François Béguin, Frédéric Le Roux

DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE SUR LES SURFACES

Université Paris Sud, Laboratoire de mathématiques, Bat. 425,
91405 Orsay Cedex FRANCE.
E-mail : francois.beguin@math.u-psud.fr, frederic.le-roux@math.u-psud.fr

2007

DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE SUR LES SURFACES

François Béguin, Frédéric Le Roux

Résumé. — Un système dynamique discret est la donnée d'un ensemble S, appelé *espace d'états*, et d'une application $f : S \to S$, appelée *loi d'évolution.* L'orbite d'un point $x \in S$ est la suite $x, f(x), f^2(x), \ldots$, le point $f^n(x)$ étant vu comme l'état à l'instant n du système si on part de l'état initial x. Le but de la théorie des systèmes dynamiques est alors d'étudier le comportement des orbites des différents points de S (autrement dit, l'évolution du système pour les différents états initiaux possibles). Bien souvent, il est naturel de supposer que l'ensemble S est muni d'une structure supplémentaire (structure d'espace topologique, de variété différentielle, d'espace mesué) et que l'application f préserve cette structure. Ainsi, dans ce cours, S sera toujours une variété (topologique) et f un homéomorphisme de S.

Même dans ce cadre, une bonne partie des résultats que l'on arrive à prouver sont spècifique à une dimension donnée (autrement dit, ils supposent que la variété S est de dimension 1, 2, ou plus rarement 3). Ainsi, la théorie des systèmes dynamiques en dimension 1 est particulièrement développée, la plupart des résultats de cette théorie reposant sur le fait qu'une variété de dimension 1 admet toujours un ordre total (cas de $\mathbb{R}$ ou d'un intervalle) ou un ordre cyclique (cas du cercle). Le but de ce cours est de présenter les principales techniques d'étude des systèmes dynamiques topologiques en dimension 2, autrement dit les principales techniques d'étude de la dynamique des homéomorphismes des surfaces.

On s'intéressera à trois points de vue complémentaires sur la dynamique des homéomorphismes de surfaces :

1. la théorie des vecteurs de rotation, qui étudie la façon dont les orbites d'un homéomorphisme d'une surface S "tournent autour de S" ;
2. la théorie de Nielsen-Thurston, qui relie le comportement des orbites d'un homéomorphisme à l'action de cette homéomorphisme sur les classes d'homotopies de courbes fermées ;
3. la théorie de Brouwer, qui traite des homéomorphismes du plan sans point fixe.

On verra notamment comment les deux derniers points de vue éclairent le premier, en établissant des liens entre les vecteurs de rotation d'un homéomorphismes et les propriétés dynamiques de cet homéomorphisme.

Ces trois points de vue sont les points de départ de l'étude récente de John Franks et Michael Handel sur les actions de groupes discrets sur les surfaces, montrant en particulier que le groupe $SL(3,\mathbb{Z})$ ne peut pas agir de manière non-triviale sur une surface par difféomorphismes préservant l'aire.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DU COURS

Un exemple vaut mieux qu'un long discours, dit-on. Pour vous donner un avant-goût du contenu de ce cours, nous allons donc présenter un exemple de résultat qu'on y démontrera (théorème de Llibre-MacKay). Nous avons choisi ce résultat plutôt qu'un autre essentiellement parce que sa preuve fait intervenir chacune des trois théories que l'on étudiera dans le cours : la théorie de Nielsen-Thurston, la théorie de Brouwer, et la théorie des vecteurs de rotation des homéomorphismes du tore.

1.1. L'ensemble de rotation des homéomorphismes du tore

Le concept de vecteur de rotation généralise à certains homéomorphismes de surfaces la notion classique de nombre de rotation des homéomorphismes du cercle. Vers la fin des années 80, on a découvert des liens entre les vecteurs de rotation et les propriétés dynamiques.

> *Dynamique des homéomorphismes du cercle : un invariant fondamental, le nombre de rotation.* — Il y a maintenant 120 ans qu' H. Poincaré, étudiant le comportement qualitatif des solutions des équations différentielles sur le tore, a été conduit à définir le *nombre de rotation* d'un homéomorphisme f du cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ce nombre mesure la "vitesse moyenne à laquelle une orbite de f (c'est-à-dire une suite de la forme $z, f(z), f^2(z), \dots$) tourne autour du cercle". Il contient beaucoup d'information sur la dynamique de cet homéomorphisme ; rappelons simplement :
>
> 1. Le nombre de rotation est un rationnel irreductible $\frac{p}{q}$ si et seulement si il existe une orbite périodique de période q ;
> 2. s'il est irrationnel, alors la dynamique est semi-conjuguée à la rotation de même nombre de rotation (et même conjugué si l'homéomorphisme est un C^2-difféomorphisme).

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme du plan. Supposons que F commute aux translations entières :

$$F \circ \tau_{(1,0)} = \tau_{(1,0)} \circ F \text{ et } F \circ \tau_{(0,1)} = \tau_{(0,1)} \circ F$$

où $\tau_{\vec{v}}$ est la translation de vecteur $\vec{v}$ (la première commutation s'écrit donc aussi simplement $F(x+1, y) = F(x, y) + (0, 1)$). Alors F induit un homéomorphisme f du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, en effet

$$x - y \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow F(x) - F(y) \in \mathbb{Z}^2.$$

Réciproquement, soit f un homéomorphisme du tore. Supposons qu'on peut passer de l'identité à f par une famille continue d'homéomorphismes : on dit que f est *isotope à l'identité*. Alors f provient d'un homéomorphisme F du plan commutant aux translations entières (voir section 2.4).

Définition 1.1.1. — On dira qu'un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ est un *vecteur de rotation de F* si il existe un point x du plan tel que

$$\vec{v} = \lim_{n \to +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}.$$

Cette définition peut s'interpréter géométriquement. Relions le point x à son image $F(x)$ par un segment Γ_0. En concaténant les images successives par F de ce segment, on obtient une courbe

$$\Gamma_n = \Gamma_0 * F(\Gamma_0) * \cdots * F^{n-1}(\Gamma_0)$$

qui se projette dans le tore en une courbe γ_n reliant les images successives de l'orbite du projeté de x. Un vecteur de rotation de F traduit alors l'existence d'une orbite de f qui s'enroule autour de la topologie du tore.

L'un des buts de ce cours est de démontrer qu'un “gros” ensemble de rotation implique une dynamique “riche”.

***Théorème 1.1.2* (Llibre-MacKay, 1991).** — *Soit f un homéomorphisme du tore, isotope à l'identité. Supposons que l'enveloppe convexe de l'ensemble des vecteurs de rotation de F soit d'intérieur non vide.*

Alors

– *f possède une infinité d'orbites périodiques, de périodes arbitrairement grandes.* (1)

– *L'entropie topologique de f est strictement positive.*

L'entropie topologique est un invariant de conjugaison qui mesure “à quel point la dynamique écarte les points”. (2)

Exemples. — L'exemple modèle est bien sûr celui où F est une translation. On dit alors que f est une rotation du tore, c'est le produit de deux rotations du cercle. Il admet un unique vecteur de rotation, qui est le vecteur de translation de F.

Voici une famille d'exemples un peu plus substanciels. Considérons deux applications 1-périodiques $\Phi, \Psi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ telles que $\Phi(\mathbb{Z}) = \Psi(\mathbb{Z}) = 0$ et $\Phi(1/2 + \mathbb{Z}) = \Psi(1/2 + \mathbb{Z}) = 1$. Considérons alors l'homéomorphisme du plan $F = V \circ H$ où

$$H(x, y) = (x + \Phi(y), y) \quad \text{et} \quad V(x, y) = (x, y + \Psi(x)).$$

Puisque Φ et Ψ sont 1-périodique l'homéomorphisme F commutent aux translations entières, et induit donc un homéomorphisme f du tore. Quels sont les vecteurs de rotation de F ?

(1) En fait, on peut préciser l'énoncé du théorème en disant que tout vecteur de coordonnées rationnelles, inclus dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble de rotation, est réalisé par une orbite périodique de f.

(2) Très précisément, on dit que f est d'entropie topologique strictement positive si il existe $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout entier $n > 0$, il existe un ensemble fini E contenant plus de e^{Cn} points, et qui est (ε, n)-*séparé* : deux points quelconques x, y de E possèdent des itérés $f^j(x), f^j(y)$ à distance plus grande que ε, où l'entier j est compris entre 0 et n.

