epsilon(t) > 0$ tel que :

$$\epsilon(t) < \inf_{h \in \Gamma \setminus \{Id\}} \text{dist}(\tilde{c}(t), h(\tilde{c})). \quad (3.1)$$

■

■

- Lemme 3.22.** 1. Soit $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ une courbe fermée simple homotope à zéro. Alors il existe un plongement topologique $\phi : \overline{B(0,2)} \rightarrow S$ telle que $\phi(\mathbb{S}^1) = \alpha$, où \mathbb{S}^1 est identifié à $\partial B(0,1)$.
2. Soit $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow S$ une courbe simple propre telle que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t)$. Supposons que α est le bord d'un disque topologique dans S . Alors il existe un plongement topologique $\phi : B((-\frac{1}{2}, 0), \frac{3}{2}) \setminus \{(1, 0)\} \rightarrow S$ tel que (à paramétrage pres) $\phi(\beta) = \alpha$, où β est la courbe définie par :

$$\beta(t) = \begin{cases} (-2t+1, -\frac{1}{2}(2t+1)^2 + \frac{1}{2}), & \text{si } t \in (-1, 0]; \\ (2t-1, \frac{1}{2}(2t-1)^2 - \frac{1}{2}), & \text{si } t \in (-1, 0]. \end{cases}$$

Démonstration. On peut recopier la preuve de 1 du cas compact, voir la preuve du lemme 2.12. Montrons 2. Soit $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ un relevé de α . Notons que $\tilde{\alpha}$ (à homéomorphisme près) est une courbe homotope à la courbe β . D'après le théorème de Schoenflies "dans \mathbb{R}^2 ", il existe un homéomorphisme $\phi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ envoyant β sur α . Il faut trouver un voisinage U de $\tilde{\alpha}$ tel que π soit injective en restriction à U . D'après la preuve du lemme 3.10 on a $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\alpha}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}(t)$ dans \mathbb{S}_∞ . Notons \tilde{D} la composante connexe de $\mathbb{H}^2 \setminus \tilde{\alpha}$ qui dont l'adhérence (dans $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$) intersecte \mathbb{S}_∞ en un seul point. On a deux cas, mais d'après la preuve du lemme 3.11 et l'hypothèse sur α on a $h\tilde{D} \cap \tilde{D} = \emptyset$ pour tout $h \in \Gamma \setminus \{Id\}$. En conséquence l'application π est injective en restriction à \tilde{D} . Comme la famille $\{h\tilde{D} : h \in \Gamma\}$ est localement finie il existe un voisinage U de $\tilde{\alpha}$ tel que π est injective en restriction à U . ■

- Définition 3.23** (Intersection minimale). 1. On dira que deux éléments c_1, c_2 dans \mathbf{P} ont intersection minimale si toute composante connexe de $S \setminus (c_1 \cup c_2)$ dont la frontière (dans S) est l'union de deux intervalles (éventuellement infinis) $I_1 \subset c_1$ et $I_2 \subset c_2$, contient au moins un point de \mathcal{O} , voir la figure 3.2.
2. On dira que deux collections P_1, P_2 dans \mathbf{P} ont intersection minimale si toute paire $c_1 \in P_1$ et $c_2 \in P_2$ ont intersection minimale.

- Lemme 3.24.** 1. Si γ_1, γ_2 sont deux géodésiques dans S , alors elles ont intersection minimale.
2. Si c_1 et c_2 sont deux courbes dans \mathbf{P} qui ont intersection minimale et $h : S \rightarrow S$ un homéomorphisme de S , alors $h(c_1)$ et $h(c_2)$ ont intersection minimale.

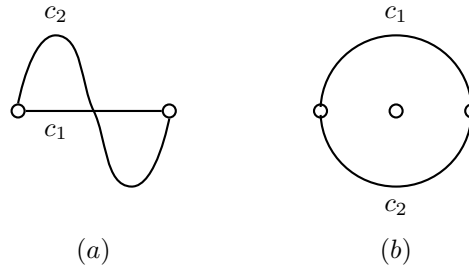


FIGURE 3.2 – (a) : les courbes n'ont pas intersection minimale. (b) : les courbes ont intersection minimale.

