

Paris Sud 11
ENS de Cachan
Mémoire

Maître de mémoire : Frédéric Le Roux

Une introduction au problème généralisé de la réalisation de Nielsen

Kévin Corbineau

Orsay, le September 11, 2010

Abstract

En premier lieu je tiens à remercier mon maître de mémoire, Frédéric Le Roux. Je tiens non seulement à le remercier pour ses conseils pertinents mais surtout pour sa gentillesse et sa patience.

Le sujet de ce mémoire porte sur le problème généralisé de la réalisation de Nielsen, qui date d'une conjecture de Jakob Nielsen en 1932.

Pour une surface fermée Σ_g de genre g , on dispose du Groupe Modulaire de cette surface M_g qui est le groupe des classes d'isotopies des difféomorphismes de la surface Σ_g qui préservent l'orientation. On a la projection canonique de passage au quotient $p : Diff(\Sigma_g) \rightarrow M_g$. Le problème posé est de savoir s'il existe une section à cette projection, c'est-à-dire s'il existe un morphisme de groupe $s : M_g \rightarrow Diff(\Sigma_g)$.

On se propose de démontrer qu'il existe une infinité de g tel qu'il n'existe pas de section à la projection canonique du groupe des difféomorphismes de Σ_g préservant l'orientation sur le Groupe Modulaire M_g .

Le schéma de démonstration consiste à raisonner par l'absurde. Dans le chapitre 1, on montre que l'existence d'une section entraîne une obstruction forte à l'existence de classes caractéristiques de Σ_g fibré. Les chapitres 2 et 3 consistent à construire des Σ_g -fibrés qui ne vérifient pas ces conditions.

Contents

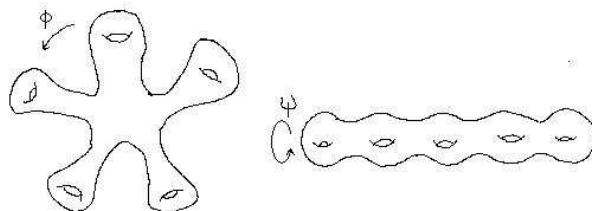
1	Section et obstruction	8
1.1	Quelques généralités sur les fibrés en surfaces	8
1.1.1	Rappels sur les classes caractéristiques	8
1.1.2	Classes caractéristiques sur les fibrés en surfaces	10
1.1.3	Morphisme d'holonomie	12
1.1.4	Caractérisation des fibrés en surface	13
1.2	Obstruction	15
1.2.1	Conséquence de l'existence d'une section	15
1.2.2	Liens avec les classes caractéristiques	16
1.3	Annexe : démonstration du théorème de Bott	16
2	Un premier calcul	20
2.1	Revêtements ramifiés	20
2.2	Revêtement des surfaces fermées	23
2.3	Un premier espace fibré	24
2.3.1	Construction	24
2.3.2	Calcul de e_1	27
2.3.3	Calcul de a	29
2.3.4	Conclusion	30
3	Généralisation	31
3.1	Premier procédé	31
3.2	Le théorème de Dehn-Nielsen-Baer	32
3.3	Deuxième procédé	33
3.4	Troisième procédé	34
3.5	m -construction	39
3.6	Calcul de e_i	40
3.7	Conclusion	45
	Bibliographie	46

Introduction

Dans ce mémoire, l'attention sera tournée vers le Groupe Modulaire d'une surface fermée.

Pour une surface fermée Σ_g de genre $g \geq 1$ on peut s'intéresser au groupe $Diff^+(\Sigma_g)$ des difféomorphismes de cette surface qui préservent l'orientation. Plus particulièrement, on regarde les éléments de ce groupe à isotopie près. Une isotopie entre deux applications est une homotopie h_t entre ces deux applications telle que pour tout t est un homéomorphisme pour tout temps t . Le lecteur non familier avec la théorie de l'homotopie ou tout autre définition de nature homologique ou cohomologique pourra se référer au livre d'Hatcher [5]. Deux éléments sont dans une même classe d'isotopie si et seulement si il existe une isotopie entre ces deux difféomorphismes. Le groupe des classes d'isotopie est appelé le Groupe Modulaire M_g de la surface Σ_g . La toute première question qui se pose est de savoir si ce groupe n'est pas trivial. Donnons deux exemples d'éléments non triviaux d'ordre fini.