Tout d'abord $(0,0)$ est un point fixe de F, il nous donne donc un vecteur de rotation nul. On remarque ensuite que $F(1/2,0) = (1/2,1)$; par récurrence, on a donc $F^n(1/2,0) = (1/2,n)$ pour tout n ; ceci nous donne le vecteur de rotation $(0,1)$. On obtient de même le vecteur $(1,0)$ en partant du point $(0,1/2)$, et le vecteur $(1,1)$ en partant du point $(1/2,1/2)$. Notez que les projetés de ces quatres points dans le tore sont fixes par f (un point fixe de f peut avoir un vecteur de rotation non nul ! Ceci dépend en fait du choix du relevé F, voir l'exercice 2.4.3).

Les quatre coins du carré $[0,1]^2$ sont donc des vecteurs de rotations : le théorème précédent s'applique donc à cette famille d'exemples, et on obtient ainsi une infinité de points périodiques, et de l'entropie. Ceci ne semble pas facile à prouver directement...

Exercice 1.1.3. — Soient Φ, Ψ deux applications comme ci-dessus, on suppose que $\Phi = \Psi$ sont affines sur $[0,1/2]$ et sur $[1/2,1]$ (ceci donne un choix unique). Montrer que tout vecteur de rotation de F est inclus dans le carré $[0,1]^2$ (ainsi, ce carré coïncide avec l'enveloppe convexe de l'ensemble de rotation).

1.2. Les homéomorphismes de Brouwer

L'étude des ensembles de rotation sur les surfaces fait appel à deux types de techniques : d'une part la théorie de Nielsen-Thurston, d'autre part la théorie des homéomorphismes de Brouwer. Le point de départ de la théorie des homéomorphismes de Brouwer est le résultat suivant.

***Théorème* (Brouwer, 1912).** — *Soit h un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation*[(3)]*. Si h a une orbite périodique, alors h a un point fixe.*

Ce résultat se généralise : l'hypothèse sur l'existence d'une orbite périodique peut être remplacée par des formes plus faibles de récurrence (par exemple, existence d'un point non errant, ou d'une pseudo-orbite périodique). On peut le voir comme une version du théorème de Poincaré-Bendixson pour les systèmes dynamiques à temps discret.

Comment ce théorème peut-il intervenir dans l'étude d'un homéomorphisme f sur une surface S quelconque ? On considère le revêtement universel $\tilde{S}$ de S ; la plupart du temps, $\tilde{S}$ est homéomorphe au plan. D'autre part, on peut relever f en un homéomorphisme de $\tilde{S}$. Dans certaines situations, en appliquant le théorème précédent, on pourra trouver un point fixe de $\tilde{f}$, et donc aussi un point fixe de f.

En particulier, considérons un homéomorphisme f du tore comme dans le théorème 1.1.2 ci-dessus, provenant d'un homéomorphisme F du plan (qui "relève" f). Si le vecteur $(0,0)$ est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe des vecteurs de rotation de F, alors on montrera à l'aide du théorème 1.2 que F a un point fixe, ce qui donnera *a fortiori* un point fixe pour f et un morceau du théorème 1.1.2.

1.3. La théorie de Nielsen-Thurston

La théorie de Nielsen-Thurston établit un lien surprenant entre les propriétés homotopiques d'un homéomorphisme de surface et ses propriétés dynamiques.

(3) *cf.* définition 2.1.2.

***Théorème 1.3.1* (Nielsen, Thurston 1976 ?).** — *Soit f un homéomorphisme d'une surface S compacte, sans bord. Supposons que f posséde la propriété suivante :*
pour toute courbe fermée γ essentielle, et pour tout entier $n \neq 0$, la courbe $f^n(\gamma)$ n'est pas homotope à γ.
Alors f est d'entropie topologique strictement positive, et possède des points périodiques de périodes arbitrairement grande.

Deux courbes fermées sont *homotopes* si on peut passer continûment de l'une à l'autre. Une courbe fermée *essentielle* est une courbe qui ne peut pas être déformée continûment en un point[(4)]. Un homéomorphisme vérifiant les hypothèses de ce théorème sera dit *de type d'isotopie pseudo-Anosov* (on justifiera ce vocabulaire plus tard).

Comparons cet énoncé avec le théorème 1.1.2 sur les vecteurs de rotation dans le tore. Les conclusions sont identiques : une dynamique riche, caractérisée par l'existence d'orbites périodiques et la présence d'entropie. Par contre, les hypothèses peuvent sembler très différentes : en effet, pour l'homéomorphisme f isotope à l'identité du théorème 1.1.2, toute courbe est homotope à son image par f ; en un certain sens, le théorème 1.3.1 concerne les homéomorphismes qui sont "le moins possible isotopes à l'identité". Comment peut-on appliquer la théorie de Nielsen-Thurston à la situation du théorème 1.1.2 ?

Sous les hypothèses de ce théorème, on montrera d'abord (par la théorie de Brouwer) que f admet des orbites périodiques. On trouvera ainsi un ensemble fini E, réunion d'orbites périodiques de f, tel que la restriction de f à la surface ouverte $S \setminus E$ ne soit plus isotope à l'identité (ceci revient à ne considérer que des isotopies qui fixent chaque point de E), et vérifie même les hypothèses du théorème 1.3.1.[(5)]

Ce théorème est bien sûr vide sur la sphère. Il est assez facile à montrer sur le tore (cf chapitre 3), cadre qui sert de modèle-jouet à la théorie. Il devient vraiment intéressant sur les surfaces de genre plus grand, comme le tore à deux trous.

Exemples. —

1. Soit A l'automorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (parfois appelé *chat d'Arno'ld*). L'application A passe au quotient $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ en un homéomorphisme f_A. On verra au chapitre 3 que f_A vérifie les hypothèses du théorème, et que tout homéomorphisme isotope à f_A lui est semi-conjugué ("possède au moins autant de dynamique que f_A").
2. En "éclatant" le point fixe de A, on le remplace par un cercle, et on obtient ainsi un exemple d'homéomorphisme pseudo-Anosov sur le tore privé d'un disque, qui est une surface à bord.
3. Sur le tore à deux trous, on peut obtenir des exemples explicites d'homéomorphismes vérifiant l'hypothèse du théorème, par exemple en composant des twists de Dehn.

1.4. Références

a. Systèmes dynamiques. — (y compris nombres de rotation sur le cercle).

– Milnor, *Introductory lectures*, disponible sur le Net.

---

(4) *cf.* section 2.2.a.

(5) Bien sûr, il faudra remédier à la non compacité de $S \setminus E$: on se ramènera en fait à des surfaces à bord, auxquelles on peut généraliser le théorème 1.3.1.

– Pollicott- Yuri, *Dynamical Systems and Ergodic Theory.*

b. Nombres de rotation sur le tore. —

– Misiurewicz, Michał ; Ziemian, Krystyna Rotation sets for maps of tori. *J. London Math. Soc.* (2) **40** (1989), no. 3, 490–506.

c. Théorie de Nielsen-Thurston. —

– Casson, Andrew ; Bleiler, Steven *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston.*
– Fathi, Laudenbach, Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, 66-67 (1979), SMF Paris.
– Handel, Michael ; Thurston, William P. New proofs of some results of Nielsen. *Adv. in Math.* **56** (1985), no. 2, 173–191.
– Thurston, William P. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **19** (1988), no. 2, 417–431.

d. Théorie de Brouwer. —

– *Around Brouwer ?s theory of fixed point free planar homeomorphisms*, Marc Bonino (http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ECOLETE/ecole2006/, Notes de cours).

CHAPITRE 2

TOPOLOGIE DES SURFACES

Ce chapitre présentent les éléments de base de topologie des surfaces ; *la plupart des résultats seront admis.*

2.1. Topologie des surfaces

Dans cette partie, nous rappelons, pour mémoire, la définition et la classification des surfaces compactes orientables. Une fois la liste établie, on pourra oublier la définition abstraite et considérer la liste comme une définition.

a. Définitions. —

Définition 2.1.1. — Une *surface sans bord* est un espace topologique S tel que tout point de S admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.[(1)]

Une *surface à bord* est un espace topologique séparé S tel que tout point de S admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ ou à $[0, +\infty[\times\mathbb{R}$.

