

L'invariant de Ruelle

Mémoire de Master présenté par Katharina Pabst
sous la direction de Frédéric Le Roux

27 juillet 2005

Contents

1	La définition	2
1.1	Le nombre de Ruelle	2
1.1.1	La fonction $\Delta_f : \mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$	2
1.1.2	Intégration	3
1.2	Premiers exemples	8
1.3	Indépendance des choix faits	9
1.3.1	Du vecteur v	9
1.3.2	De l'homotopie $(f_t)_t$	9
1.3.3	(In-) Dépendance de la trivialisaton	10
1.4	Dictionnaire	11
2	Propriétés	12
2.1	Continuité	12
2.2	Propriétés algébriques	12
2.3	Invariance topologique	13
2.4	Annulation	15
3	Plus d'exemples	18
3.1	Hamiltoniens	18
3.2	Fer à cheval	19
	Références	20

1 La définition

1.1 Le nombre de Ruelle

Soit \mathbb{M}^2 une variété fermée, avec ou sans bord, dont le fibré tangent est trivial. C'est soit le disque $\mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\}$, soit l'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, soit le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Nous notons

- $\text{Diff}^1(\mathbb{M}^2)$ le groupe des C^1 -difféomorphismes sur \mathbb{M}^2 ,
- $\text{Diff}_+^1(\mathbb{M}^2)$ le sous-groupe de ceux qui sont homotopes à l'identité,
- $\text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2)$ le sous-groupe de ceux qui sont en plus l'identité près du bord si \mathbb{M}^2 est à bord, et
- $\text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2, \mu)$ le sous-groupe de ceux qui préservent en plus une mesure de probabilité μ sur \mathbb{M}^2 .

Soit f un élément de $\text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2, \mu)$, et soit $(f_t)_{t \in [0,1]}$ une homotopie reliant $f_0 = id$ à $f_1 = f$ dans $\text{Diff}^1(\mathbb{M}^2)$. Les constructions qui suivent peuvent a priori dépendre de cette homotopie choisie. On verra plus tard que en fait, elles n'en dépendent pas. Fixons aussi une trivialisatoin du fibré tangent. Il est alors identifié à $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}^2$, et le fibré tangent unitaire à $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1$, où $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Nous allons définir une fonction qui nous permet de mesurer la longueur du pas dans le cercle que fait un vecteur tangent quand on applique f . Puis nous voulons prendre une limite pour tenir compte du comportement asymptotique, et intégrer pour prendre la moyenne sur toute la surface.

1.1.1 La fonction $\Delta_f : \mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$

Pour chaque point x de \mathbb{M}^2 , et pour tout t dans $[0, 1]$, on considère la différentielle $Df_t(x)$. En utilisant la trivialisatoin du fibré tangent, on peut considérer cette différentielle comme une 2×2 -matrice. Cette matrice est inversible, car f_t est un difféomorphisme, et à déterminant positif, car f_t préserve l'orientation : c'est un élément de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$.

Si v est un vecteur non-nul de \mathbb{R}^2 , alors $(Df_t(x).v)_{t \in [0,1]}$ est une courbe dans le plan qui ne rencontre pas l'origine. On peut donc parler de la variation d'angle de cette courbe, en choisissant le périmètre du cercle comme l'unité d'angle. Notons par $\Delta_f(x, v) \in \mathbb{R}$ la variation de l'angle quand t varie de 0 à 1.

Remarquons que $\Delta_f(x, v)$ est juste le "nombre de tours" (réel, avec signe selon l'orientation) décrits sur le cercle par le vecteur $\frac{Df_t(x).v}{\|Df_t(x).v\|}$ quand t varie de 0 à 1.

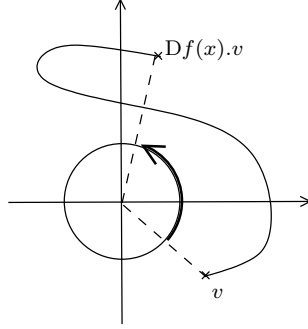


Figure 1: La variation d'angle de $(Df_t(x).v)_t$.

En particulier, $\Delta_f(x, v)$ ne dépend pas du module de v . Nous comprenons Δ_f comme fonction du fibré tangent unitaire $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1$ dans \mathbb{R} . C'est une fonction continue.

Est-ce qu'elle dépend vraiment de v ? En fait pas beaucoup, dans le sens suivant. Si u et v sont deux vecteurs non-nuls de \mathbb{R}^2 , et si $v \notin \mathbb{R}u$, alors $Df_t(x).v \notin \mathbb{R} Df_t(x).u$ pour tout t . Les vecteurs $Df_t(x).u$, $Df_t(x).v$ et $-Df_t(x).u$ forment donc un triangle qui garde son orientation quand t décrit l'intervalle $[0, 1]$. Ainsi, la variation d'angle de la courbe $(Df_t(x).v)_t$ diffère de celle de $(Df_t(x).u)_t$ de moins que du demi-tour qui sépare un vecteur $Df_t(x).u$ de son négatif. C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{M}^2$ et pour tout $u, v \in \mathbb{S}^1$ on a

$$|\Delta_f(x, u) - \Delta_f(x, v)| < \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Considérons maintenant un deuxième élément g de $\text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2, \mu)$, avec une homotopie (g_t) comme pour f . La concaténation de (g_t) avec (f_t) forme alors une homotopie reliant $g_0 = id$ à $f_1 \circ g = f \circ g$ en passant par $f_0 \circ g_1 = g$, et nous obtenons

$$\Delta_{f \circ g}(x, v) = \Delta_g(x, v) + \Delta_f(g(x), v) + \Delta_g(x, v). \quad (2)$$

En particulier nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_{f^n}(x, v) = \Delta_f(x, v) + \Delta_f(f(x), v) + \Delta_f(x, v) + \dots + \Delta_f(f^{n-1}(x), v) + \Delta_{f^{n-1}}(x, v).$$

Notons f_* le difféomorphisme que f induit sur $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1$ par

$$(x, v) \mapsto (f(x), \frac{Df(x).v}{\|Df(x).v\|}).$$

Alors cette dernière identité s'écrit

$$\Delta_{f^n} = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_f \circ f_*^i. \quad (3)$$

1.1.2 Intégration

Intégration sur le fibré tangent unitaire Nous admettons le lemme suivant, voir [1].

Lemme 1 *La mesure μ se relève en une mesure de probabilité ν sur $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1$ invariante par f_* telle que $\pi_*(\nu) = \mu$, où $\pi : \mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{M}^2$ est la projection sur la première coordonnée. Il y a des mesures de probabilités ν_x sur les fibres $\{x\} \times \mathbb{S}^1$ telles que pour toute fonction continue φ sur $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1$,*

$$\int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \varphi \, d\nu = \int_{\mathbb{M}^2} \int_{\{x\} \times \mathbb{S}^1} \varphi(x, v) \, d\nu_x \, d\mu.$$

Le relevé ν n'est pas unique, mais nous allons montrer que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) \, d\nu$$

ne dépend pas du choix de ν , mais seulement de μ .