Démonstration du lemme 3.24. Nous fixons un relevé $\tilde{\gamma}_1$ de γ_1 et $\tilde{\gamma}_2$ un relevé de γ_2 . Comme $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont géodésiques dans \mathbb{H}^2 , elles s'intersectent au plus une fois. Donc γ_1 et γ_2 ont intersection minimale. La preuve de 2 est évidente. ■

Définition 3.25 (Homéomorphisme proprement isotope à l'identité). Soit $h : S \rightarrow S$ un homéomorphisme, on dira que h est **proprement isotope à l'identité à support dans N** , si h est un homéomorphisme isotope à l'identité à support dans N , voir définition 2.16 et l'isotopie $H : S \times [0, 1] \rightarrow S$ est une fonction propre, voir définition 3.12.

Proposition 3.26. Soit $h_i : S \rightarrow S$ une collection d'homéomorphismes proprement isotopes à l'identité à support dans N_i . Supposons que la collection $(N_i)_{i \in I}$ est disjointe 2 à 2 et localement finie. Alors la fonction $h : S \rightarrow S$ définie par :

$$h(x) = \begin{cases} h_i(x), & \text{si } x \in N_i; \\ x, & \text{si } x \notin \cup_{i \in I} N_i. \end{cases}$$

est un homéomorphisme proprement isotope à l'identité.

Démonstration. Nous remarquons que pour les hypothèses de la proposition il suffit montrer que h est une fonction continue. Premièrement montrons que h est une fonction propre, en effet soit K une partie compacte de S . Comme la collection des supports est localement finie il existe un sous-ensemble fini $I'(K)$ de I tel que

$$N_i \cap K \neq \emptyset \text{ si et seulement si } i \in I'(K).$$

Alors comme chaque homéomorphisme h_i est propre, l'ensemble

$$h^{-1}(K) = \bigcup_{i \in I'(K)} h_i^{-1}(K) \cup K;$$

est une partie compacte de S . Maintenant montrons que h est une fonction continue. En effet soit F une partie fermée de S et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties compactes de S telles que $K_n \subset K_{n+1}$ et $\cup_{n \in \mathbb{N}} K_n = F$. Pour chaque nombre

3.2. PROPRIÉTÉS DES COLLECTIONS DE GÉODÉSIIQUES SUR LA SURFACE $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}_{35}$

naturel n posons $F_n := F \cap K_n$. Notons que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties compactes de S telle que $F_n \subset F_{n+1}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = F$. Alors l'ensemble

$$h^{-1}(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{i \in I'(F_n)} h_i^{-1}(F_n) \cup F_n \right)$$

est l'union d'une suite croissante de parties compactes de S . Donc $h^{-1}(F)$ est une partie fermée de S . ■

Lemme 3.27. *Soient P_1, P_2 deux collections localement finies d'éléments dis-joints de \mathbf{P} et proprement homopotes à des géodésiques distinctes. Alors P_2 est isotope à une collection localement finie dans \mathbf{P} ayant intersection minimale avec P_1 .*

Démonstration. Quitte à faire une petite isotopie à P_2 , on peut se ramener au cas où toute paire $c_1 \in P_1$ et $c_2 \in P_2$ s'intersectent transversalement et donc l'ensemble d'intersection de c_1 et c_2 est une partie discrète de S . L'idée de la démonstration est "pousser P_2 à travers un disque "plein" et/ou "pousser P_2 à travers un disque avec une "extrémité fixée". On va procéder par récurrence. Supposons qu'il existe $c_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ dans P_1 et $c_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ dans P_2 telles qu'il existe une composante connexe de $S \setminus (c_1 \cup c_2)$ dont la frontière est l'union de deux intervalles $I_1 \subset c_1$ et $I_2 \subset c_2$ qui est un disque topologique. On a deux cas. Si I_1 et/ou I_2 sont des intervalles compacts, on peut recopier la preuve du cas compact, voir le lemme 2.19. Nous supposons que les intervalles I_1 et I_2 sont infinis, (cas "pousser P_2 à travers un disque avec une "extrémité fixée"). Posons

$$\alpha_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right\} \cap \overline{B \left(\left(-\frac{1}{2}, 0 \right), \frac{3}{2} \right) \setminus \{(1, 0)\}};$$

$$\alpha_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right\} \cap \overline{B \left(\left(-\frac{1}{2}, 0 \right), \frac{3}{2} \right) \setminus \{(1, 0)\}};$$

et

$$J_1 := \{(x, y) \in \alpha_1 : y \geq 0\} \text{ et } J_2 := \{(x, y) \in \alpha_2 : y \leq 0\}.$$