Nos surfaces seront toujours supposées connexes. Le bord d'une surface a bord est l'ensemble ∂S des points qui n'admettent pas de voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. Il s'agit d'une variété de dimension 1, chacune de ses composantes connexes est homéomorphe à la droite $\mathbb{R}$ ou au cercle $\mathbb{S}^1$ (d'après la classification des variétés topologiques de dimension 1).

Définition 2.1.2. — Une surface est dite *orientable* si elle ne contient pas de sous-espace homéomorphe au ruban de Möbius $[0, 1] \times [-1, 1]/(0, y) \sim (1, -y)$.

Il existe une définition plus naturelle (mais plus longue !) de l'orientabilité. [(2)]

[(1)] Pour bien faire, il vaudrait mieux ajouter que S est séparée et réunion dénombrable de parties compactes. Dans ce cours, nous considérerons principalement des surfaces compactes, ou bien des surfaces qui sont des ouverts de surfaces compactes ; ces propriétés seront donc toujours vérifiées.

[(2)] Soit S une surface connexe ; on considère l'espace des plongements du disque fermé $\bar{\mathbb{D}}^2$ dans la surface, muni de la topologie de la convergence uniforme (un plongement est une application continue injective). On montre alors que cet espace a au plus deux composantes connexes. S'il n'en a qu'une seule, on dit que la surface n'est pas orientable ; c'est le cas du ruban de Moebius. S'il en a deux, alors la surface est dite orientable, et chacune des composantes connexes définit une orientation de S. Étant donnée une orientation définie par un plongement $i : \bar{\mathbb{D}}^2 \to S$, l'orientation opposée peut être définie par le plongement $i \circ s$, où s est une symétrie du disque $\bar{\mathbb{D}}^2$ (ou tout homéomorphisme de $\bar{\mathbb{D}}$ renversant l'orientation. On montre que cette définition d'orientabilité est équivalente à l'absence de ruban de Moebius plongé dans la surface.

Exemples. — La sphère, le tore, le tore à n trous sont des surfaces compactes, connexes, sans bord. Le tore à 2 trou peut être défini proprement par recollement d'un octogone... Le nombre de trous s'appelle le *genre* de la surface : la sphère est de genre 0, le tore est de genre 1, *etc.*. On notera souvent S_g la surface de genre g.

b. Classification des surfaces compactes. —

Théorème 2.1.3. — *Toute surface sans bord, orientable, compacte et connexe, est homéomorphe à l'une des surfaces de genre g ($g \geq 0$).*

En particulier, ce théorème montre que toute surface compacte orientable abstraite peut se plonger dans $\mathbb{R}^3$, et admet une structure différentiable. On verra plus loin qu'elle admet aussi une bonne structure géométrique.

Idée de démonstration. — La première tentative de preuve remonte à Camille Jordan (*Sur la déformation des surfaces*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 1866). Il considère une surface à bord, compacte et orientable ; son idée consiste à choisir une courbe fermée simple qui ne déconnecte pas la surface, à découper la surface selon cette courbe, puis à recommencer avec la nouvelle surface ainsi obtenue. Le processus s'arrête lorsque qu'il n'existe plus de courbe fermée simple qui ne déconnecte pas la surface. Jordan affirme alors que cette dernière surface est homéomorphe au disque, ce qui lui permet, par recollements, de conclure que la topologie de la surface initiale ne dépendait que du nombre de composantes du bord et du nombre découpages effectués.

Bien sûr, chez Jordan, la notion de surface topologique n'est pas bien définie, en particulier l'orientabilité est uniquement implicite(3) , et deux surfaces sont considérées comme semblables si "*elles sont applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature*", ou encore si "*on peut les décomposer en éléments infiniment petits, de telle sorte qu'à des éléments quelconques contigus de S correspondent des éléments contigus de S'*". En ce qui concerne la caractérisation finale du disque, on peut dire que Jordan est essentiellement passé à côté des (difficiles) problèmes posés par la preuve de ce résultat. Par contre, sa technique de réduction au cas du disque par découpages successifs me semble essentiellement valide, c'est-à-dire transformable à peu de frais en une preuve au sens actuel du terme.

Pour une preuve plus raisonnable, voir Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3* ; voir aussi la fin de l'article récent de Larry Siebenmann, *The Osgood-Schoenflies theorem revisited*, Russain math. survey **60** (4), 2005. On commence par montrer la densité des homéomorphismes affines par morceaux ("PL") dans les homéomorphismes. Ceci permet de prouver que toute surface compacte est *triangulable*, c'est-à-dire homéomorphe à un complexe simplicial (espace topologique obtenu en recollant des triangles le long de leurs bords). Tout complexe simplicial peut être vu comme obtenu à partir d'un polygone du plan en recollant les côtés par pairs, comme dans la construction du tore à deux trous ci-dessus. La preuve devient alors combinatoire, elle consiste à montrer qu'on peut modifier la présentation de façon à se ramener une présentation connue.

Le résultat d'approximation par des homéomorphismes PL découle de la version affine par morceaux du théorème de Schoenflies : tout polygone du plan peut être envoyé sur un triangle par un homéomorphisme du plan affine par morceaux. La construction d'une triangulation à partir du

---

Cette définition a l'avantage d'admettre immédiatement une action naturelle des homéomorphisme : étant donnée une surface orientable, un homéomorphisme f agit sur l'espace des plongements par $i \mapsto f \circ i$; on dit que f préserve ou renverse l'orientation selon que f préserve ou échange les deux composantes connexes de l'espace des plongements.

(3)L'existence de surfaces non orientables a été découverte simultanément par Mobius et Listing en 1858, et publié en 1861 par Listing, et en 1863 par Mobius ; on peut penser que Jordan ne connaissait pas encore ces objets.

résultat d'approximation est valable en toute dimension (voir la présentation concise de Siebenmann *via* les structures PL). On peut ainsi trianguler les variétés de dimension trois en établissant le résultat d'approximation dans ce cadre. Par contre, les variétés topologiques de dimension 4 ne sont pas toutes triangulables. □

Corollaire 2.1.4. — *Toute surface compacte à bord est homéomorphe à*

$$S_g \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_k)$$

où S_g est la surface de genre $g \geq 0$, et les D_i sont des intérieurs de parties de S_g, deux à deux disjointes, homéomorphes au disque fermé.

Exemple : disque, anneau, pantalon, et le tore à un trou qui est une autre façon d'épaissir un bouquet de deux cercles.

c. Caractéristique d'Euler. — Soit S une surface triangulée, c'est-à-dire obtenue en recollant des triangles le long de leurs bords. On associe à cette triangulation le nombre

$$\chi = n_0 - n_1 + n_2$$

où n_0, n_1, n_2 sont respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de triangles de la triangulation.

Théorème. — *Le nombre χ est un invariant topologique : sur une surface donnée S, toutes les triangulations donne le même nombre. Pour une surface compacte sans bord, $\chi = 2 - 2g$ où g est le nombre de trous (le genre).*

Ce nombre est appelé *caractéristique d'Euler* (ou d'Euler-Poincaré) de la surface S. Pour une surface à bord, on retire le nombre de disques enlevés.

On rappelera plus loin le lien avec la géométrie (théorème de Gauss-Bonnet), et le lien avec les zéros de champs de vecteurs (théorème de Poincaré-Hopf).

2.2. Topologie algébrique des surfaces

a. Homotopie et homologie. — On se donne une surface S. Soient γ_0, γ_1 deux courbes dans S, c'est-à-dire deux applications continues de $\mathbb{S}^1$ dans S. On dit qu'elles sont *homotopes* si on peut passer continûment de l'une à l'autre : autrement dit, s'il existe une application continue $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to S$ telle que $H(.,0) = \gamma_0$ et $H(.,1) = \gamma_1$. Plutôt que d'utiliser l'application H, on notera souvent $\gamma_t = H(.,t)$ (et on dira simplement : "soit $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}$ une homotopie de courbes").