Soient ν_1, ν_2 deux relevés de μ . À cause de (1) nous avons sur chaque fibre

$$\left| \int_{\{x\} \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) \, d\nu_{1x} - \int_{\{x\} \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) \, d\nu_{2x} \right| \leq \text{Max}(\Delta_f|_{\{x\} \times \mathbb{S}^1}) - \text{Min}(\Delta_f|_{\{x\} \times \mathbb{S}^1}) < \frac{1}{2}.$$

Nous avons donc, en intégrant sur la surface,

$$\left| \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) \, d\nu_1 - \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) \, d\nu_2 \right| < \frac{1}{2}.$$

De l'autre côté, la f_* -invariance de ν_i implique avec (3) que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_{f^n}(x, v) \, d\nu_i = n \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) \, d\nu_i. \quad (\star)$$

On a ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n \left| \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) \, d\nu_1 - \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) \, d\nu_2 \right| = \left| \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_{f^n}(x, v) \, d\nu_1 - \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_{f^n}(x, v) \, d\nu_2 \right| < \frac{1}{2},$$

et donc

$$\int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) \, d\nu_1 = \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) \, d\nu_2.$$

Définissons le nombre de Ruelle de f par rapport à μ selon la méthode d'intégration sur le fibré tangent unitaire par

$$\mathcal{R}_\mu^{\text{fib}}(f) = \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) \, d\nu,$$

où ν est un relevé de μ .

Intégration sur la surface Si nous voulons éviter la construction de mesure dans le fibré tangent unitaire, nous pouvons fixer un vecteur $v \in \mathbb{S}^1$ et considérer la fonction Δ_f comme fonction sur \mathbb{M}^2 , définie par $\Delta_f(x) = \Delta_f(x, v)$. L'identité (2) donne alors la presque-additivité

$$|\Delta_{f \circ g}(x) - \Delta_g(x) - \Delta_f(g(x))| < \frac{1}{2}, \quad (2')$$

car $|\Delta_f(g(x)) - \Delta_f(g(x), v + \Delta_g(x, v))| < \frac{1}{2}$ à cause de (1). L'identité (3) s'exprime

$$|\Delta_{f^n}(x) - \Delta_f(x) - \Delta_f(f(x)) - \dots - \Delta_f(f^{n-1}(x))| < \frac{n-1}{2}, \quad (3')$$

pour tout $x \in \mathbb{M}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

La méthode ergodique Soit $N \in \mathbb{N}$. Si $N = km + r$, avec $m, k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < m$, alors nous avons avec (2') et (3')

$$|\Delta_{f^N}(x) - \Delta_{f^{km}}(x) - \Delta_{f^r}(f^{km}(x))| < \frac{1}{2}$$

ainsi que

$$|\Delta_{f^{km}}(x) - \Delta_{f^m}(x) - \Delta_{f^m}(f^m(x)) - \dots - \Delta_{f^m}(f^{(k-1)m}(x))| < \frac{k-1}{2}.$$

Nous additionnons des deux cotés et obtenons

$$|\Delta_{f^N}(x) - \Delta_{f^m}(x) - \dots - \Delta_{f^m}(f^{(k-1)m}(x)) - \Delta_{f^r}(f^{km}(x))| < \frac{k}{2}. \quad (*)$$

Le théorème ergodique montre que la somme

$$\mathcal{S}_k(f^m) = \frac{1}{km} (\Delta_{f^m}(x) + \Delta_{f^m}(f^m(x)) + \dots + \Delta_{f^m}(f^{(k-1)m}(x)))$$

a une limite quand $k \rightarrow \infty$ pour μ -presque tout x (et pour tout m). En effet, c'est une somme de Birkhoff, et les conditions du théorème ergodique de Birkhoff sont satisfaites : f^m préserve comme f la mesure μ , et la fonction $\frac{1}{m}\Delta_{f^m}$ est définie sur le compact \mathbb{M}^2 donc bornée et donc intégrable.

De même, la fonction Δ_{f^r} est bornée sur \mathbb{M}^2 , et donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{km+r} \Delta_{f^r}(f^{km}(x)) \rightarrow 0.$$

Avec ces faits, nous deduisons de (*) que pour μ -presque tout x , la limite

$$\omega(x) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \Delta_{f^N}(x)$$

existe et est intégrable. Définissons le nombre de Ruelle de f par rapport à μ selon la méthode ergodique par

$$\mathcal{R}_\mu^{\text{erg}}(f) = \int_{\mathbb{M}^2} \omega(x) d\mu.$$

La méthode algébrique Introduisons d'abord la notion de quasimorphisme. Soit G un groupe. Une application $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ est un *quasimorphisme* s'il existe une constante $D \in \mathbb{R}$, tel que $|\varphi(a \cdot b) - \varphi(a) - \varphi(b)| \leq D$ pour tout $a, b \in G$. Deux quasimorphismes sont *équivalents* si leur différence est bornée. Un quasimorphisme est *homogène*, si $\varphi(a^p) = p\varphi(a)$ pour tout $a \in G$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Lemme 2 Si $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ est un quasimorphisme, alors la limite $\Phi(a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \varphi(a^N)$ existe pour tout $a \in G$ et définit l'unique quasimorphisme homogène équivalent à φ .

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. Si $N = km + r$, avec $m, k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < m$, alors nous avons par définition de quasimorphisme,

$$|\varphi(a^N) - \varphi(a^{km}) - \varphi(a^r)| \leq D$$

ainsi que

$$|\varphi(a^{km}) - k\varphi(a^m)| < (k-1)D.$$

Nous additionnons des deux cotés et obtenons

$$|\varphi(a^N) - k\varphi(a^m) - \varphi(a^r)| \leq kD.$$

Comme pour tout m

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{km+r} \varphi(a^r) = 0,$$

il s'ensuit que

$$\Phi(a) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \varphi(a^N)$$

existe pour tout $a \in G$. La différence entre φ et Φ est bornée, car nous avons

$$|\varphi(a^p) - p\varphi(a)| \leq (p-1)D,$$

et donc

$$\left| \frac{1}{p} \varphi(a^p) - \varphi(a) \right| < D$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. Supposons Φ et Ψ sont deux quasimorphismes homogènes équivalents à φ . Alors leur différence est bornée aussi; il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $|\Phi(a) - \Psi(a)| \leq B$ pour tout $a \in G$. Comme

$$p|\Phi(a) - \Psi(a)| = |\Phi(a^p) - \Psi(a^p)| \leq B,$$

nous avons $\Phi(a) = \Psi(a)$ pour tout $a \in G$.

□

Pour tout difféomorphisme $f \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2, \mu)$, la fonction continue $\Delta_f(\cdot)$ est définie sur la surface qui est compacte. Elle est donc bornée et intégrable. Définissons une application $r : \text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$r(f) = \int_{\mathbb{M}^2} \Delta_f(x) d\mu.$$

L'inégalité (2') nous donne, en intégrant sur la surface

$$|r(f \circ g) - r(g) - r(f)| = \left| \int_{\mathbb{M}^2} \Delta_{f \circ g}(x) d\mu - \int_{\mathbb{M}^2} \Delta_g(x) d\mu - \int_{\mathbb{M}^2} \Delta_f(x) d\mu \right| < \frac{1}{2}.$$

L'application r est donc un quasimorphisme. Le quasimorphisme homogène équivalent est définie par $\mathcal{R}_\mu^{\text{alg}}(f) := \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} r(f^p)$; c'est le nombre de Ruelle de f par rapport à μ selon la méthode algébrique.