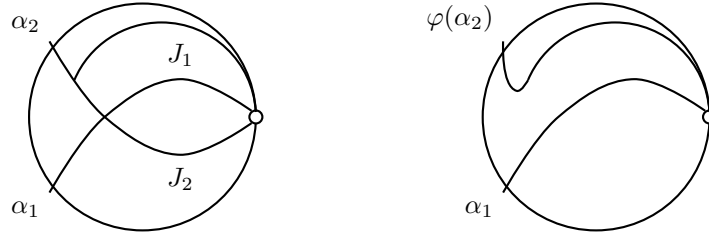
D'après le lemme 3.22 et comme c_1 et c_2 s'intersectent transversalement il existe un plongement $\phi_1 : \overline{B \left(\left(-\frac{1}{2}, 0 \right), \frac{3}{2} \right) \setminus \{(1, 0)\}} \rightarrow S$ tel que :

$$\phi_1(\alpha_1) \subset c_1; \phi_1(\alpha_2) \subset c_2; \phi_1(J_1) = I_1 \text{ et } \phi_1(J_2) = I_2.$$

Posons x_0 le nombre réel négatif (supérieur à -2) tel que $(x_0, y_0) \in \alpha_2 \cap \partial B \left(\left(-\frac{1}{4}, 0 \right), \frac{5}{4} \right)$, voir la figure 3.3.

Pour $x \in [-2, 1)$ nous définissons l'homéomorphisme

$$\varphi_x : \left[-\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2} \right)^2}, \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2} \right)^2} \right] \rightarrow \left[-\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2} \right)^2}, \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2} \right)^2} \right]$$


 FIGURE 3.3 – “Pousser c_2 à travers un disque avec une “extrémité fixée””.

par : l’application linéaire par morceaux qui satisfait

$$\begin{aligned}\varphi_x \left(-\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \right) &= -\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \\ \varphi_x \left(\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \right) &= \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} \varphi_x \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) = \sqrt{\frac{25}{16} - \left(x + \frac{1}{4}\right)^2}, & \text{si } x \in [x_0, 1]; \\ \varphi_x(0) = 0 & \text{si } x \in [-2, x_0]. \end{cases}$$

Soit $\varphi : B \left(\left(-\frac{1}{4}, 0\right), \frac{5}{4} \right) \setminus \{(1, 0)\} \rightarrow B \left(\left(-\frac{1}{4}, 0\right), \frac{5}{4} \right) \setminus \{(1, 0)\}$ l’homéomorphisme défini par $\varphi(x, y) = (x, \varphi_x(y))$ et on définit $h_1 : S \rightarrow S$ l’homéomorphisme isotope à l’identité par :

$$h_1(z) = \begin{cases} z, & \text{si } z \notin \phi_1 \left(\overline{B \left(\left(-\frac{1}{4}, 0\right), \frac{5}{4} \right) \setminus \{(1, 0)\}} \right); \\ \phi_1(\varphi(\phi_1^{-1}(z))), & \text{si } z \in \phi_1 \left(\overline{B \left(\left(-\frac{1}{4}, 0\right), \frac{5}{4} \right) \setminus \{(1, 0)\}} \right). \end{cases}$$

Comme c_1 et c_2 s’intersectent transversalement cette procédure diminue d’un le nombre de points d’intersection de c_1 et c_2 . Comme l’ensemble des points d’intersection de c_1 et c_2 est une partie discrète de S d’après la proposition 3.26 par récurrence on obtient une courbe c'_2 qui est isotope à c_2 et a intersection minimale avec c_1 . ■

Théorème 3.28 (Lemme 3.5 [Han99]). *Tout élément $c \in \mathbf{P}$ est isotope à une unique géodésique.*

Démonstration. D’après le théorème 3.4 et le théorème 3.13 la courbe c est proprement homotope à une unique géodésique γ dans \mathbf{P} et d’après le lemme 3.27 on peut supposer (à isotopie près) que c et γ ont intersection minimale. Nous allons démontrer ce théorème en deux étapes.