Si l'application H est injective, son image est un anneau plongé dans la surface S. Quand ça n'est pas le cas, on peut penser à $H(\mathbb{S}^1 \times [0,1])$ comme à un anneau "écrasé". Les deux courbes forment le bord de cet anneau. On obtient la notion d'homologie en remplaçant l'anneau de la définition précédente par une surface quelconque. Plus précisément, on considère les surfaces orientées S_0 dont le bord est formé de deux composantes connexes. L'orientation de la surface S_0 induit une orientation sur son bord ; on choisit alors un paramétrage $i_0 : \mathbb{S}^1 \to S_0$ de la première composante dans le sens positif, et un paramétrage i_1 de la seconde dans le sens négatif. Les deux courbes γ_0, γ_1 sont dites *homologues* s'il existe S_0, i_0, i_1 comme ci-dessus, et une application continue $H : S_0 \to S$ telle que $H \circ i_0 = \gamma_0$ et $H \circ i_1 = \gamma_1$.

Cette définition se généralise immédiatement aux *cycles*, qui sont les sommes formelles de courbes

$$a_1\gamma_1 + \cdots + a_k\gamma_k,$$

où les γ_i sont des courbes et les a_i des entiers. En particulier, ce cycle est dit *homologue à* 0 s'il existe une surface orientée S_0 et une application continue $H : S_0 \to S$ dont la restriction au bord orienté de S_0 est égale à la réunion de a_1 copies de γ_1, a_2 copies de γ_2, *etc.* (après identification de chaque composante connexe avec $\mathbb{S}^1$). On peut maintenant définir le premier groupe d'homologie de S, $H_1(S, \mathbb{Z})$, comme étant l'ensemble des cycles modulo les cycles homologues à 0. Autrement dit, on identifie deux courbes (ou deux cycles) si elles sont homologues, c'est-à-dire si leur différence formelle est homologue à 0. Plus formellement, on appelle $C_1(S, \mathbb{Z})$ l'ensemble des sommes formelles de cycles, [4] muni de sa structure de $\mathbb{Z}$-module ; le sous-ensemble $B_1(S, \mathbb{Z})$ des cycles homologues à 0 est un sous-$\mathbb{Z}$-module, et $H_1(S, \mathbb{Z})$ est le quotient $C_1(S, \mathbb{Z})/B_1(S, \mathbb{Z})$.

Le groupe d'homologie à coefficient réels, $H_1(S, \mathbb{R})$, est défini de façon tout à fait analogue. Il s'agit d'un espace vectoriel réel. Bien sûr, toutes ces définitions sont en fait valables dans tout espace topologique (on n'a pas utilisé le fait que S est une surface).

Exercice 2.2.1. — Montrer que tout cycle est homologue à une courbe (tout élément du H_1 est représenté par une courbe).

Exercice 2.2.2. — Dessiner deux courbes homotopes, mais qui ne bordent pas un anneau plongé. Sur la surface à deux trous, dessiner une courbe qui est homologue à 0 sans être homotope à une courbe constante. En déduire deux courbes qui sont homologues mais non homotopes.

Remarque. — On peut montrer que le groupe H_1 est l'abéliannisé du groupe fondamental (c'est-à-dire le quotient de ce dernier par le sous-groupe normal engendré par les commutateurs).

b. Homologie des surfaces. — Le théorème suivant décrit l'homologie des surfaces compactes orientables sans bords.

Théorème 2.2.3. —

1. *Le $\mathbb{Z}$-module $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$, une base est donnée par les deux courbes $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ définies par*
$$\gamma_1(t) = (t, 0) \text{ et } \gamma_2(t) = (0, t).$$
2. *Plus généralement, si S_g est la surface de genre g, le $\mathbb{Z}$-module $H_1(S_g, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{2g}$, une base est donnée par les courbes dessinées ci-dessous.*

DESSIN.

Idée de démonstration. — Montrons que cette famille est génératrice. Sur le tore, toute courbe est homotope, et *a fortiori* homologue, à la courbe $p\gamma_1 + q\gamma_2$ (voir exercice 2.4.2).

Pour $S_g, g > 1$, on découpe la surface par la courbe verticale milieu γ. On voit facilement que tout cycle est une somme de courbes disjointes de γ. On est alors ramené au cas d'une courbe disjointe de γ, donc incluse dans l'une des deux composantes connexes du

[4] On peut définir $C_1(S, \mathbb{Z})$ comme l'ensemble des applications de l'ensemble des cycles dans $\mathbb{Z}$, qui prennent la valeur 0 sauf pour un nombre fini de cycles.

complémentaire ; en remplaçant l'autre composante par un disque, on peut utiliser le cas du tore.

Pour la liberté, c'est beaucoup moins facile : il s'agit essentiellement de montrer que le nombre algébrique d'intersections de deux courbes est un invariant d'homologie. Ceci implique ensuite facilement la liberté (par exemple dans le tore : le cycle $p\gamma_1 + q\gamma_2$ a un nombre d'intersection avec γ_1 égal à q, et avec γ_2 égal à p ; si ce cycle est homologue à 0, et si le nombre d'intersection est un invariant d'homologie, alors $p = q = 0$). □

2.3. Topologie algébrique des homéomorphismes de surfaces

Soit f une application continue de la surface S dans elle-même. Elle agit naturellement sur les courbes par $f_* : \gamma \mapsto f \circ \gamma$, et donc aussi sur les sommes formelles de courbes, en un morphisme de $\mathbb{Z}$-module. Il est clair que l'application f_* préserve l'ensemble des cycles homologues à 0, elle induit donc une application notée encore f_* de $H_1(S, \mathbb{Z})$ dans lui-même. Si f est un homéomorphisme, l'application f_* est inversible, c'est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-module. En particulier, le théorème 2.2.3 permet d'identifier l'application f_* induite par un homéomorphisme de S_g avec un élément de $GL(2g, \mathbb{Z})$, c'est-à-dire une matrice à coefficients entiers et de déterminant ± 1.

Est-ce que cette construction algébrique est efficace ? Autrement dit, permet-elle de distinguer des homéomorphismes différents ? Pour répondre à cette question, il faut d'abord préciser ce qu'on entend par "différent". On dit que deux homéomorphismes $f_0, f_1 : S \to S$ sont *homotopes* si on peut passer continûment de l'un à l'autre par une famille d'applications continues : autrement dit, s'il existe une application continue $H : S \times [0, 1] \to S$, appelée homotopie, telle que $H(., 0) = f_0$ et $H(., 1) = f_1$. Il est clair que si f_0 et f_1 sont homotopes, pour toute courbe γ, les courbes $f_0(\gamma)$ et $f_1(\gamma)$ sont homotopes, et donc *a fortiori* homologues ; et par conséquent les applications f_{0*} et f_{1*} coïncident. On pourrait alors espérer une réciproque : est-ce que l'action en homologie distingue les homéomorphismes non homotopes ? C'est bien se qui se passe sur le tore, mais ça n'est malheureusement pas le cas en genre supérieur.

Exercice 2.3.1. — Décrire un homéomorphisme f de S_2 qui n'est pas isotope à l'identité, mais qui induit une application f_* qui est l'identité en homologie. *Indication : considérer un* twist de Dehn *autour d'une courbe homologue à* 0 *mais non homotope à* 0. *(le* twist de Dehn *est l'homéomorphisme de l'anneau* $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ *donné par* $(x, y) \mapsto (x + y, y)$.

Cette constatation est importante, car elle explique en partie pourquoi la situation sera beaucoup plus compliquée en genre supérieur : sur le tore, on peut se contenter de l'action en homologie (et donc faire de l'algèbre linéaire) ; en genre supérieur, il faut renoncer à la notion de courbes homologues et la remplacer par la notion plus fine de courbes homotopes. Le théorème suivant montre que l'action sur les classes d'homotopies de courbes distingue des homéomorphismes non homotopes, et même non *isotopes*. Deux homéomorphismes $f_0, f_1 : S \to S$ sont dits *isotopes* si on peut passer continûment de l'un à l'autre *par une famille d'homéomorphismes*, autrement dit, s'ils sont homotopes *via* une homotopie H, appelée alors *isotopie*, telle que pour tout $t \in [0, 1]$, l'application $H(., t)$ est un homéomorphisme de S. Le théorème montre ne particulier que pour les surfaces, deux homéomorphismes homotopes sont isotopes.