L'équivalence des trois versions

Nous avons $\mathcal{R}^{\text{alg}} = \mathcal{R}^{\text{fib}}$. Il semble peut-être surprenant que dans la définition de \mathcal{R}^{fib} nous n'avons pas pris de limite le long des orbites. Mais l'identité (\star) nous dit que l'intégrale même est déjà homogène, elle exprime donc déjà le comportement asymptotique. En plus, l'application $\mathcal{R}_\mu^{\text{fib}} : \text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ est un quasimorphisme. En effet,

$$\mathcal{R}_\mu^{\text{fib}}(f \circ g) = \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_{f \circ g}(x, v) d\nu,$$

où ν_1 est un relevé $(f \circ g)_*$ -invariant de μ . Avec (2),

$$\mathcal{R}_\mu^{\text{fib}}(f \circ g) = \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_g(x, v) d\nu + \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(g(x), v + \Delta_g(x, v)) d\nu,$$

mais le relevé ν n'est pas forcément f_* - et g_* -invariant. Soient $\dot{\nu}$ et $\ddot{\nu}$ des relevés de μ f_* - respectivement g_* -invariant. Nous avons comme en 1.1.2

$$\left| \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_g(x, v) d\dot{\nu} - \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_g(x, v) d\nu \right| < \frac{1}{2}$$

et

$$\left| \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) d\dot{\nu} - \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(g(x), v + \Delta_g(x, v)) d\nu \right| < \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$|\mathcal{R}_\mu^{\text{fib}}(f \circ g) - \mathcal{R}_\mu^{\text{fib}}(g) - \mathcal{R}_\mu^{\text{fib}}(f)| < 1.$$

L'application $\mathcal{R}_\mu^{\text{fib}}$ est donc un quasimorphisme homogène. Il coïncide avec le quasimorphisme homogène $\mathcal{R}_\mu^{\text{alg}}$. En effet, nous avons avec (1) que pour tout $x \in \mathbb{M}^2$ et tout $v \in \mathbb{S}^1$

$$|\Delta_f(x, v) - \Delta_f(x)| < \frac{1}{2}.$$

Donc, en intégrant sur le cercle

$$\left| \int_{\mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) d\nu_x - \Delta_f(x) \right| < \frac{1}{2},$$

et en intégrant sur la surface

$$\left| \int_{\mathbb{M}^2} \int_{\mathbb{S}^1} \Delta_f(x, v) d\nu_x d\mu - \int_{\mathbb{M}^2} \Delta_f(x) d\mu \right| = |\mathcal{R}_\mu^{\text{fib}}(f) - r(f)| < \frac{1}{2}.$$

C'est-à-dire que $\mathcal{R}_\mu^{\text{fib}}$ et r sont équivalents, i.e. les quasimorphisme homogènes $\mathcal{R}_\mu^{\text{fib}}$ et $\mathcal{R}_\mu^{\text{alg}}$ coïncident.

Nous avons $\mathcal{R}^{\text{alg}} = \mathcal{R}^{\text{erg}}$. Montrons que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \int_{\mathbb{M}^2} \Delta_{f^p}(x) d\mu = \int_{\mathbb{M}^2} \omega(x) d\mu.$$

Rappelons que

$$|\Delta_{f^n}(x) - \Delta_f(x) - \Delta_f(f(x)) - \dots - \Delta_f(f^{n-1}(x))| < \frac{n-1}{2}$$

Donc

$$\left| \frac{1}{n} \Delta_{f^n}(x) - \mathcal{S}_n(f) \right| < \frac{1}{2},$$

où $\mathcal{S}_n(f) \rightarrow \int_{\mathbb{M}^2} \Delta_f(x) d\mu$, pour μ -presque tout x . Soit $\varepsilon > 0$ petit. À partir d'un certain rang on a alors

$$\frac{1}{n} \Delta_{f^n}(x) \in \left[\int_{\mathbb{M}^2} \Delta_f(x) d\mu - \frac{1}{2} - \varepsilon, \int_{\mathbb{M}^2} \Delta_f(x) d\mu + \frac{1}{2} + \varepsilon \right]$$

La valeur absolue $\left| \frac{1}{n} \Delta_{f^n}(x) \right|$ est donc majorée par une constante. Par convergence dominée de Lebesgue nous avons $\frac{1}{p} \int_{\mathbb{M}^2} \Delta_{f^p}(x) d\mu \rightarrow \int_{\mathbb{M}^2} \omega(x) d\mu$, quand $p \rightarrow \infty$.

Les trois définitions donnent donc un et le même nombre, que nous appelons le *nombre de Ruelle* de f par rapport à μ , noté $\mathcal{R}_\mu(f)$.

1.2 Premiers exemples

Comme trivialisations du fibré tangent de notre surface choisissons celle qui est induite par le transport parallèle de la géométrie euclidienne.

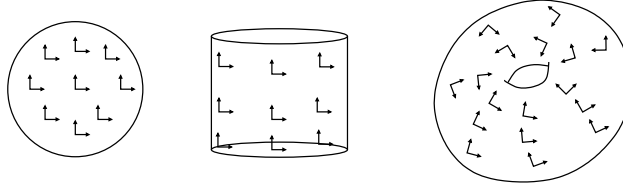


Figure 2: Les trivialisations choisies.

Sur le disque Soit $\varrho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 qui est zéro dans un voisinage de 1 et constante dans un voisinage de 0. Soit F_ϱ le difféomorphisme du disque défini comme

$$F_\varrho(x) = \text{Rot}_{\varrho(\|x\|)}(x)$$

où Rot_θ est la rotation par un angle θ . F_ϱ préserve la mesure de Lebesgue λ sur \mathbb{D}^2 et est l'identité près du bord. Une homotopie entre id et F_ϱ est donnée par $(F_{t\varrho})_{t \in [0, 1]}$. Intuitivement nous voudrions dire que la variation d'angle d'un vecteur $v \in \{x\} \times \mathbb{S}^1$ est juste $\varrho(\|x\|)$. Ceci est vrai que pour un vecteur angulaire, tangent au cercle $\{y, \|y\| = \|x\|\}$. En coordonnées polaires, nous avons

$$F_{t\varrho}(\vartheta, r) = (\vartheta + t\varrho(r), r)$$

et

$$DF_{t\varrho}(\vartheta, r) = \begin{pmatrix} 1 & \varrho'(r) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour un vecteur général, il y a donc une déviation par rapport à sa composante angulaire en plus de la rotation par $\varrho(\|x\|)$. Fixons un vecteur $v \in \mathbb{S}^1$.

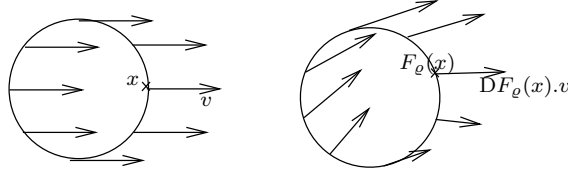


Figure 3: Les variations d'angle de v .

La moyenne des variations sur un cercle est quand même l'angle $\varrho(\|x\|)$, car les déviations des vecteurs opposés s'annulent. Nous calculons donc

$$\mathcal{R}_\lambda(F_\omega) = \int_{\mathbb{D}^2} \Delta d\lambda = \int_0^1 \omega(t) 2\pi t dt = 2\pi \int_0^1 t\omega(t) dt.$$

Sur l'anneau Soit $\varrho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 qui est nulle et dans un voisinage de 1 et dans un voisinage de 0. Soit F_ϱ le difféomorphisme de l'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ défini comme

$$F_\varrho(x_1, x_2) = (x_1 + \omega(x_2), x_2).$$

F_ϱ est l'identité près du bord. Une homotopie entre id et F_ϱ est donnée par $(F_{t\varrho})_{t \in [0, 1]}$. La différentielle $DF_{t\varrho}(x)$ est l'identité dans la coordonnée angulaire x_1 , et la variation d'angle de la courbe $(DF_{t\varrho}(x).(1, 0))_t$ est nulle. Le nombre de Ruelle $\mathcal{R}_\mu(F_\varrho)$ est donc zéro pour toute mesure de probabilité μ F_ϱ -invariante.

Sur le tore Soit $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ le tore et $Rot_{\alpha, \beta} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, (x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \beta)$ la rotation d'angle α et β dans les coordonnées. Une homotopie entre id et $Rot_{\alpha, \beta}$ est donnée par $(Rot_{t\alpha, t\beta})_{t \in [0, 1]}$. La différentielle $DRot_{t\alpha, t\beta}(x)$ est simplement l'identité; il n'y a pas de variation d'angle, et le nombre de Ruelle $\mathcal{R}_\mu(Rot_{\alpha, \beta})$ est zéro pour toute mesure de probabilité μ $Rot_{\alpha, \beta}$ -invariante.