Étape 1 : on peut prouver que $c \cap \gamma = \emptyset$. En effet, soit \tilde{c} un relevé de c et $\tilde{\gamma}$ un relevé de γ . Montrons que $\tilde{c} \cap \tilde{\gamma} = \emptyset$. Sinon $|\tilde{c} \cap \tilde{\gamma}| \geq 1$ et si supposons que $|\tilde{c} \cap \tilde{\gamma}| \geq 2$, on peut recopier la preuve du cas compact, voir le lemme 2.21. Maintenant supposons que $|\tilde{c} \cap \tilde{\gamma}| = 1$, comme c et γ ont intersection minimale, donc \tilde{c} et $\tilde{\gamma}$ ont les mêmes extrémités dans S . Posons \tilde{D} l'une des composantes connexes de $\mathbb{H}^2 \setminus (\tilde{c} \cup \tilde{\gamma})$ dont l'adhérence dans $\mathbb{H}^2 \cup \mathbb{S}_\infty$ intersecte \mathbb{S}_∞ en un seul point. S'il existe $h \in \Gamma \setminus \{Id\}$ tel que $h\tilde{D} \cap \tilde{D} \neq \emptyset$, alors il existe \tilde{c}' un relevé de c et $\tilde{\gamma}'$ un relevé de γ tels que $|\tilde{c}' \cap \tilde{\gamma}'| \geq 2$. Donc pour tout $h \in \Gamma \setminus \{Id\}$ on a $h\tilde{D} \cap \tilde{D} = \emptyset$. Donc la projection $\pi(\tilde{D})$ de \tilde{D} est une composante connexe de $S \setminus (c \cup \gamma)$ homéomorphe à un disque. Ceci est une contradiction, parce c et γ ont intersection minimale. Donc $c \cap \gamma = \emptyset$.

Étape 2 : on prouve que c est isotope à γ . Comme c et γ sont homotopes et disjointes, posons \tilde{c} et $\tilde{\gamma}$ relevés de c et γ respectivement avec les mêmes extrémités dans \mathbb{S}_∞ . Notons \tilde{N} le domaine bordé par \tilde{c} et $\tilde{\gamma}$ et soit $N := \pi(\tilde{N})$. D'après le théorème 2.20 (respectivement le théorème de Schoenflies dans " \mathbb{R}^2 ") N est homéomorphe à un anneau compact $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ (respectivement ruban infini $\mathbb{R} \times [-1, 1]$). D'après le théorème 3.20 il existe un anneau compact (respectivement ruban infini) N' dans S tel que $N \subset N'$ et un homéomorphisme ϕ de N' à $\mathbb{S}^1 \times [-2, 2]$ (respectivement $\mathbb{R} \times [-2, 2]$) qui satisfait $\phi(\mathbb{S}^1 \times \{-1\}) = c$ et $\phi(\mathbb{S}^1 \times \{1\}) = \gamma$ (respectivement $\phi(\mathbb{R} \times \{-1\}) = c$ et $\phi(\mathbb{R} \times \{1\}) = \gamma$). Pour tout $z \in \mathbb{S}^1$ (respectivement $z \in \mathbb{R}$) nous définissons l'homéomorphisme $\varphi_z : [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$ par l'application linéaire par morceaux qui satisfait $\varphi_z(-2) = -2$; $\varphi_z(2) = 2$ et $\varphi_z(-1) = 1$. Donc soit $\varphi : \mathbb{S}^1 \times [-2, 2] \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [-2, 2]$ (respectivement $\varphi : \mathbb{R} \times [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R} \times [-2, 2]$) l'homéomorphisme défini par $\varphi(z, t) = (z, \varphi_z(t))$ et soit $h : S \rightarrow S$ l'homéomorphisme défini par :

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \notin N'; \\ \phi(\varphi(\phi^{-1}(x))), & \text{si } x \in N'. \end{cases}$$

Alors h est isotope à l'identité et satisfait $h(c) = \gamma$. ■

Théorème 3.29 (Lemme 3.5 [Han99]). *Soit P une collection localement finie d'éléments disjoints de \mathbf{P} qui sont isotopes à des géodésiques distinctes. Alors les éléments de P sont simultanément isotopes à des géodésiques, c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme $h : S \rightarrow S$, isotope à l'identité, tel que pour tout $c \in P$, $h(c)$ est une géodésique.*

Démonstration. Posons G la collection des géodésiques γ tels que γ est isotope à $c \in P$. Nous allons démontrer ce théorème en deux étapes.

Étape 1 : on peut supposer que $c \cap \gamma = \emptyset$ pour tout élément $c \in P$ et tout $\gamma \in G$. En effet, d'après le lemme 3.27, on peut supposer (à isotopie après) que P et G ont intersection minimale. On peut recopier la preuve du théorème 3.28.