***Théorème 2.3.2* (Epstein).** — *Soit S une surface compacte, sans bord. Supposons que l'homéomorphisme $f : S \to S$ agisse trivialement sur les classes d'homotopie, c'est-à-dire que pour toute courbe γ, la courbe image $f \circ \gamma$ est homotope à γ. Alors f est isotope à l'identité.*

Démonstration. — Voir l'article d'Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies.* Acta Math. **115** (1966) 83–107. Notons qu'il existe aussi une version pour les surfaces à bord. □

2.4. Revêtements et relevés des applications

Une des méthode d'étude de la dynamique d'un homéomorphisme f de surface consiste à considérer un relevé F de f au revêtement universel de la surface. On a déjà vu, dans le chapitre introductif, l'exemple du tore : son revêtement universel est l'application de passage au quotient $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\ \mathbb{Z}^2$; tout homéomorphisme f, isotope à l'identité, provient par passage au quotient d'un homéomorphisme F du plan ; on peut étudier la dynamique de f à partir de celle de F en se souvenant de l'action du groupe fondamental du tore par les translations entières du plan.

a. Définition, propriété de relèvement. — Voici la définition générale. [5] Une application $p : \tilde{X} \to X$ est appelée *revêtement* si elle vérifie la propriété suivante, dite de “trivialité locale” : tout point x de X, admet un voisinage U (dit *trivialisant*), tel que

1. l'image inverse $p^{-1}(U)$ peut s'écrire comme la réunion disjointe d'ensembles $\{\tilde{U}_i, i \in I\}$,
2. chaque restriction $p_{|\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \to U$ est un homéomorphisme.

En particulier, p est alors un homéomorphisme local (la réciproque est fausse). Un revêtement universel est un revêtement tel que $\tilde{X}$ est simplement connexe (sous les bonnes hypothèses, le revêtement universel est essentiellement unique).

Les *automorphismes du revêtement* sont les homéomorphismes $\tau : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tels que $p = p \circ \tau$. Le groupe des automorphismes du revêtement universel s'identifie avec le groupe fondamental de X.

Nous utiliserons souvent la propriété suivante de relèvement des applications.

Proposition 2.4.1. — *Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement. Soit $f : Y \to X$ une application continue. Soit Y un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs. Supposons que Y est simplement connexe.* [6] *Alors il existe une application continue $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ qui* relève *f, au sens où $p \circ \tilde{f} = f$.*

Une telle application est unique si on impose la relation $\tilde{f}(y) = \tilde{x}$, où y est un point donné de Y et $\tilde{x}$ un relevé donné de $f(y)$ (c'est-à-dire $\tilde{x} \in p^{-1}(f(y))$).

Cette proposition va nous permettre de relever les courbes, les homotopies de courbes, les homéomorphismes, et les homotopies entre homéomorphismes. Pour la fin de cette section, on considère un revêtement $p : \tilde{X} \to X$ (on peut avoir en tête le cas du tore).

[5] Pour la définition des revêtements et du groupe fondamental, voir par exemple le livre de Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, ou celui de Hatcher, *Algebraic Topology*, disponible sur le Net (la traduction anglaise de “revètement” est “covering space”).

[6] Ou plus généralement que l'image par f du groupe fondamental de Y est triviale ; ou, plus généralement encore, que cette image est incluse dans l'image par p du groupe fondamental de $\tilde{X}$.

b. Relevés d'une courbe. — Soit $\gamma : \mathbb{S}^1 \to X$ une application continue. Il existe une application continue $\Gamma : \mathbb{R} \to \tilde{X}$, dite *relevée* de γ, telle que $p \circ \Gamma = \gamma \circ p$ (on a noté abusivement p les deux revêtements de X et de $\mathbb{S}^1$).

Soit $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}$ une homotopie de courbes. Fixons un relevé Γ_0 de la courbe γ_0. Alors il existe une unique application continue $(\tilde{\Theta}, t) \mapsto \Gamma_t(\tilde{\Theta})$ telle que chaque Γ_t relève la courbe γ_t.

Supposons maintenant que $p : \tilde{X} \to X$ est le revêtement universel (par exemple $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$). Soit γ une courbe de X ; comment décrire l'ensemble des relevés Γ de γ à partir d'un relevé particulier Γ_0 ? Il suffit de faire agir le groupe fondamental : autrement dit, l'ensemble des relevés de γ coïncide avec l'ensemble des applications $\tau \circ \Gamma_0$, où τ est un automorphisme du revêtement.

c. Relevés d'un homéomorphisme. — Soit $f : X \to X$ un homéomorphisme. Il existe alors un homéomorphisme $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ qui *relève* f, au sens où $f \circ p = p \circ \tilde{f}$. Un tel relevé est unique si on se donne deux points $\tilde{x}, \tilde{y}$ de $\tilde{X}$ tels que $f(p(\tilde{x})) = p(\tilde{y})$ et si on impose la relation $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{y}$. La relation liant f et $\tilde{f}$ est appelée semi-conjugaison ; en particulier, la même relation lie les puissances de $\tilde{f}$ et de f : l'homéomorphisme $\tilde{f}^n$ est un relevé de l'homéomorphisme f^n.

Une façon particulière d'obtenir un relevé d'un homéomorphisme consiste à relever une isotopie : si $(f_t)_{t\in[0,1]}$ est une isotopie dans X, avec $f_0 = \mathrm{Id}$, alors il existe une unique isotopie $(\tilde{f}_t)_{t\in[0,1]}$ dans $\tilde{X}$ avec $\tilde{f}_0 = \mathrm{Id}$, telle que chaque homéomorphisme $\tilde{f}_t$ relève l'homéomorphisme f_t. En particulier, l'homéomorphisme $\tilde{f}_1$ est un relevé de f_1 ; on dira qu'il est obtenu en relevant l'isotopie (f_t).

L'ensemble des relevés de l'identité coïncide avec le groupe des automorphismes du revêtement (par définition).

d. Exercices. —

Exercice 2.4.2. — En utilisant le relèvement des applications, montrer que toute courbe du tore est homotope à une des courbes $t \mapsto p(t(m, n))$ où (m, n) est un point du plan à coordonnées entières, et p le revètement universel du tore. En utilisant la description du H_1 du tore, en déduire que, dans le tore, deux courbes homologues sont homotopes. Ainsi, les classes d'homotopie de courbes sont décrites par les couples d'entiers ; géométriquement, ces entiers indiquent le nombre de tours effectués par la courbe dans les direction horizontales et verticales. Décrire l'ensemble des relevés de la courbe $(1, 0)$.

Exercice 2.4.3. —

1. Quels sont les homéomorphismes du plan qui relèvent l'identité du tore ? En déduire une expression de l'ensemble des relevés d'un homéomorphisme f du tore, à partir d'un relevé particulier F.
2. Montrer que si f est isotope à l'identité, alors ses relevés commutent avec les translations entières. *Indication : relever l'isotopie.*
3. (Généralisation) Soit f un homéomorphisme du tore, pas forcément isotope à l'identité, soit $\tilde{f}$ un relevé de f, soit f_* l'élément de $GL(2, \mathbb{Z})$ donné par l'action en homologie. Montrer la relation : pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $z \in \mathbb{Z}^2$,
$$\tilde{f}(x + z) = \tilde{f}(x) + f_*(z).$$
Autrement dit, on peut voir f_* comme indiquant le défaut de commutation des relevés de f avec les translations entières.

4. En déduire que l'application $\tilde{f} - f_*$ est $\mathbb{Z}^2$-périodique, et donc bornée.

Exercice 2.4.4. —

1. Vérifier que les affirmations concernant les relevés d'homéomorphismes et d'isotopies découlent bien de la proposition 2.4.1.
2. Démontrer la proposition. *Indication : la preuve consiste essentiellement à relever les chemins, c'est -à-dire les application continues de* $[0,1]$ *dans* X.

e. Unicité du relevé. — La notion d'isotopie conduit à s'interroger sur la topologie de l'espace des homéomorphismes d'une surface S. Notons par exemple $\mathrm{Homeo}(\mathbb{T}^2)$ l'espace des homéomorphismes du tore, muni de la topologie de la convergence uniforme. L'ensemble des homéomorphismes isotopes à l'identité correspond alors à la composante connexe par arcs de l'identité dans l'espace $\mathrm{Homeo}(\mathbb{T}^2)$; on la note souvent $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$. Étant donné un homéomorphisme $f \in \mathrm{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$, donnons nous une isotopie H de f à l'identité, et notons $\tilde{f}$ le relevé de f obtenu en relevant l'isotopie H. *Est-ce que* $\tilde{f}$ *dépend du choix de l'isotopie* H *?*

On voit facilement que la réponse est "oui" : en fait, f possède de nombreux relevés (voir la question 1 de l'exercice 2.4.3), qui peuvent tous être obtenus de cette manière. Ceci vient du fait que l'espace $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ n'est pas simplement connexe (il a le type d'homotopie du tore $\mathbb{T}^2$).