Soit $g = 5$ et considérons la surface Σ_5 .



Soient alors les deux éléments représentés par ϕ et ψ qui sont respectivement la rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ et la rotation d'angle π autour de l'axe. Pour voir que la classe de ϕ est non triviale, on peut par exemple regarder l'action de ϕ sur un lacet autour d'une anse. Si σ désigne ce lacet, alors les puissances $\phi^i(\sigma)$ ne sont pas isotopiquement équivalentes. Ainsi, ϕ n'est pas dans la classe d'isotopie de l'identité.

A ce stade, il semble pertinent de citer un résultat de Baer (voir [2]). Il montra que sur les surfaces Σ_g , la notion d'isotopie et d'homotopie étaient équivalentes. Ainsi, on dispose d'une autre interprétation du Groupe Modulaire. On peut le définir comme les

classes d'homotopie d'homéomorphismes préservant l'orientation.

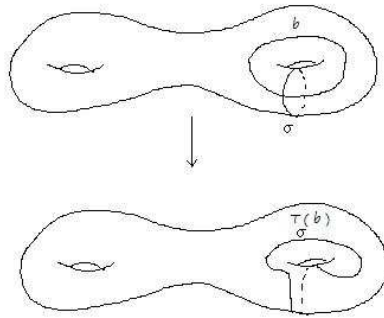
Le Groupe Modulaire ne contient pas que des éléments d'ordre fini. Introduisons les éléments d'ordre infini les plus simples du Groupe Modulaire : les twists de Dehn. Pour les définir, on commence par définir la torsion T sur un anneau $A = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ par $T(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t)$ qui fixe le bord de A .

Revenons au cadre générale. Soient une surface Σ_g et σ un lacet simple (sans points double) dans Σ_g . On définit le twist de Dehn T_σ le long de σ . Soit un voisinage régulier N de σ . Le voisinage régulier est difféomorphe à un anneau A . Notons $f : N \rightarrow A$ ce difféomorphisme. Alors on définit T_σ en appliquant la torsion élémentaire T sur N , et en fixant le reste de la surface :

$$T_\sigma(x) = x \text{ si } x \in \Sigma_g - N$$

$$T_\sigma(x) = f^{-1} \circ T \circ f(x) \text{ si } x \in N.$$

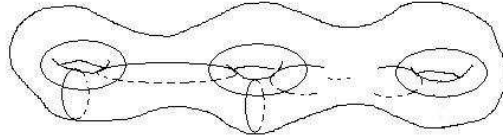
Pour mieux appréhender cet objet, on peut voir son action sur les lacets de Σ_g .



Les twists de Dehn induisent des éléments non triviaux dans le Groupe Modulaire s'ils sont définis à partir de lacets non triviaux (non homotopes à un point). Pour le montrer à partir de l'exemple précédent, on peut introduire le nombre d'intersection de deux lacets. Il s'agit du minimum des points d'intersection pour les classes d'homotopie de ces deux lacets : $i(a, b) = \min_{\alpha, \beta} (\alpha \cap \beta)$ pour α et β décrivant les éléments de la classe d'homotopie de a et b respectivement. On dira que deux éléments α et β qui réalisent le minimum d'intersection sont en position minimale. Alors deux lacets ayant un nombre d'intersection non nul ne sont pas homotopes. Si l'on revient à l'exemple dessiné, on prend b un lacet tel que $i(\sigma, b) = 1$. Alors $i(T_\sigma(b), b) = 1$ et l'action de T_σ est non triviale sur les lacets et définit un élément non trivial du Groupe Modulaire.