Étape 2 : on prouve que C est isotope à G . D’après le théorème 3.28 pour tout élément $c \in P$ il existe un homéomorphisme $h_i : S \rightarrow S$ isotope à l’identité tel que $h_i(c) = \gamma$, où γ est la géodésique isotope à c . Remarquons que chaque h_i est l’identité en dehors d’un anneau compact ou d’un ruban infini, noté N'_i . D’après l’étape 1 et comme la collection P est localement finie on peut choisir les N'_i tels que $N'_i \cap N'_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Soit $h : S \rightarrow S$ l’homéomorphisme défini par :

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \notin \bigcup_{i \in I} N'_i; \\ h_i(x), & \text{si } x \in N'_i. \end{cases}$$

Alors d’après la proposition 3.26 h est un homéomorphisme isotope à l’identité et satisfait $h(c) = \gamma$ pour toute courbe $c \in P$. ■

Théorème 3.30 (Lemme 3.5 [Han99]). *Si P_1 et P_2 sont deux collections localement finies d’éléments disjoints de \mathbf{P} qui sont isotopes à des géodésiques distinctes. Si supposons que P_1 et P_2 ont intersection minimale, alors les éléments élément de P_1 et P_2 sont simultanément isotopes à des géodésiques, c’est-à-dire qu’il existe un homéomorphisme $h : S \rightarrow S$, isotope à l’identité, tel que pour tous éléments c_1 et c_2 de P_1 et P_2 respectivement, $h(c_1)$ et $h(c_2)$ sont géodésiques.*

Démonstration. D’après le théorème 3.29, la collection P_2 est isotope par h_2 à une collection de géodésiques, notée G_2 . Alors comme P_1 et P_2 ont intersection minimale, d’après le lemme 3.24 $h_2(P_1)$ et $h_2(P_2) = G_2$ ont intersection minimale. Donc on peut supposer (à isotope après) que tous les éléments de P_2 sont géodésiques. D’après le théorème 3.29, la collection P_1 est isotope par h_1 à une collection de géodésiques, notée G_1 . D’après le preuve du théorème 3.29 cette isotopie peut se faire avec une série d’étapes consistant à “pousser P_1 à travers un disque “plein” et avec une “extrémité fixée”” et une série d’étapes consistant à “pousser P_1 à travers un anneau compact” et “pousser P_1 à travers un ruban infini”, voir la démonstration du théorème 3.29. Il suffit de prouver que cette isotopie peut être choisie de façon à laisser invariante la collection P_2 .

“Pousser P_1 à travers un disque “plein” et avec une “extrémité fixée”. Supposons qu’il existe une composante connexe de $S \setminus (c_1 \cup \gamma_1)$ dont la frontière est l’union de deux intervalles $I_1 \subset c_1$ et $I_2 \subset \gamma_1$ est un disque topologique. On a deux cas si I_1 et/ou I_2 sont intervalles compacts, on peut recopier la preuve du cas compact, voir le théorème 2.23. Si supposons que les intervalles I_1 et I_2 sont infinis, (cas “pousser P_2 à travers un disque avec une “extrémité fixée””). Comme P_2 a intersection minimale avec P_1 (par hypothèses) et G_1 (d’après le lemme 3.24), on a que $P_2 \cap N$ est une collection localement finie d’intervalles que poussant N “de haut en bas”. Donc on peut choisir une collection localement finie de voisinages (fermés) D_i indexée par l’ensemble d’intervalles dans $P_2 \cap N$, tels que $D_i \cap D_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. D’après le théorème de Schoenflies considérons une collection de fonctions $\varphi_i : D_i \rightarrow D_i$ qui sont l’identité sur le bord de D_i et qui “redresse” les intervalles de $P_2 \cap N$, voir la figure 3.4. Alors cette isotopie peut être choisie de façon à laisser la collection C_2 invariant.