Remarque : Nous pouvons plonger un exemple sur le disque dans l'anneau et le tore en prolongeant par l'identité. Tous les exemples pour le disque sont donc aussi des exemples pour les autres surfaces.

1.3 Indépendance des choix faits

1.3.1 Du vecteur v

Dans la définition de \mathcal{R}^{erg} et de \mathcal{R}^{alg} nous avons fixé un vecteur v . Le nombre de Ruelle ne dépend évidemment pas de ce choix, car dans la définition de \mathcal{R}^{fib} , on n'en choisit pas.

1.3.2 De l'homotopie $(f_t)_t$

Soit $f \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2)$. Une homotopie (f_t) entre id et f est un chemin dans le groupe de difféomorphismes $\text{Diff}_+^1(\mathbb{M}^2)$. Il reste forcément dans la composante connexe contenant l'identité, dans $\text{Diff}_+^1(\mathbb{M}^2)$. Soient (f'_t) et (f''_t) deux tels chemins avec $f'_0 = f''_0 = id$ et $f'_1 = f''_1 = f$, et notons $\Delta'_f(\cdot)$ respectivement $\Delta''_f(\cdot)$ la fonction de mesure de pas correspondante. Pour tout $x \in \mathbb{D}^2$,

la différence $\Delta'_f(x) - \Delta''_f(x)$ est entière, car $Df'_0(x).v = Df''_0(x).v = v$ et $Df'_1(x).v = Df''_1(x).v = Df(x).v$. Si les deux chemins sont homotopes, alors cette différence doit être nulle, car la fonction de mesure de pas dépend continûment du chemin choisi, car l'homotopie entre les deux chemins induit une homotopie entre les courbes $(Df'_t(x).v)_t$ et $(Df''_t(x).v)_t$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. C'est pourquoi nous nous intéressons aux groupes fondamentaux des groupes de difféomorphismes, voir [6].

Sur le disque Le groupe $\text{Diff}_+^1(\mathbb{D}^2)$ est contractile, donc de groupe fondamental trivial. Toute homotopie entre id et f donne alors la même fonction de mesure de pas, et donc le même nombre de Ruelle.

Sur l'anneau Le groupe fondamental $\pi_1(\text{Diff}_+^1(\mathbb{A}))$ est homomorphe à \mathbb{Z} . Les chemins $(r_{ta})_t, a \in \mathbb{Z}$ de rotations d'angle ta sont des lacets d'origine id , et ce sont des représentants des classes d'homotopie. C'est-à-dire que tout lacet d'origine id est homotope à un tel chemin, et donne la même fonction de pas comme celui. Considérons les applications induites $R_{ta} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1$. Dans la coordonnée de \mathbb{S}^1 , elles sont égales à l'identité (la trivialisatation étant fixée comme en 1.2).

Sur le tore Le groupe fondamental $\pi_1(\text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^2))$ est homomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Un chemin $(r_{t\alpha})_t, \alpha \in \mathbb{Q}$ formé par le groupe à un paramètre des rotations dans une direction rationnelle est un lacet d'origine id . Ces chemins sont des représentants des classes d'homotopie. Considérons les applications induites $R_{t\alpha} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1$. Dans la coordonnée de \mathbb{S}^1 , elles sont égales à l'identité (la trivialisatation étant fixée comme en 1.2).

1.3.3 (In-) Dépendance de la trivialisatation

Pour deux trivialisatations non-homotopes, il est évident que en général, les nombres de Ruelle correspondants diffèrent. Comme nous avons calculé pour une rotation en 1.2, la première trivialisatation donne un nombre de Ruelle nul, la deuxième un nombre de Ruelle non-nul :

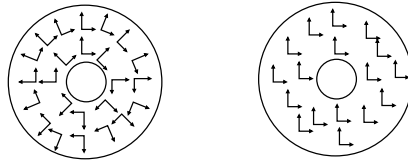


Figure 4: Deux trivialisatations non-homotopes du fibré tangent de l'anneau.

Par contre, si deux trivialisatations sont homotopes, alors les nombres de Ruelle seront les mêmes :

Soient \mathcal{T}' et \mathcal{T}'' deux trivialisatations du fibré tangent. À un vecteur tangent $\dot{v} \in T_x\mathbb{M}^2, x \in \mathbb{M}^2$, correspondent les vecteurs $v' = \mathcal{T}'(x, \dot{v})$ et $v'' = \mathcal{T}''(x, \dot{v}) \in \mathbb{R}^2$. Le produit scalaire $v' \cdot v''$ exprime l'angle entre ces vecteurs du plan; il exprime de quel angle différent les deux repères qui sont donnés dans le point de base x par les deux trivialisatations. Comme une trivialisatation est continue,

la différence des deux repères en un point y est proche de celle en x si y est proche de x . C'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un voisinage U de x tel que $w' \cdot w'' - v' \cdot v'' < \varepsilon$ si $\dot{w} \in T_y \mathbb{M}^2, y \in U$. Soit maintenant $x \in \mathbb{M}^2$ un point récurrent. Pour tout voisinage U de x il y a $k > 0$ tel que $f^k(x) \in U$. Pour une suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$, nous trouvons donc une suite (k_n) en \mathbb{N} tel que $w' \cdot w'' - v' \cdot v'' < \varepsilon_n$ si $\dot{w} \in T_f \mathbb{M}^2$. À chaque cran la différence entre les mesures de pas correspondantes $\Delta'_{f^{k_n}}(x) - \Delta''_{f^{k_n}}(x)$ est inclu dans $[m - \varepsilon_n, m + \varepsilon_n]$, où $m \in \mathbb{Z}$. Si il y a une homotopie $(T^s)_s$ entre les deux trivialisations, alors cet entier m est en fait nul, car $\Delta_{f^{k_n}}^s(x)$ dépend continûment de s : La famille $(Df_t^{k_n}(x).v^s)_t^s$ forment une homotopie à extrémités libres reliant les courbes $(Df_t^{k_n}(x).v')_t$ et $(Df_t^{k_n}(x).v'')_t$. Si ε_n est assez petit pour que $0 \notin B_{\varepsilon_n}$, alors $(Df_t^{k_n}(x).v^s)_t^s \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Dans la suite, on suppose que la trivialisations fixée est homotope à celle induite par la translation parallèle pour la géométrie euclidienne.

1.4 Dictionnaire

Chaque article qui traite le nombre de Ruelle en parle avec un langage différent. J'ai essayé de trouver ici une notation assez universelle, simplifiant le passage entre les différents points de vue. Pour la lecture des articles, j'ai établi un petit dictionnaire (au détail près si $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).

en [2] : Gambaudo et Ghys définissent une quantité $\omega_f(x, T), T \in \mathbb{R}$, qui pour $T \in \mathbb{N}$ est $[\Delta_{f^T}(x, v) - o]$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière, $v \in \mathbb{S}^1$ est un vecteur fixé, et $o \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ correspond à une origine choisie sur le cercle. Ils suggèrent la méthode ergodique pour prendre $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \omega_f(x, T)$ et l'intégrer.

en [3] : Gambaudo et Ghys utilisent une fonction $Ang_f(x)$ qui est égale à $\Delta_f(x, (1, 0))$, et définissent le nombre de Ruelle selon la méthode algébrique.

en [7] : Matsumoto et Nakayama définissent une fonction $\Delta f(x, v)$ qui est égale à $\Delta_f(x, v)$. Ils l'intègrent sur le fibré tangent unitaire.

en [8] : La définition originale est donnée par Ruelle, qui, au lieu de mesurer le pas, utilise une décomposition polaire de la différentielle en chaque point. Il se place dans le revêtement universel de $SL_2(\mathbb{R})$, où le chemin de matrices $(Df_t(x))_t$ se relève d'une manière unique en un chemin de matrices $(\widetilde{Df_t(x)})_t$ de sorte que $\widetilde{Df_0(x)}$ soit l'identité. La matrice finale $\widetilde{Df(x)}$ se décompose en une partie orthogonale et une partie symétrique positive, la partie orthogonale étant une rotation par un angle réel $\Theta(f_x)$. À l'aide du théorème ergodique il en prend la limite sur presque toute orbite, puis intègre. J'ai choisi de présenter plutôt l'approche où nous mesurons le pas, car je trouve que c'est la plus visuelle, et l'idée dynamique est plus claire.