Toujours en ayant cet exemple en tête, il est assez clair que l'ordre des twists de Dehn est infini. Un résultat important affirme que le Groupe Modulaire M_g est engendré par un nombre fini de twists de Dehn. Historiquement, Dehn montra que $2g(g - 1)$ twists de Dehn suffisaient à engendrer M_g dans les années 1920. Mumford améliora le résultat en 1967 en précisant qu'on pouvait considérer seulement les twists le long de lacets non

séparant (qui signifie que $\Sigma_g - \alpha$ est connexe). Finalement en 1979, Humphries obtint la forme la plus aboutie : le Groupe Modulaire M_g est engendré par $2g + 1$ twists de Dehn le long des lacets suivants :



Les twists de Dehn le long de ces lacets qui engendrent M_g sont souvent appelés les générateurs de Humphries.

L'action des éléments du Groupe Modulaire sur les lacets non triviaux joue un rôle plus important encore. Il existe une méthode, dite méthode d'Alexander, qui permet de déterminer si deux éléments du groupe des homéomorphismes de la surface Σ_g appartiennent ou non à la même classe du Groupe Modulaire. Cela revient exactement à déterminer si la classe d'homotopie d'un homéomorphisme est triviale ou non. La méthode s'appuie sur le lemme d'Alexander, qui affirme que le Groupe Modulaire du disque est trivial. La méthode d'Alexander s'applique plus généralement sur des surfaces compactes. On peut cependant l'énoncer et l'appliquer dans le cas particulier des surfaces fermées Σ_g avec les lacets qui définissent les générateurs de Humphries. Notons ces lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, avec $n = 2g + 1$.

Soit alors ϕ un homéomorphisme de Σ_g qui préserve l'orientation. S'il existe σ une permutation de $\{1, \dots, n\}$ tel que $\phi(\gamma_i)$ est homotope à $\gamma_{\sigma(i)}$, alors on $\phi(\cup \gamma_i)$ est homotope à $\cup \gamma_i$. On peut considérer $\cup \gamma_i$ comme un graphe Γ de Σ_g , où les arrêtes de Γ seraient les morceaux de courbes définis par les intersections des lacets, et les sommets seraient les points d'intersection des γ_i . Alors ϕ induit ϕ_* un automorphisme de Γ .

Le critère affirme que si ϕ_* fixe tout les sommets et les arrêtes de Γ en préservant l'orientation alors ϕ est isotope à l'identité. Sinon, il est isotope à un homéomorphisme non trivial d'ordre fini.

La méthode d'Alexander ne se limite pas qu'à ces lacets particuliers. Sous certaines conditions, on peut choisir une autre famille de lacets.

Cette méthode permet de changer un problème de calcul de classe modulaire en un problème combinatoire. Elle donne un algorithme concret pour déterminer si un élément du Groupe Modulaire est trivial ou non. Pour des résultats supplémentaires, on pourra se reporter à [3].

Nous pouvons désormais porter notre attention sur la question traitée dans ce mémoire. On s'intéresse au problème généralisé de la réalisation de Nielsen. Si l'on note $p : Diff^+(\Sigma_g) \rightarrow M_g$ l'application de passage au quotient, alors on voudrait savoir s'il existe une section, i-e un morphisme de groupe $s : M_g \rightarrow Diff^+(\Sigma_g)$ tel que $s \circ p = id$. Nielsen montra lui même, avant de poser cette question que le Groupe Modulaire du tore était $SL(2, \mathbb{Z})$. Un difféomorphisme du tore se relève en un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 qui préserve le réseau \mathbb{Z}^2 . D'autre part, le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ est engendré par les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour déterminer une section $s : SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow Diff(\mathbb{T})$ il suffit de déterminer les difféomorphismes du plan préservant le réseau \mathbb{Z}^2 . Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ correspond à la rotation d'angle $\pi/2$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspond à la transformation $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$. Ces associations respectent bien les lois de groupe, on a bien notre section dans le cas du tore.

En 1983, Steven Kerckhoff montra qu'il existe une section pour tout sous groupe fini

du Groupe Modulaire M_g . Puis en 1987, Shigeyuki Morita publia un article dans lequel il montra que le problème généralisé de la réalisation de Nielsen n'admettait pas de réponse affirmative pour le Groupe Modulaire d'une surface Σ_g , pour $g \geq 18$.