Ici, les choses changent quand on remplace le tore par la surface S_g de genre $g \geq 2$. En effet, l'espace $\mathrm{Homeo}_0(S_g)$ des homéomorphismes de S_g isotopes à l'identité est simplement connexe, et même contractile. En conséquence, *pour chaque* $f \in \mathrm{Homeo}_0(S_g)$*, il existe un unique relevé* $\tilde{f}$*, au revêtement universel de la surface* S_g*, obtenu en relevant une isotopie de l'identité à* f*.*

Exercice 2.4.5. — Pour $f_1 = \mathrm{Id}$, donner une isotopie (f_t) de l'identité à f_1 telle que le relevé $\tilde{f}_1$ obtenu en relevant l'isotopie soit la translation de vecteur $(0,1)$.

CHAPITRE 3

ISOTOPIE ET DYNAMIQUE SUR LE TORE

Ce chapitre sert de cadre-jouet à la théorie de Thurston : la classification que l'on obtient est tout à fait analogue à celle qui existe sur les surface de genre supérieur, mais les preuves sont très élémentaires. Les résultats de ce chapitre ne seront pas réuilisés par la suite.

3.1. Classes d'isotopie sur $\mathbb{T}^2$

Comme au chapitre précédent, on note f_* l'élément de $GL(2,\mathbb{Z})$ induit par l'action en homologie d'un homéomorphisme f du tore. On notera encore f_* cet élément vu comme une application linéaire du plan.

Proposition 3.1.1. — *L'application $f \mapsto f_*$, qui associe à tout homéomorphisme du tore son action en homologie, induit une bijection entre les classes d'isotopies d'homéomorphismes du tore et $GL(2,\mathbb{Z})$.*

Il s'agit même d'un isomorphisme de groupes...

Démonstration. — Il est clair (et il a déjà été mentionné) que deux homéomorphismes isotopes induisent la même action en homologie. Il reste à voir que si f_* est l'identité, alors f est isotope à l'identité. Ceci est un cas particulier du théorème d'Epstein (théorème 2.3.2). □

3.2. Classification des homéomorphismes linéaires

Soit $A \in GL(2,\mathbb{Z})$, on voit A comme une application linéaire inversible du plan. Cette application préserve le réseau $\mathbb{Z}^2$, elle induit donc un homéomorphisme du tore, que nous noterons f_A. Notons que A est alors l'unique relevé de f_A fixant 0 (voir la proposition 2.4.1), et que $f_{A*} = A$.

On se restreint aux éléments de $SL(2,\mathbb{Z})$, c'est-à-dire ceux de déterminant 1 : les homéomorphismes f_A préservent alors l'orientation. Le discriminant du polynôme caractéristique de A est alors $\Delta = \mathrm{Tr}(A)^2 - 4$, et on peut classifier les homéomorphismes f_A selon la valeur de la trace de A, qui est un entier relatif.

Si $\mathrm{Tr}(A) = -1, 0, 1$ C'est le cas où les valeurs propres sont complexes. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient qu'il existe un entier n (≤ 12) tel que $A^n = Id$. On en déduit que f_A^n est l'identité ; on dira que f_A est un homéomorphisme *périodique* du tore.

Exercice 3.2.1. — La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est d'ordre 4. Montrer que toute matrice $B \in SL(2,\mathbb{Z})$ de trace nulle est conjuguée dans $SL(2,\mathbb{Z})$ à A. Montrer qu'il existe une infinité de telles matrices.

Si $\mid \mathrm{Tr}(A) \mid = 2$ La matrice A a alors une valeur propre double, qui est 1 ou -1. On voit facilement qu'il existe un vecteur propre à coordonnées entières (m,n). On a donc $A(m,n) = (m,n)$ ou bien $A^2(m,n) = (m,n)$: la courbe $t \mapsto p(t(m,n))$ est donc fixée par A ou A^2. On dira que l'homéomorphisme f_A est *réductible*.

En complétant le vecteur propre en une base du réseau $\mathbb{Z}^2$, on voit que la matrice A est conjuguée, dans $SL(2,\mathbb{Z})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La première de ces deux matrices s'appelle un *twist de Dehn*.

Exercice 3.2.2. — Décrire géométriquement l'action d'un twist de Dehn A sur le tore : montrer qu'il existe un feuilletage en cercles invariants sur chacun desquels f_A agit par rotation.

Si $\mid \mathrm{Tr}(A) \mid > 2$ C'est le cas le plus intéressant, par exemple celui de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a deux valeurs propres réelles λ et λ^{-1}, l'une de valeur absolue > 1, l'autre < 1 : la matrice A est dite *hyperbolique*. Sa dynamique dans le plan est celle de l'application diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$: la droite propre E_λ correspondant à λ est dilatée, on l'appelle *variété instable* de A ; l'autre droite propre $\varepsilon_{\lambda^{-1}}$ est contractée, c'est la *variété stable*.

Cherchons maintenant à comprendre se qui se passe dans le tore. Notons d'abord que les valeurs propres sont irrationnelles (montrer que Δ n'est pas un carré parfait). Les pentes des droites E_λ et $E_{\lambda^{-1}}$ sont également irrationnelles. Ceci peut se voir algébriquement, ou géométriquement. Supposons en effet, par exemple, que le vecteur (m,n) est un vecteur propre de A. La courbe correspondante dans le tore, que nous notons encore (m,n), est alors globalement invariante par f_A. L'application $f_{A|(m,n)}$ est un homéomorphisme sur un cercle qui dilate localement les distances d'un facteur λ ou λ^{-1} : c'est absurde.

L'application p étant un homéomorphisme local, la dynamique de f_A au voisinage du point $p(0)$ est localement conjuguée à celle de A : le point fixe $p(0)$ est *hyperbolique*, il admet des "variétés" stables et instables qui sont les projetées des droites E_λ et $E_{\lambda^{-1}}$ dans le tore. Ces droites ayant une pente irrationnelle, elles se projettent en deux courbes denses, qui s'enroulent infiniment autour du tore.

Considérons le feuilletage $\mathcal{F}_\lambda$ du plan par les droites parallèles à la direction propre associée à λ. L'application A envoie chaque feuille sur une autre feuille. Ce feuilletage est globalement invariant par les translations entières, donc il se projette en un feuilletage du tore. L'homéomorphisme f_A préserve globalement ce feuilletage, en dilatant les feuilles d'un facteur λ. Bien sûr, on a un feuilletage $\mathcal{F}_{\lambda^{-1}}$ avec des propriétés analogues, et ces deux feuilletages sont transverses.

Exercice 3.2.3. — Montrer que, dans le dernier cas, l'homéomorphisme f_A vérifie les hypothèses du théorème 1.3.1.

CHAPITRE 4

THÉORIE DE BROUWER

Un *homéomorphisme de Brouwer* est un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, et sans point fixe. Ces objets sont étudiés à la fois pour eux-mêmes et pour leur utilité dans l'étude de dynamiques de surface plus riches.

- On trouve dans les homéomorphismes de Brouwer un mélange de complexité et de rigidité, l'impossibilité d'une classification et une dynamique très structurée.
- partons d'un homéomorphisme f préservant l'orientation sur une surface quelconque, et supposons que le complémentaire O des points fixes est connexe. Alors le revêtement universel de O est homéomorphe au plan, et tout relevé de f à $\tilde{O}$ est clairement un homéomorphisme de Brouwer. Ainsi, ces objets apparaissent comme "ce qu'il reste de la dynamique lorsqu'on a enlevé les points fixes et la topologie de la surface".

Un résultat frappant est l'absence de point périodique : nous démontrons ceci dans la section 4.3. De ce résultat, on peut déduire le *théorème des translations planes*, qui permet de voir tout homéomorphisme de Brouwer comme étant obtenu en recollant des translations.

Diverses définitions de l'orientation. — – courbes de Jordan
– triades ;
– isotopes à l'identité ;
– limite de difféos.