2 Propriétés

2.1 Continuité

Proposition 1 *Le nombre de Ruelle*

$$\mathcal{R}_\mu : \text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2, \mu) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

est continu dans la topologie C^1 .

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{S}^1$ fixé, et soient $f, g \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2, \mu)$. Choisissons $\varepsilon_f > 0$ tel que $\varepsilon_f < \min_{x \in \mathbb{M}^2} (\min_{t \in [0,1]} (\|Df_t(x).v\|))$. Alors la ε_f -bande autour de la courbe $Df_t(x).v$ ne contient pas 0. Si pour $x \in \mathbb{M}^2$ $\max_t (\|Df_t(x).v - Dg_t(x).v\|) < \varepsilon_f$, alors la courbe $Dg_t(x).v$ est incluse dans cette bande, et donc $|\Delta_f(x) - \Delta_g(x)| < \varepsilon_f$. Une convergence uniforme des différentielles implique donc une convergence uniforme des fonctions de mesures de pas. Donc convergence de leurs intégrales, donc des nombres de Ruelle.

□

Par contre :

Proposition 2 *Le nombre de Ruelle*

$$\mathcal{R}_\mu : \text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2, \mu) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

n'est en général pas continu dans la topologie C^0 .

Démonstration. Nous donnons un contre-exemple sur le disque. Considérons une suite de fonctions C^1 $\varrho_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 0$ telles que :

- ϱ_n est constante égale à 1 au voisinage de 0,
- $\varrho_n(r)$ est nulle pour $r \geq \frac{1}{n}$,
- $\int_0^1 r \varrho_n(r) dr = 1$ pour tout n .

La suite correspondante $(F_{\varrho_n})_n$ de rotations sur le disque converge uniformément vers l'identité. En effet, la fonction F_{ϱ_n} est égale à l'identité en dehors du disque de rayon $\frac{1}{n}$, en particulier la distance entre un point et son image est plus petit que $\frac{1}{n}$. Comme nous avons calculé en 1.2

$$\mathcal{R}_\lambda(F_{\varrho_n}) = 2\pi \int_0^1 r \varrho_n(r) dr = 2\pi.$$

Or, l'invariant de Ruelle de l'identité est évidemment nul - \mathcal{R}_λ n'est donc pas continu dans la topologie C^0 .

2.2 Propriétés algébriques

Quasimorphisme homogène Comme nous avons vu dans la définition selon la méthode algébrique, la fonction $\mathcal{R}_\mu : \text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ est un quasimorphisme homogène.

Invariance différentiable Il en découle directement que le nombre de Ruelle \mathcal{R}_μ est invariant par conjugaison différentiable ; les quasimorphismes homogènes étant des fonctions de classes. En effet : Soient $f, h \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2, \mu)$. Nous avons

$$|\mathcal{R}_\mu(h \circ f^n \circ h^{-1}) - \mathcal{R}_\mu(h) - \mathcal{R}_\mu(f^n \circ h^{-1})| \leq D$$

et

$$|\mathcal{R}_\mu(f^n \circ h^{-1}) - \mathcal{R}_\mu(f^n) - \mathcal{R}_\mu(h^{-1})| \leq D.$$

En additionnant des deux cotés nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n|\mathcal{R}_\mu(h \circ f \circ h^{-1}) - \mathcal{R}_\mu(f)| = |\mathcal{R}_\mu(h \circ f^n \circ h^{-1}) - \mathcal{R}_\mu(f^n)| \leq 2D.$$

Donc

$$\mathcal{R}_\mu(h \circ f \circ h^{-1}) = \mathcal{R}_\mu(f).$$

Homomorphisme sur un sousgroupe Soient $f, g \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2, \mu)$. Supposons que μ se relève en une mesure ν , invariante par f_* , g_* et $(f \circ g)_*$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\mu(f \circ g) &= \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_{f \circ g}(x, v) d\nu \\ &= \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_g(x, v) d\nu + \int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_f(g(x), v + \Delta_g(x, v)) d\nu \\ &= \mathcal{R}_\mu(g) + \mathcal{R}_\mu(f). \end{aligned}$$

Pour certains sous-groupes de $\text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2, \mu)$, on peut construire un relevé ν de μ qui marche sur le sous-groupe entier, voir [5]. Sur un tel sous-groupe, \mathcal{R}_μ est un homomorphisme.

2.3 Invariance topologique

Tandis que l'invariance différentiable découle directement du fait d'être un quasimorphisme homogène, l'invariance topologique est une propriété plus profonde, qui est démontrée en [2]. En fait, pour qu'elle soit vraie, il faut que les mesures invariantes n'aient pas d'atomes. Contre-exemple, Naishul.

Théorème 1 *Soient f et g deux difféomorphismes du disque homotope à l'identité, l'identité près du bord, qui préservent respectivement les mesures de probabilités non-atomiques μ_f et μ_g sur \mathbb{D}^2 . Si f et g sont conjugués, i.e., s'il y a un homéomorphisme h tel que $g = h \circ f \circ h^{-1}$, et si $h_*(\mu_f) = \mu_g$, alors leurs nombres de Ruelle R_{μ_f} et R_{μ_g} sont égaux.*

Démonstration. Notons par $B_r(x)$ la boule fermée de centre x et de rayon r . Pour $0 < \alpha < \varepsilon$, et x dans \mathbb{D}^2 , nous dirons qu'un difféomorphisme φ possède une (α, ε, x) -chaîne si nous pouvons trouver $n_1 \leq 0 \leq n_2$ et $y \in \mathbb{D}^2$ tels que :

- $\varphi^n(y)$ est contenu dans $B_\varepsilon(\varphi^n(x))$ pour $n_1 \leq n \leq n_2$ mais
- $\varphi^{n_i}(y)$ n'est pas contenu dans $B_\alpha(\varphi^{n_i}(x))$ pour $i = 1, 2$.

La quantité $n_2 - n_1$ est appelée la *longueur* de la chaîne.

La clé pour la preuve est le lemme suivant :

Lemme 3 Soit φ dans $\text{Diff}^\infty(\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2, \mu)$, où la mesure de probabilité μ est sans atome. Alors, pour presque tout point x dans \mathbb{D}^2 et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α dans $]0, \varepsilon[$, pour lequel φ possède des (α, ε, x) -chaînes de longueurs arbitrairement grandes.

Démonstration. Remarquons que presque tout point x de \mathbb{D}^2 a la propriété que pour tout $r > 0$, la boule $B_r(x)$ est de mesure strictement positive. En effet ; Si un point du disque est centre d'une boule de mesure nulle, alors il est contenu dans une boule plus petite, de mesure nulle avec rayon rationnel et dont le centre est à coordonnées rationnelles. Or, la réunion des boules rationnelles de mesure nulle est une réunion denombrable et donc de mesure nulle.