Il existe plus récemment des résultats plus précis au problème de Nielsen. On pourrait citer par exemple Franks et Handel [4] qui améliorèrent le résultat de Morita, et démontrèrent qu'il n'existe pas de section pour $g \geq 3$. Le problème généralisé de Nielsen se transporte aussi dans un autre cadre. Le Groupe Modulaire se définit aussi comme le groupe des classes d'homotopie d'homéomorphismes qui préservent l'orientation. Le problème généralisé de la réalisation de Nielsen dans ce contexte est de savoir s'il existe une section $s' : M_g \rightarrow \text{Homeo}^+(\Sigma_g)$ à la projection canonique. Vladimir Markovic et D. Saric [7] [8] ont complètement résolu la question : il n'existe pas de telle section pour $g \geq 2$.

S. Morita prouva dans son article [11] qu'il n'existait pas de section pour les surfaces de genre $g \geq 18$. Ensuite, il publia un livre [12] dans lequel il améliore le résultat pour arriver à $g \geq 5$. C'est en suivant ces deux preuves que nous prouverons un résultat plus faible que celui montré par Morita. On se propose dans ce mémoire de montrer le résultat suivant : *le problème généralisé de la réalisation de Nielsen n'admet pas de réponse affirmative pour une infinité de g .*

Dans ses deux preuves, Morita raisonne par l'absurde. La contradiction cherchée est de nature cohomologique et les objets avec lesquels il travaille sont principalement les fibrés en surfaces. Ce sont des fibrés tels que les fibres sont des surfaces Σ_g , pour plus de clarté, on les appellera des Σ_g fibrés. On peut associer à tout Σ_g fibré $E \rightarrow X$ une classe de conjugaison de morphisme d'holonomie. Ce sont des morphismes

$$\pi_1(X) \rightarrow M_g.$$

Intuitivement si on se donne un lacet dans X , on peut transporter la fibre au dessus d'un point de base du lacet le long du lacet. Cela nous donne une classe d'isotopie de difféomorphisme de la fibre qui ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet de la base.

Si on suppose l'existence d'une section $s : M_g \rightarrow \text{Diff}^+(\Sigma_g)$, on obtient donc en composant le morphisme d'holonomie avec cette section une représentation

$$\phi : \pi_1(X) \rightarrow \text{Diff}^+(\Sigma_g).$$

Dès lors qu'on obtient cette représentation, on peut construire une variété E_ϕ dite variété suspension de la représentation ϕ . La variété E_ϕ est difféomorphe à la variété E de départ et est définie par :

$$E_\phi = \tilde{X} \times \Sigma_g / \pi_1(X)$$

où \tilde{X} est le revêtement universel de X et l'action de $\pi_1(X)$ sur Σ_g se fait au moyen de la représentation ϕ . La variété $\tilde{X} \times \Sigma_g$ est munie d'un feuilletage horizontal $F = \tilde{X} \times \{pt\}$ qui induit un feuilletage sur le quotient transverse aux fibres. Il en est de même pour la variété E lorsqu'on transporte le feuilletage par un difféomorphisme. En appliquant le théorème d'annulation de Bott [1], on en déduit que certaines classes caractéristiques

s'annulent en degrés suffisamment grand. C'est l'obstruction recherchée.

Puis, la suite de la démonstration est de construire une famille de Σ_g fibrés qui ne vérifient pas cette obstruction. La construction des éléments de cette famille se fait de manière récursive. Pour pouvoir manipuler les classes caractéristiques, on s'imposera dans les construction de ne prendre que des opérations rudimentaires des fibrés : des revêtements d'ordre fini et des tirés en arrière. Toutefois on devra utiliser une opération supplémentaire qui est le revêtement ramifié cyclique. C'est le plus simple des revêtements ramifiés. Ce mémoire s'arrête à ce point de la démonstration de Morita. On obtiendra seulement la non-existence de sections pour une infinité de g . Seulement, la démonstration de Morita est plus sophistiquée. Pour pouvoir généraliser, il démontre qu'il peut décrire toutes les relations polynomiales entre les classes caractéristiques mises en jeu. L'obstruction engendrée par l'existence de section rajoute alors une relation pour ces classes caractéristiques, qui ne peut arriver dès lors qu'on est en genre $g \geq g_0$. Il arrive alors à donner une estimation de g_0 allant de 18 pour son article à 5 pour son livre.