4.1. Exemples

L'exemple le plus simple est la translation ("la" et non pas "les" car toutes les translations sont conjuguées). Y a-t-il d'atres homéomorphismes de Brouwer ?

a. Construction par restriction. — Considérons l'homéomorphisme linéaire hyperbolique selle $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$. Ce n'est pas un homéomorphisme de Brouwer. Enlevons le quart-de-plan $x \leq 0, y \leq 0$: la restriction R aux trois-quart de plan complémentaire O est un homéomorphisme sans point fixe d'un ouvert simplement connexe du plan. D'après le théorème de l'application conforme Rieman, O est (conformément) homéomorphe au plan, et R est donc (conjugué à) un homéomorphisme de Brouwer. Notons que ceci donne en fait un difféomorphisme analytique réel. On l'appelle l'*homéomorphisme de Reeb.*

Cet homéomorphisme R préserve d'autres ouverts simplement connexes : par exemple, enlevons encore la demi-droite $y = 1, x \leq 0$ ainsi que tous ses itérés. Soit $O' \subset O$ l'ouvert obtenu, la restriction R' de R à O' donne un nouvel exemple d'homéomorphisme de Brouwer

Exercice 4.1.1. — Montrer que R' n'est pas plongeable dans un flot : il n'existe aucun sous-groupe à un paramètre $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'homéomorphismes de O' tel que $\varphi_1 = R'$. En particulier, R' ne peut pas être obtenu en intégrant un champ de vecteurs. Aide : considérer le point $x = (0, 3/4)$ et montrer que toute courbe contenant x et invariante par R' doit s'accumuler sur la demi-droite $x \geq 0, y = 0$. Une telle courbe n'est pas une orbite d'un flot.

b. Constructions par revêtement. — Multi Reeb. Ensemble singulier dense : aucun disque ne va à l'infini.

c. Construction par modification libre. — Marc.

d. Construction par composition. — Yin-Yang.

4.2. L'indice le long d'une courbe

Indice d'une courbe fermée dans le plan. — Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ une courbe du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Si $\vec{v}$ est un champ de vecteurs continu défini sur γ et ne s'y annulant pas, on appelle indice de $\vec{v}$ le long de γ, et on note $\mathrm{Ind}(\vec{v},\gamma)$, la variation angulaire de $\vec{v}$ quand on parcourt γ : plus précisément, soit φ le revêtement universel du cercle unité du plan :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ \theta & \longmapsto & \exp(2i\pi\theta). \end{array}$$

L'application

$$f = \frac{\vec{v}\circ\gamma}{\|\vec{v}\circ\gamma\|} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

se relève par φ en une application $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ (on a $\varphi \circ F = f$), et on pose $\mathrm{Ind}(\vec{v},\gamma) = F(1) - F(0)$. Remarquons que si γ est une courbe fermée (c'est-à-dire $\gamma(0) = \gamma(1)$), l'indice est un nombre entier.

Soit g une application continue d'un ouvert U du plan dans le plan, et E l'ensemble des points fixes de g ; on définit sur $U \setminus E$ le champ de vecteurs

$$\vec{g}_x = \frac{g(x) - x}{\|g(x) - x\|}.$$

Si maintenant γ est une courbe dans $U \setminus E$, on pose $\mathrm{Ind}(g,\gamma) = \mathrm{Ind}(\vec{g},\gamma)$.

Si γ est une courbe fermée, l'entier $\mathrm{Ind}(g,\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ (en tant que courbe fermée) dans le complémentaire des points fixes de g : en particulier, une courbe qui y est homotope à une courbe constante est d'indice nul. Ceci donne donc un moyen de détecter la présence de points fixes : il suffit de trouver une courbe fermée simple d'indice non nul.

L'indice est un invariant de conjugaison, c'est-à-dire que pour tout homéomorphisme φ préservant l'orientation, on a

$$\mathrm{Ind}(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \varphi(\gamma)) = \mathrm{Ind}(g,\gamma).$$

En effet, l'espace des homéomorphismes du plan préservant l'orientation est connexe, et le nombre $\mathrm{Ind}(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \varphi(\gamma))$ est un entier qui dépend continûment de φ, il est donc constant.

Indice d'un point fixe. — Soit g comme ci-dessus, et x_0 un point fixe isolé de g, c'est-à-dire un point isolé de l'ensemble E. On définit alors l'indice de x_0 comme l'indice de n'importe quel cercle γ dans U qui entoure x_0 mais n'entoure aucun autre point fixe (γ est orientée dans le sens trigonométrique). Ce nombre ne dépend pas du cercle γ choisi, et ne dépend que de la classe de conjugaison du germe de g en x_0.

On a alors la formule suivante : l'indice d'une courbe de Jordan γ qui n'entoure qu'un nombre fini de points fixes de g est égal à la somme des indices de ces points fixes.

4.3. Absence de récurrence, lemme de Franks

Soit h un homéomorphisme de Brouwer. Dans cette section, nous démontrons que f n'admet aucune orbite périodique. La preuve produit en fait un résultat plus général, et très intéressant, le *lemme de Franks*, qui peut être vu comme une absence d'orbites "pseudo-périodiques".

a. Énoncé. — On appellera *disque topologique ouvert* toute partie du plan homéomorphe au disque unité ouvert. Un ensemble E est dit *libre* s'il est disjoint de son image ($h(E) \cap E = \emptyset$).

Définition 4.3.1. — Une *chaîne périodique de disques ouverts* est une suite $(D_1, \dots, D_k)$ de disques topologiques ouverts
- deux à deux disjoints,
- libres,
- tels que pour tout $i = 1, ..., k$, $h(D_i)$ rencontre D_{i+1}.

Le nombre k est appelé *période* de la chaîne.

L'indice i est ici considéré modulo k.

DESSIN.

***Théorème 4.3.2* ("lemme de Franks").** — *Un homéomorphisme de Brouwer n'admet aucune chaîne périodique de disques ouverts.*

On en déduit facilement (exercice) le :

Corollaire 4.3.3. — *Un homéomorphisme de Brouwer n'admet aucune orbite périodique. Mieux : toute orbite $(h^n(x))_{n\geq 0}$ tend vers l'infini (sort de tout compact).*

Démonstration. — Soit D un disque ouvert libre. Alors il est disjoint de tous ses itérés positifs : sans quoi, si n était le plus petit entier > 0 tel que $f^n(D)$ rencontre D, la suite $(D, f(D), \dots, f^{n-1}(D))$ formerait une chaîne périodique de disques.

Comme tout point est dans un disque ouvert libre, on en déduit que tout point est *errant* (possède un voisinage disjoint de tous ses itérés).

En particulier, h n'a aucun point *ω-limite* : aucun point du plan n'est valeur d'adhérence d'une orbite (c'est un fait général et facile qu'un point ω-limite n'est pas errant).

Donc tout compact ne contient qu'un nombre fini de points d'une orbite donnée. Autrement dit, toute orbite tend vers l'infini. □

Remarque : énoncé usuel plus fort (en fait équivalent).

b. Stratégie. — On part d'un homéomorphisme de Brouwer h ; on raisonne par l'absurde, en supposant que h admet une chaine périodique de disques ouverts.

Lemme 4.3.4. — *S'il existe un homéomorphisme de Brouwer h qui admet une chaine périodique de disques ouverts de période n, alors il existe un autre homéomorphisme de Brouwer h' qui admet une orbite périodique de période n.*

Lemme 4.3.5. — *Si un homéomorphisme de Brouwer h' admet une orbite périodique de période n, alors h' admet une chaine périodique de disques ouverts de période* 2.

On applique alors à nouveau le premier lemme : on obtient un nouvel homéomorphisme de Brouwer h'' qui admet une orbite périodique de période 2. On conclut avec un dernier lemme.

Lemme 4.3.6. — *Si h'' est un homéomorphisme de Brouwer, alors h'' n'a pas d'orbite périodique de période* 2.

c. Preuves des lemmes. — On peut commencer par lire la preuve du dernier lemme, qui explique pourquoi un homéomorphisme de Brouwer n'a pas d'orbite périodique de période 2.

Preuve du premier lemme. — Commençons par une remarque évidente : si l'on compose h par un homéomorphisme à support dans un ensemble libre, alors le résultat est encore un homéomorphisme sans point fixe, donc de Brouwer.