Soit maintenant x un point avec la propriété, et fixons $\varepsilon > 0$ et α dans $]0, \varepsilon[$. Considérons les boules $B_r(x)$ avec $r < \alpha$. Comme φ est continu, nous savons que le plus petit est r , le plus longtemps $\varphi^n(B_r(x))$ va rester dans $B_\alpha(\varphi^n(x)) \subset B_\varepsilon(\varphi^n(x))$ dans le futur et dans le passé. C'est-à-dire que, si φ ne possède pas de (α, ε, x) -chaînes de longueurs arbitrairement grandes, c'est qu'il existe un petit ϱ pour lequel tous les points de $B_\varrho(x)$ ont soit leur orbite future qui reste à une distance inférieure à α de l'orbite future de x , soit leur orbite passée qui reste à une distance inférieure à α de l'orbite passée de x . La boule $B_\varrho(x)$ est ainsi la réunion des deux ensembles :

$$\alpha_\varrho(x) = \{y \in B_\varrho(x) | \varphi^n(y) \in B_\alpha(\varphi^n(x)), \forall n \leq 0\}$$

$$\omega_\varrho(x) = \{y \in B_\varrho(x) | \varphi^n(y) \in B_\alpha(\varphi^n(x)), \forall n \geq 0\}.$$

Comme $B_\varrho(x)$ est de mesure non nulle, au moins un de ces deux ensembles est de mesure non nulle. Pour fixer les notations, supposons que c'est $\omega_\varrho(x)$. Imaginons nous que l'orbite future de $\omega_\varrho(x)$ s'écrase sur l'orbite future de x . Or, l'orbite future de x possède un point d'accumulation p , qui par l'invariance de la mesure, serait charger du poids de la mesure non-nulle de $\omega_\varrho(x)$. Ceci est impossible, car μ est non-atomique. Il existe donc α' dans $]0, \varepsilon[$ et une suite croissante (n_j) , avec $n_0 = 0$, tels que $\varphi^{n_j}(y) \notin B_{\alpha'}(\varphi^{n_j}(x))$ pour tout $j \geq 0$. Comme $\varphi^n(y) \in B_\varepsilon(\varphi^n(x))$ pour tout $n \geq 0$, nous avons construit des $(\alpha', \varepsilon, x)$ -chaînes de longueurs arbitrairement grandes.

□

Esquissons seulement la suite de la preuve.

Pour tout $x \in \mathbb{M}^2$, f induit un homéomorphisme F_x sur le demi-plan $\mathbb{R} \times [0, \infty[$: D'abord nous relevons f et/ou prolongeons par l'identité, et obtenons un difféomorphisme \tilde{f} du plan. Si $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ est un relevé de $x \in \mathbb{M}^2$, et si $\tau_{\tilde{x}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est la translation telle que $\tilde{x} \mapsto (0, 0)$, alors l'application $\tilde{f}_x = \tau_{\tilde{x}} \circ \tilde{f} \circ \tau_{\tilde{x}}^{-1}$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 qui fixe l'origine. Ôtons l'origine à \mathbb{R}^2 , et "compactifions" par le cercle des directions orientées. Nous obtenons un anneau $A_x = \mathbb{S}^1 \times [0, \infty[$ (paramétré en coordonnées polaires). f_x induit sur A_x un homéomorphisme \tilde{f}_x par

$$\begin{aligned} - \tilde{f}_x(y) &= f_x(y) \text{ pour } "y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}" \\ - \tilde{f}_x(u) &= \frac{D\tilde{f}_x(0).u}{\|D\tilde{f}_x(0).u\|} = \frac{Df(x).u}{\|Df(x).u\|} \text{ pour } u \in \mathbb{S}^1. \end{aligned}$$

Maintenant nous pouvons relever \tilde{f}_x en un homéomorphisme F_x du revêtement universel $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ de l'anneau. De même, nous obtenons pour tout $x \in \mathbb{M}^2$ un homéomorphisme G_x du demi-plan. Nous appliquons cette construction aussi à h , pour obtenir un homéomorphisme seulement sur $\mathbb{S}^1 \times]0, \infty[$, puis

sur $\mathbb{R} \times]0, \infty[$, car h n'est par forcément différentiable en x .

Nous obtenons ensuite des majorations qui ne sont valables que quand on est assez proche du bord du demi-plan (là, les homéomorphismes F_x et G_x ressemblent à Δ_f et Δ_g), mais pas trop proche (car on n'y contrôle pas bien H_x). Pour un x qui a la propriété du lemme c'est bon, et les majorations donnent l'égalité des limites $\lim \frac{1}{n} \Delta_{g^n}(h(x))$ et $\lim \frac{1}{n} \Delta_{f^n}(x)$. Puisque μ -presque tout x a la propriété du lemme, nous pouvons intégrer et obtenons

$$\mathcal{R}_{\mu_f}(f) = \mathcal{R}_{\mu_g}(g).$$

2.4 Annulation

Matsumoto et Nakayama démontrent en [7] que pour tout $f \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^2)$, il existe une mesure de probabilité μ f -invariante telle que $\mathcal{R}_\mu(f) = 0$. En fait, cela marche non seulement sur le tore mais aussi sur l'anneau. Dans la suite, \mathbb{M}^2 sera soit l'anneau, soit le tore, et $\widetilde{\mathbb{M}}^2$ designera son revêtement universel : $\widetilde{\mathbb{A}} = \mathbb{R} \times [0, 1]$ et $\widetilde{\mathbb{T}}^2 = \mathbb{R}^2$. Une droite verticale sur l'anneau sera un segment $\{x\} \times [0, 1]$.

Théorème 2 *Pour tout $f \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2)$ il existe une mesure de probabilité f -invariante μ avec $\mathcal{R}_\mu(f) = 0$.*

Démonstration. La clé pour la preuve est le lemme suivant :

Lemme 4 *Pour tout $f \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{M}^2)$, la fonction $\Delta_f : \mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ s'annule quelque part.*

En effet, cela implique le théorème :

Appliquons le lemme aux itérées f^n , $n \geq 1$. On obtient des points $(x_n, v_n) \in \mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1$ tels que $\Delta_{f^n}(x_n, v_n) = 0$. Rappelons que pour tout $(x, v) \in \mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_{f^n}(x, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_f(f_*^i(x, v)). \quad (3)$$

Posons

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta(f_*^i(x_n, v_n)),$$

où $\delta(\cdot)$ est la mesure de Dirac. Ce sont des mesures de probabilité sur $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1$ avec la propriété

$$\int_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1} \Delta_{f^n}(x, v) d\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_f(f_*^i(x_n, v_n)) = \Delta_{f^n}(x_n, v_n) = 0.$$

Cependant, ces mesures ne sont pas forcément f_* -invariantes. L'espace des mesures est compact. Si ν est un point d'accumulation de la suite des mesures de probabilité $(\nu_n)_n$, alors ν est invariant par F et la mesure $\mu = \pi_*(\nu)$ sur \mathbb{T}^2 satisfait $\mathcal{R}_\mu(f) = 0$.