Chapter 1

Section et obstruction

Le Groupe Modulaire intervient naturellement dans la théorie des espaces fibrés en surface, que l'on appellera des fibrés en surface. On montrera alors que l'existence d'une section à la projection naturelle du Groupe Modulaire entraîne des obstructions fortes à l'existence de classes caractéristiques sur ces fibrés en surfaces.

1.1 Quelques généralités sur les fibrés en surfaces

1.1.1 Rappels sur les classes caractéristiques

Les classes caractéristiques sont des objets définis dans le cadre des fibrés vectoriels (réels ou complexes). Il y a deux moyens pour les introduire, le premier, formel, est utile pour montrer l'unicité des différentes classes et leurs principales propriétés. Il s'agit, pour les différentes classes, d'ajouter à la définition suivante des propriétés de normalisation et d'imposer quelques conditions sur les degrés (voir [10]). Mais elle reste peu commode pour montrer leur existence.

Définition 1.1.1.1 *On appelle classe caractéristique une application c qui à chaque fibré vectoriel ξ sur un espace B associe une classe de cohomologie $c(\xi) \in H^*(B)$ et qui possède les propriétés suivantes :*

Invariance: Si ξ est isomorphe à ξ' , alors $c(\xi) = c(\xi')$

Naturalité : Si $f : B' \rightarrow B$ est une application continue, alors $c(f^\xi) = f^*c(\xi)$*

Nous allons introduire brièvement les deux classes que nous utiliserons par la suite : les classes d'Euler et de Pontryagin. En fait, on passera par une troisième classe plus générale : celle de Chern. La théorie proposée pour montrer l'existence de ces classes s'appelle la théorie de Chern-Weil. Elle sera utile pour la démonstration du théorème de Bott.

Définition 1.1.1.2 *Une application polynômiale en les coefficients P sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ à coefficients complexes est dit invariant si, pour tout $g \in GL_n(\mathbb{C})$ et $h \in M_n(\mathbb{C})$,*

$$P(g^{-1}hg) = P(h)$$

Notons P_1, \dots, P_n les polynômes définis sur $M_n(\mathbb{C})$ par l'identité

$$\det(\lambda I - \frac{1}{2i\pi}h) = \lambda^n + P_1(h)\lambda^{n-1} + \dots + P_n(h).$$

Par exemple $P_1(h) = -\frac{1}{2i\pi}\text{tr}(h)$ et $P_n(h) = (\frac{-1}{2i\pi})^n \det(h)$. Les P_i sont algébriquement indépendants et engendrent l'algèbre des polynômes invariants sur $M_n(\mathbb{C})$.

Pour E un espace vectoriel complexe de dimension n , tout polynôme invariant P sur $M_n(\mathbb{C})$ détermine un polynôme sur $\text{End}(E)$ indépendant d'un choix d'une base. En particulier, si ξ est un fibré vectoriel complexe de rang n , P définit une fonction à valeurs complexes sur l'espace total du fibré $\text{End}(\xi)$.

Soit ξ un fibré vectoriel complexe de rang n sur B , muni d'une connexion Δ (quelconque). Notons R^Δ sa courbure, c'est une 2-forme sur la base à valeurs dans les endomorphismes de l'espace total. Soit P un polynôme invariant sur $M_n(\mathbb{C})$. Alors la forme différentielle à valeurs complexes $P(R^\Delta)$ est fermée, sa classe de cohomologie de de Rham ne dépend pas du choix de la connexion. Si P est un polynôme de degrés q , alors $P(R^\Delta)$ sera de degrés $2q$.

L'application $P \mapsto [P(R^\Delta)] \in H^*(B, \mathbb{C})$ s'appelle l'homomorphisme de Weil.

On peut montrer que l'homomorphisme de Weil associe à chaque polynôme invariant P sur $M_n(\mathbb{C})$ une classe caractéristique c_P pour les fibrés vectoriels complexes de rang n .