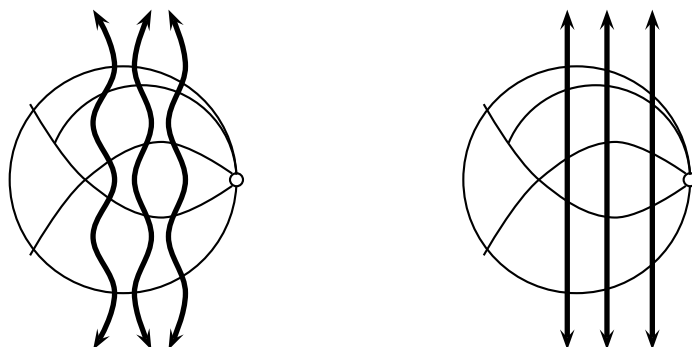


FIGURE 3.4 – Collection de fonctions de Schoenflies qui “redresse” les intervalles de $P_2 \cap N$.

“Pousser P_1 à travers un anneau compact” ou “pousser P_1 à travers un ruban infini”. Maintenant nous pouvons déplacer P_1 sur G_1 par un homéomorphisme $h : S \rightarrow S$ isotope à l’identité qui est l’identité en dehors d’une collection localement finie d’anneaux compacts et ruban infinis, noté-les $(N'_i)_{i \in I}$ homéomorphes à $\mathbb{S}^1 \times [-2, 2]$ ou $\mathbb{R} \times [-2, 2]$, notons par ϕ_i cet homéomorphisme, voir la démonstration du théorème 3.29. Si N'_i est homéomorphe à un anneau compact, on peut recopier la preuve du cas compact, voir le théorème 2.23. Comme P_2 a intersection minimale avec P_1 et G_1 , on a que $P_2 \cap N'_i$ est une collection localement finie des intervalles qui joignent les “deux composantes” de N'_i . Donc on peut choisir une collection localement finie de voisinages (fermés) D_i indexée par l’ensemble des intervalles dans $P_2 \cap N'_i$, tels que $D_i \cap D_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. D’après le théorème de Schoenflies considérons une collection de fonctions $\varphi_i : D_i \rightarrow D_i$ qui sont l’identité sur le bord de D_i et qui “redresse” les intervalles de $P_2 \cap N$, voir la figure 3.5. Alors cette isotopie peut être choisie de façon à laisser la collection P_2 invariante.

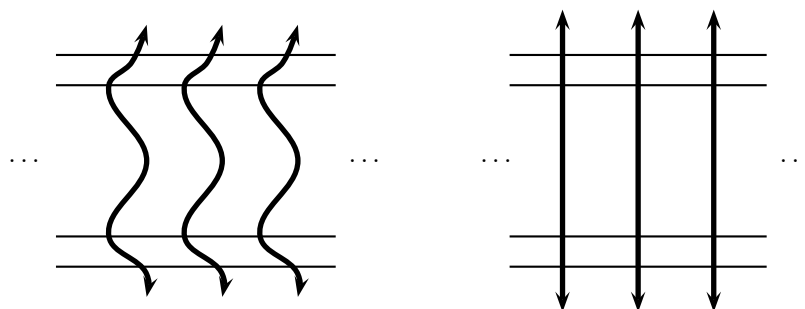


FIGURE 3.5 – Collection de fonctions de Schoenflies qui “redresse” les intervalles de $P_2 \cap N'_i$.

■

Bibliographie

- [Bea83] Alan F. Beardon. *The geometry of discrete groups*. Graduate Texts in Mathematics. 1983.
- [Beg07] F. Beguin, F. Le Roux. *Dynamique topologique sur les surfaces*. notes d'un cours de M2. disponible sur <http://www.math.jussieu.fr/lerouxf/recherche.htm>, 2007.
- [Cas88] Bleiler S. Casson, A. *Automorphisms of Surfaces after Nielson and Thurston*, volume 91 of *London Mathematical Society*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [Han99] Michael Handel. A fixed-point theorem for planar homeomorphisms. *Topology*, 38(2) :235–264, 1999.
- [Kat92] S. Katok. *Fuchsian Groups*. Chicago Lectures Mathematics. 1992.
- [LC06] Patrice Le Calvez. Une nouvelle preuve du théorème de point fixe de Handel. *Geom. Topol.*, 10 :2299–2349 (electronic), 2006.
- [LR12] F. Le Roux. *An introduction to Handel's homotopy Brouwer theory*. Superficies en Montevideo. disponible sur <http://www.math.jussieu.fr/lerouxf/recherche.htm>, March 2012.
- [Mat00] S. Matsumoto. Arnold conjecture for surface homeomorphisms. In *Proceedings of the French-Japanese Conference "Hyperspace Topologies and Applications" (La Bussière, 1997)*, volume 104, pages 191–214, 2000.
- [Rat94] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.