Pour démontrer lemme 4 nous avons besoin de mesurer $\Delta_f(x, v)$ d'une autre manière. Nous décomposons le difféomorphisme f à l'aide d'une partition de

l'unité en $f = f_r \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$, où chaque f_i a son support dans un ballon de rayon $\frac{1}{4}$. Soit $\tilde{f}_i : \widetilde{\mathbb{M}^2} \rightarrow \widetilde{\mathbb{M}^2}$ le relevé de f_i qui coïncide avec une translation par le vecteur $(i, 0)$ en dehors des relevés des supports de f_i , et soit $\tilde{f} = \tilde{f}_r \circ \dots \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1$. Nous avons alors pour tout $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{M}^2}$ et $i = 1, \dots, r$

$$i - \frac{1}{2} < p_1 \circ \tilde{f}_i(\tilde{x}) - p_1(\tilde{x}) < i + \frac{1}{2},$$

où $p_1 : \widetilde{\mathbb{M}^2} \rightarrow \mathbb{R}$ est la projection sur le premier facteur. Donc pour toute droite l verticale, les courbes $l, \tilde{f}_1(l), \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1(l), \dots, \tilde{f}_r \circ \dots \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1(l)$ sont deux à deux disjointes, et leurs projections par p_1 ont une distance d'au moins $\frac{1}{2}$ l'une de l'autre. Remarquons que chaque $\tilde{f}_i \circ \dots \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1(l), 1 \leq i \leq r$, est C^1 -conjugué à une translation de $\widetilde{\mathbb{M}^2}$.

Pour tout point $(\tilde{x}, v) \in \widetilde{\mathbb{M}^2} \times \mathbb{S}^1$, il existe une courbe de classe C^1 dans le plan, \tilde{f} -invariante et proprement plongée, tangente à (\tilde{x}, v) .

En effet : Soit $(\tilde{x}, v) \in \widetilde{\mathbb{M}^2} \times \mathbb{S}^1$, et soit l la droite verticale passant par \tilde{x} . Comme l et $\tilde{f}_1(l)$ sont disjointes, il y a une courbe simple c_1 reliant \tilde{x} et $\tilde{f}_1(\tilde{x})$, tangente à (\tilde{x}, v) et $\tilde{f}_{1*}(\tilde{x}, v)$, qui est contenue dans la région bornée par l et $\tilde{f}_1(l)$, sauf point de départ et point final.

Similairement pour tout i il y a une courbe simple c_i reliant $\tilde{f}_{i-1} \circ \dots \circ \tilde{f}_1(\tilde{x})$ avec $\tilde{f}_i \circ \dots \circ \tilde{f}_1(\tilde{x})$, tangente à $(\tilde{f}_{i-1} \circ \dots \circ \tilde{f}_1)_*(\tilde{x}, v)$ et $(\tilde{f}_i \circ \dots \circ \tilde{f}_1)_*(\tilde{x}, v)$, qui est contenue dans la région bornée par $\tilde{f}_{i-1} \circ \dots \circ \tilde{f}_1(l)$ et $\tilde{f}_i \circ \dots \circ \tilde{f}_1(\tilde{x})$ (sauf point de départ et point final). La concaténation $c_1 \circ \dots \circ c_r$ est alors une courbe tangente à (\tilde{x}, v) et $\tilde{f}_*(\tilde{x}, v)$. La concaténation bi-infinie γ des courbes $\tilde{f}^n(c_1 \circ \dots \circ c_r)$ forme une courbe simple \tilde{f} -invariante tangente à (\tilde{x}, v) qui est proprement plongée car les $\tilde{f}_i \circ \dots \circ \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1(l), 1 \leq i \leq r$, sont C^1 -conjugués à des translations.

Pour une telle courbe γ définissons $\hat{\Delta}_\gamma(\tilde{x}, v)$ à être la déviation de l'angle des vecteurs tangents de γ de \tilde{x} à $\tilde{f}(\tilde{x})$.

Lemme 5

$$\Delta_f(x, v) = \hat{\Delta}_{\tilde{f}}(\tilde{x}, v).$$

En effet :

La valeur de $\hat{\Delta}_\gamma(\tilde{x}, v)$ est indépendante du choix de la courbe γ : soient γ_0, γ_1 deux courbes \tilde{f} -invariantes, proprement plongées, tangentes à (\tilde{x}, v) . Il y a une homotopie γ_t de courbes \tilde{f} -invariantes, proprement plongées, tangentes à (\tilde{x}, v) , reliant γ_0 à γ_1 . La valeur $\hat{\Delta}_{\gamma_t}(\tilde{x}, v)$ dépend continûment de t , et la différence de deux est forcément entière, donc zero. Notons alors plutôt $\hat{\Delta}_{\tilde{f}}(\tilde{x}, v)$ au lieu de $\hat{\Delta}_\gamma(\tilde{x}, v)$. La fonction $\hat{\Delta}_{\tilde{f}}(\tilde{x}, v)$ dépend continûment de (\tilde{x}, v) . En plus, pour tout relevé \tilde{x} de x , tout i , on a

$$\hat{\Delta}_{\tilde{f}_i}(\tilde{x}, v) = \Delta_{f_i}(x, v). \quad (\#)$$

En effet, la différence est constante entière, et si x est en dehors du support de f_i , alors les deux fonctions sont zero. Comme elles sont continues, cela implique qu'elles sont égales. Nous avons

$$\Delta_{f_r \circ \dots \circ f_1} = \sum_{i=1}^r \Delta_{f_i} \circ f_{i-1*} \dots \circ f_{1*}.$$

En choisissant γ comme dans la construction, nous voyons que aussi

$$\hat{\Delta}_{\tilde{f}_r \circ \dots \circ \tilde{f}_1} = \sum_{i=1}^r \hat{\Delta}_{\tilde{f}_i} \circ \tilde{f}_{i-1*} \circ \dots \circ \tilde{f}_{1*},$$

donc (#) donne le resultat.

Maintenant nous pouvons démontrer lemme 4. On procède par l'absurde. Supposons que Δ_f ne s'annule pas sur tout $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1$. Comme Δ_f est continue et la domaine est compact, cela veut dire que Δ_f reste en dessous ou en dessus d'une constante negative resp. positive. Pour fixer les idées, supposons que pour tout $(x, v) \in \mathbb{M}^2 \times \mathbb{S}^1$, on ait $\Delta_f(x, v) \geq c$ pour une constante $c > 0$. Lemme 5 implique lemme 4 : Nous pouvons mesurer l'angle $\angle \gamma'(t) \in \mathbb{R}$ du vecteur tangent $\gamma'(t)$ par rapport à $\gamma'(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, en considérant la déviation le long de γ . Nous pouvons paramétrer la courbe γ de façon à ce que la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{f}(\gamma(t)) = \gamma(h(t))$ satisfait $h(t) > t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $\Delta_f \geq c$ implique que $\angle \gamma'(t) \rightarrow \pm\infty$. Il existe donc un $a > 0$ tel que $\angle \gamma'(t) > 2\pi$ pour $t > a$, et $\angle \gamma'(t) < 2\pi$ pour $t < -a$. Considérons un cercle Γ du plan qui encercle l'arc $\gamma([-a, a])$. Soit b le plus petit nombre $b > a$ tel que $\gamma(b) \in \Gamma$, et c le plus grand nombre $c < -a$ tel que $\gamma(c) \in \Gamma$. Le sous-arc de Γ borné par $\gamma(b)$ et $\gamma(c)$ forme avec l'arc $\gamma([c, b])$ une courbe fermée simple. Soit Λ une courbe fermé simple et lisse, obtenue de celle-là par lisser les coins à $\gamma(c)$ et $\gamma(b)$. Alors la déviation de l'angle autour de Λ (égale à 2π fois le degré de l'application de Gauss de Λ) est plus grand que 2π , ce qui est absurde. Nous avons ainsi démontré lemme 4.

□

Remarque : Ici, il était crucial d'avoir fixé la bonne trivialisation. Le dernier argument n'est pas valable si nous utilisons une trivialisation non-homotope à celle induit par le transport parallèle de la géométrie euclidienne.