Définition 1.1.1.3 Si $P = \det(\lambda I - \frac{1}{2i\pi}h)$, alors $c_P \in H^*(B, \mathbb{Z})$ désigne la classe de Chern totale.

Avec les mêmes notations, on note $c_i(\xi) = c_{P_i} \in H^{2i}(B, \mathbb{Z})$ qui sont les classes de Chern.

Notons qu'avec cette définition, il n'est pas évident de voir que ces classes sont à coefficients dans \mathbb{Z} , mais c'est bien le cas.

Définition 1.1.1.4 Soit un fibré ξ réel sur une base B . La i -ème classe de Pontryagin $p_i(\xi) \in H^{4i}(B, \mathbb{Z})$ est définie par

$$p_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C}).$$

La classe de Pontryagin totale se note $p(\xi) = \sum p_i(\xi)$.

Pour définir la classe d'Euler, on se place dans le cadre d'un fibré ξ réel de dimension paire $2n$ orienté, sur une variété B . Il faudrait toutefois bien définir le pfaffien. On se limitera seulement à dire que pour $A \in \mathfrak{so}(2n)$ (algèbre de Lie de $SO(2n)$), $Pf(A)$ est une fonction polynomiale Ad-invariante et $Pf(A)^2 = \det(A)$.

Définition 1.1.1.5 La classe d'Euler est alors définie par $e(\xi) = [Pf(R^\Delta/2\pi)] \in H^{2n}(B, \mathbb{Z})$.

On a, sous ces mêmes hypothèses, $p_n = e^2$.

1.1.2 Classes caractéristiques sur les fibrés en surfaces

On dispose très généralement d'une notion de classes caractéristiques sur les fibrés en surfaces. Si l'on considère un Σ_g -fibré $\pi : E \rightarrow X$, c'est-à-dire que la fibre type est Σ_g , on note $\zeta = \{X \in TE | \pi_*(X) = 0\}$ l'ensemble des vecteurs tangents aux fibres. C'est un fibré vectoriel orienté sur E de dimension 2.

La classe d'Euler de ce fibré vectoriel est notée $e = e(\zeta) \in H^2(E, \mathbb{Z})$.

Exemple: Dans le cas des fibrés vectoriels plats : $E \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$, les classes caractéristiques sont nulles. Dans le cas qui nous intéresse, ce n'est plus le cas.

Si on a un fibré en surface plat :

$$M \times \Sigma_g \rightarrow M$$

le fibré des vecteurs tangents aux fibres s'identifie au fibré tangent

$$T\Sigma_g \rightarrow \Sigma_g.$$

La classe d'Euler associée au fibré plat est donc égale à la classe d'Euler du fibré tangent. Or on a :

Proposition 1.1.1 *La classe d'Euler du fibré tangent d'une surface Σ_g est égale à*

$$e(\Sigma_g) = \chi(\Sigma_g)[\Sigma_g]^*.$$

Avec χ la caractéristique d'Euler et $[\Sigma_g]^$ désigne le dual de Poincaré de la classe fondamentale (en homologie) de Σ_g .*

On verra dans le chapitre 2 que $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$.

Dans le cadre des fibrés en surface, on a l'homomorphisme de Gysin $\pi_* : H^{2k+2}(E, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2k}(X, \mathbb{Z})$, ce qui nous permet d'obtenir une famille de classes caractéristiques $e_i = \pi_*(e^{i+1}) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ qui vivent dans la cohomologie de la base. Plusieurs manières permettent de le définir. La plus visuelle nécessite cependant de passer à coefficient dans \mathbb{R} . Localement, une p -forme sur E est définie par

$\omega = \sum f_{ij}(x, y) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_s} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_t}$ où $s + t = p$, x_1, \dots, x_m et y_1 et y_2 sont des coordonnées locales de X et de Σ_g respectivement. L'homomorphisme est alors défini de la manière suivante, en intégrant "suivant les fibres" :

$$\pi_*(\omega) = \sum_{i,j} \left(\int f_{i,j}(x, y) dy_1 \wedge dy_2 \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-2}}$$

On a un homomorphisme analogue en homologie : $\pi^* : H_p(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{p+2}(E, \mathbb{Z})$.