Par définition, on peut trouver pour tout i un point $x_i \in D_i$ tel que $f(x_i) \in D_{i+1}$. Soit φ_i un homéomorphisme à support dans D_i tel que $\varphi_i(f(x_{i-1})) = x_i$. Puisque les disques sont deux à deux disjoints, les φ_i commutent deux à deux. Notons Φ le composé de tous les φ_i. Il est clair que la suite $(x_1, \ldots, x_k)$ est une orbite périodique de $h' = \Phi \circ h$. □

Remarque : on a utilisé tacitement le fait que les homéomorphismes du disque ouvert à support compact agissent transitivement sur le disque : pour tous $x, y \in \mathrm{Int}(\mathbb{D})$ il existe un homéomorphisme φ tel que $\varphi(x) = y$, et qui est l'identité hors d'un compact de $\mathrm{Int}(\mathbb{D})$ (exercice).

Preuve du second lemme. — On commence par une définition.

Définition 4.3.7. — On appelle *rectangle de translation* tout ensemble R du plan, homéomorphe à $[0, 1] \times [0, 1]$, tel que $h(R) \cap R$ soit un intervalle non trivial du bord de R. (DESSIN)

D'après le théorème de Schoenflies, pour construire un rectangle de translation il suffit de construire son bord, cad de trouver une courbe de Jordan J telle que $h(J) \cap J$ soit un intervalle non trivial de J, et $h(J) \setminus J$ est situé dans la composante connexe non bornée du complémentaire de J. L'intérêt de cette notion de "rectangle de translation" est qu'elle permet de se ramener, localement, à une vraie translation. Explicitons ceci. Soit n le *temps de retour* du rectangle R, c'est-à-dire le premier entier positif (éventuellement infini) tel que $h^n(\mathrm{Int}(R)) \cap \mathrm{Int}(R) \neq \emptyset$. On a $n \geq 2$ car R rectangle de translation. Si on utilise Schoneflies, quitte à conjuguer, on a $h = \tau$ sur $[0, n-1] \times [0, 1]$ (et donc $R, h(R), \ldots h^{n-1}(R)$

sont des vrais carrés). En fait, inutile : on va juste utiliser une carte, cad un plongement $\Phi : [0, n] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ qui conjugue τ à h là où ça a un sens.

Lemme 4.3.8. — *Soit h un homéomorphisme de Brouwer. Supposons que h n'a pas d'orbite périodique de période* 2. *Alors tout point est dans un rectangle de translation.*

Pour cela, construction classique d'arc de translation (on peut supposer que le point du bord n'est pas de période 2), mais dans le disque euclidien on prend deux triangles T_1 et T_2 collés au centre ; il reste juste à épaissir $h(T_1) \cup T_2$ au niveau du point de pincement (utiliser un petit disque) pour obtenir un rectangle de translation. DESSINS.

Terminons la preuve. On peut bien sûr supposer que h n'a pas de point périodique de période 2. Soit x un point périodique, et R un rectangle contenant x dans son intérieur. Le temps de retour de R est alors un entier $n \geq 2$. Il est maintenant très facile de construire une chaîne de disques périodique (B_1, B_2), voici comment. On pose $B_1 = \text{Int}(R)$. Par définition de n, il existe un point $z \in h^{n-1}(\text{Int}(R))$ tel que $h(z) \in \text{Int}(R)$. On choisit maintenant un rectangle ouvert B_2, d'adhérence incluse dans $h(R) \cup \cdots \cup h^{n-1}(R)$, rencontrant $\text{Int}(h(R))$, et contenant z. Par construction, (B_1, B_2) est une chaine périodique de disques ouverts de période 2. □

Exercice 4.3.9. — Écrire les détails de la preuve : pourquoi R est-il bien un rectangle ? Comment doit-on choisir le rayon du petit disque (préciser l'expression “assez petit”). Où utilise-t-on qu'il n'y a pas de point de période 2 ?...

Preuve du dernier lemme. — Soit $(x, h(x))$ une orbite périodique pour un homéomorphisme de brouwer h. Nous allons trouver une courbe fermée sur laquelle l'indice de h n'est pas nul, ce qui sera contradictoire. Cette courbe J est obtenue en mettant bout à bout n'importe quelle courbe γ reliant x à $h(x)$ et son image $h(\gamma)$.

Commençons par remarquer que comme $h^2(x) = x$, l'indice de h le long de γ est un demi entier p (faire un DESSIN).

Que vaut l'indice de h le long de $h(\gamma)$? Pour le savoir, nous considérons une isotopie $(h_t)_{t\in[0,1]}$ reliant l'identité à h. Pour tout t, conjuguons la situation par h_t : le point $h_t(x)$ est périodique de période 2 pour l'homéomorphisme de Brouwer $h' = h_t h h_t^{-1}$, la courbe $h_t(\gamma)$ relie ce point à son image par h', l'indice de h_t le long de cette courbe est donc encore un demi-entier. Puisqu'il varie continûment lorsque t varie, il est constant. Pour $t = 0$ ce nombre vaut p, il vaut donc encore p pour $t = 1$, mais il s'agit alors précisément de l'indice de h le long de la courbe $h(\gamma)$.

L'indice de h le long de J vaut donc $2p$, où p est un demi-entier : c'est un entier impair. En particulier, il n'est pas nul, ce qui termine la preuve. □

d. Adaptation pour une courbe d'indice 1. — – Il est clair que le premier lemme “passe” (isotopie loin des points fixes).

– ensuite il faut savoir que h préserve les cc du complémentaire de l'ensemble des points fixes... C'est ok s'il n'y a qu'un nombre fini de points fixes.

e. Petit théorème des translations planes. — Conjugaison locale à la translation *via* un rectangle de translation.

4.4. Décompositions en briques, théorème des translations planes

4.5. Énonce du théorème feuilleté équivariant

CHAPITRE 5

PLAN, DIVERS

Début le lundi 29 janvier ? 12 séances de 2h30.

0-I) (1 séance)

0) Présentation rapide, buts.

I) Topologie et géométrie des surfaces

Enoncer la classification des surfaces compactes, et leurs géométries (références = ? ? ?) [1] Leur groupe fonda, homologie. Définition de la caractéristique d'Euler.

(Indice).

Classes d'isotopie : définition du mapping class group ?

Théorème admis : action triviale sur les courbes libres implique isotope à l'identité.

Théorème de Jordan, Schoenflies (? ?)

II) (5 séances) Théorie de Nielsen-Thurston : théorème de calssification de Thurston, et de semi-conjugaison de Handel. Prérequis de géométrie hyperbolique (géodésiques, isométries). Exercice : le tore...

Références : Epstein ; ? ? ?

III) (2 séances) La théorie de Brouwer

Exemples, rappel rapide Poincaré-Bendixson ? Lemme de Franks (en l'absence de point fixe : cas simple) ; Décompositions en briques, théorème des translations planes,

Enoncé du théorème feuilleté équivariant.

(Mentionner la théorie de Handel qui fait le lien Brouwer-Thurston ?)

IV) (3 séances) Ensemble de rotation sur le tore.

Les defs Intérieur non vide entraine orbites périodiques et entropie Exemples Applications du théorème feuilleté.

V) (0 séance) Introduction aux résultats de Fransk-Handel.

I) ANCIEN (2 séances) Formule de Lefschetz en dimension 2. Enoncer la classification des surfaces compactes, et leurs géométries (références = ? ? ?) Définir l'indice, exemples. Homologie simpliciale. Toute application continue est approchée par une simpliciale (et

---

[1] D. Lehmann, C. Sacré, Géométrie et Topologie des Surfaces
Casson-Bleiler. Falapo.
A. GRAMAIN - Topologie des surfaces, Presses Universitaires de France
L. Christine Kinsey - 1997 - 270 pages Topology of Surfaces
A First Course in Geometric Topology and Differential Geometry Par Ethan D. Bloch
Topology- topology :geometr Approach Ogtm C Par Terry, Lawson
Differential geometry Hirsch (dernier chapitre = classification des surfaces).
Introduction to Topological Manifolds Par John M. (Lee

lui est donc homotope). Définition de la caractéristique d'Euler. Preuve du théorème de Lefschetz dans le cas sans point fixe. Exemples, références = ? ?

Théorème de Jordan, Schoenflies (? ?)