3 Plus d'exemples

3.1 Hamiltoniens

En [2] est traité l'exemple des flots hamiltoniens. Soit $H : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ , nulle près du bord. Supposons pour simplifier que H ne possède qu'un nombre fini de valeurs critiques. Soit ζ une valeur régulière - alors $H^{-1}(\zeta)$ est une réunion finie de courbes fermées simples et disjointes. On attribue une indice $+1$ ou -1 à chacune de ces courbes, suivant que H croît ou décroît quand nous traversons la courbe de l'intérieur vers l'extérieur. Nous notons $n_H(\zeta)$ la somme des indices des composantes de $H^{-1}(\zeta)$. Nous montrons dans la suite que, si φ_H^t est le flot hamiltonien qui correspond à H , alors son nombre de Ruelle pour l'élément d'aire est donné par :

$$\mathcal{R}_{aire}(\varphi_H^t) = t \int_{\mathbb{R}} n_H(\zeta) d\zeta.$$

Considérons une fonction $\varrho : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et sans point critique, avec $0 < r_1 < r_2 < 1$. soit A_{r_1, r_2} l'anneau $x \in \mathbb{R}^2, r_1 \geq \|x\| \geq r_2$ et $H : A_{r_1, r_2} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $H(x) = \varrho(\|x\|)$. Le flot hamiltonien correspondant $\varphi_H^t(x)$ laisse les cercles $\{y, \|y\| = \|x\|\}$ invariants, et est y restreint la rotation de vitesse $\frac{\varrho'(\|x\|)}{2\pi\|x\|}$. Considérons maintenant un difféomorphisme qui coïncide avec φ_H^t sur A_{r_1, r_2} . Nous pouvons alors calculer l'invariant de Ruelle de ce difféomorphisme pour la restriction $\lambda_{A_{r_1, r_2}}$ de la mesure de Lebesgue λ à A_{r_1, r_2} . Nous trouvons, en posant $r = \|x\|$,

$$\mathcal{R}_{\lambda_{A_{r_1, r_2}}}(\varphi_H^t) = \int_{r_1}^{r_2} t \frac{\varrho'(r)}{2\pi r} 2\pi r dr = t(\varrho(r_2) - \varrho(r_1)) = t \int_{\mathbb{R}} n(r) dr,$$

où n est la fonction indicatrice de l'intervalle $[\varrho(r_2), \varrho(r_1)]$ affectée du signe $+1$ ou -1 suivant que ϱ est croissante ou décroissante.

Soit $[\zeta_1, \zeta_2]$ un intervalle de \mathbb{R} qui ne contient pas de valeur critique de H . Le préimage $H^{-1}[\zeta_1, \zeta_2]$ est alors une réunion finie d'anneaux. Soit A l'un de ces anneaux. Nous pouvons envoyer A sur un anneau du type A_{r_1, r_2} par un difféomorphisme Φ préservant λ de sorte que $H \circ \Phi^{-1} : A_{r_1, r_2} \rightarrow \mathbb{R}$ ne dépend que de la norme de x . En utilisant le cas précédent et l'invariance différentiable du nombre de Ruelle, nous obtenons pour la restriction λ_A de λ à A :

$$\mathcal{R}_{\lambda_A}(\varphi_H^t) = t(\zeta_2 - \zeta_1) = t \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} n(r) dr$$

où $n(r) = +1$ ou -1 suivant que H croît ou décroît lorsque l'anneau est traversé de l'intérieur vers l'extérieur.

Considérons la mesure $\lambda_{H^{-1}[\zeta_1, \zeta_2]}$, restriction de λ à $H^{-1}[\zeta_1, \zeta_2]$. $H^{-1}[\zeta_1, \zeta_2]$ est la réunion finie d'anneaux et nous venons de calculer le nombre de Ruelle sur chacun d'eux. Nous trouvons :

$$\mathcal{R}_{\lambda_{H^{-1}[\zeta_1, \zeta_2]}}(\varphi_H^t) = t \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} n_H(\zeta) d\zeta$$

Finalement, notons $\vartheta_1 < \dots < \vartheta_k$ les valeurs critiques de H . Pour $\varepsilon > 0$ petit, nous pouvons obtenir le nombre de Ruelle pour la restriction de *aire* à $H^{-1}([\vartheta_1 +$

$\varepsilon, \vartheta_2 - \varepsilon] \cup [\vartheta_2 + \varepsilon, \vartheta_3 - \varepsilon] \cup \dots \cup [\vartheta_k + \varepsilon, \vartheta_k - \varepsilon]$. En faisant tendre ε vers 0, nous trouvons comme annoncé :

$$\mathcal{R}_\lambda(\varphi_H^t) = t \int_{\mathbb{R}} n_H(\zeta) d\zeta.$$

3.2 Fer à cheval

Si un difféomorphisme f a un fer à cheval, considérons la restriction de la dynamique sur l'ensemble minimal Λ . Dans le modèle classique du fer à cheval, Λ est recouvert par deux rectangles R_0 et R_1 , tels que $f|_{R_0}$ et $f|_{R_1}$ sont des applications affines de parties linéaires

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

respectivement

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Pour $x \in R_0$, nous avons donc $\Delta_f(x, v) = 0$, et pour $x \in R_1$ nous avons $\Delta_f(x, v) = \frac{1}{2}$, pour tout v . Toute mesure μ f-invariante est supportée sur Λ , qui est attractif est donc l'ensemble non-errant. Ainsi $\mathcal{R}_\mu(f) \in [0, \frac{1}{2}]$ pour toute mesure de probabilité μ f-invariante.

La dynamique est conjuguée au shift sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ par un application par $x \mapsto (\omega_n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$, où $\omega_n(x) = 0$ où 1 selon que $\varphi^n(x)$ est dans R_0 où dans R_1 . Le système a deux points fixes, correspondants aux suites $0 = 0000\dots$ et $1 = 1111\dots$. Nous calculons $\mathcal{R}_{\delta_0} = 0$ et $\mathcal{R}_{\delta_1}(f) = \frac{1}{2}$, et si par exemple x est un point correspondant à la suite périodique $\dots 001001001\dots$, et μ_x est la mesure f-invariante supportée sur l'orbite de x , alors

$$\mathcal{R}_{\mu_x}(f) = \frac{1}{3}(0 + 0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{6}.$$

Pour tout $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$, il existe une mesure de probabilité μ f-invariante avec $\mathcal{R}_\mu(f) = \alpha$. Il suffit de poser $\mu = 2\alpha\delta_1 + (1 - 2\alpha)\delta_0$.

Rappelons que dans le cas de mesures atomiques, le nombre de Ruelle n'est pas un invariant topologique.

References

- [1] Nicolas Bourbaki. *Intégration*, volume 6. Hermann, 1959.
- [2] Jean-Marc Gambaudo et Étienne Ghys. Enlacements asymptotiques. *Topology*, 36(6) :1355–1379, 1997.
- [3] Jean-Marc Gambaudo and Étienne Ghys. Commutators and diffeomorphisms of surfaces. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 24 :1591–1617, 2004.
- [4] Jean-Marc Gambaudo and Elisabeth Pécou. A topological invariant for volume preserving diffeomorphisms. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 15 :535–541, 1995.
- [5] Takashi Inaba and Hiromichi Nakayama. Invariant fiber measures of angular flows and the ruelle invariant. *J. Math. Soc. Japan*, 56(1) :17–29, 2004.
- [6] Clifford J. Earle and James Eells. A fibre bundle description of teichmüller theory. *J. Diff. Geom.*, 3 :19–43, 1969.
- [7] Shigenori Matsumoto and Hiromichi Nakayama. On the ruelle invariants for diffeomorphisms of the two torus. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 22 :1263–1267, 2002.
- [8] David Ruelle. Rotation numbers for diffeomorphisms and flows. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.*, 42(1) :109–115, 1985.