Définition 1.1.2.1 *Soit $E \rightarrow X$ un Σ_g -fibré. On pose $e_i = \pi_*(e^{i+1}) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$.*

Il faudra toutefois bien faire la distinction entre les deux notations pour les homomorphismes de Gysin, et les notations pour les tirés en arrière des classes de cohomologie et les poussés des classes d'homologie.

Introduisons le cup product \cup . C'est une application $\cup : H^k(X; \mathbb{Z}) \times H^l(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{k+l}(X, \mathbb{Z})$ qui est induit par une application sur les co-chaines :

Pour $\phi \in C^k(X, \mathbb{Z})$ et $\psi \in C^l(X, \mathbb{Z})$, on pose $\phi \cup \psi : \sigma \in C^{k+l}(X, \mathbb{Z}) \mapsto \phi(\sigma|_{(v_0, \dots, v_k)}) \psi(\sigma|_{(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})})$. C'est cette opération qui est sous-entendue dans la formule $p_n = e^2$ entre les classes de Pontryagin et d'Euler. Quand on passe à coefficients dans \mathbb{R} le cup produit devient juste le produit vectoriel entre deux formes $\cup = \wedge$.

Le crochet est défini par la dualité induit par le théorème des coefficients universels, qui définit la cohomologie comme le dual de l'homologie (attention aux coefficients !).

Lemme 1.1.2 *Soit $\pi : E \rightarrow X$ un Σ_g -fibré.*

i) Avec les mêmes notations, si on a $\alpha \in H^k(X, \mathbb{Z})$ et $\beta \in H^q(E, \mathbb{Z})$ alors

$$\pi_*(\pi^*\alpha \cup \beta) = \alpha \cup \pi_*(\beta).$$

ii) Pour $u \in H_p(X, \mathbb{Z})$ et $\gamma \in H^{p+2}(E, \mathbb{Z})$ on a $\langle \gamma, \pi^(u) \rangle = \langle \pi_*(\gamma), u \rangle$.*

En particulier, avec les notations de i), on a $\langle \pi^\alpha \cup \beta, [E] \rangle = \langle \alpha \cup \pi_*(\beta), [M] \rangle$.*

iii) L'homomorphisme de Gysin est naturel respectivement aux morphismes de fibrés.

Preuve : Passons à coefficients dans \mathbb{R} pour mieux voir comment agissent les choses. L'homomorphisme de Gysin consiste alors à intégrer sur les fibres. On note $i : \Sigma_g \rightarrow E$ l'inclusion de la fibre.

Montrons i) par exemple : Localement, β s'exprime par :

$$\beta = \pi^*\omega \wedge i^*\gamma$$

avec ω une $q - 2$ forme sur X et γ une deux forme sur Σ_g (si γ n'est pas de degrés maximal, l'image de β par l'homomorphisme de Gysin est nulle).

Alors on a :

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \pi_*(\beta) &= \alpha \wedge \pi_*(\pi^*\omega \wedge i^*\gamma) \\ &= \alpha \wedge (\omega \int_{\Sigma_g} \gamma) \\ &= \alpha \wedge \omega \int_{\Sigma_g} \gamma. \end{aligned}$$

La deuxième égalité provient de la définition de π_* comme intégration sur la fibre.

$$\begin{aligned} \pi^*\alpha \wedge \beta &= \pi^*\alpha \wedge \pi^*\omega \wedge i^*\gamma \\ &= \pi^*(\alpha \wedge \omega) \wedge i^*\gamma \end{aligned}$$

Ce qui fournit l'égalité recherchée.

Les propriétés ii) et iii) s'obtiennent de la même façon. \square

1.1.3 Morphisme d'holonomie

Dans ce paragraphe, on souhaite montrer qu'à un Σ_g -fibré $\pi : E \rightarrow X$, on peut associer, à conjugaison près, un morphisme dit morphisme d'holonomie $\rho : \pi_1(X) \rightarrow M_g$. Intuitivement, il s'agit de transporter une fibre au dessus d'un point de X le long d'un lacet.

Commençons par étudier le cas où la base est le cercle, $X = \mathbb{S}^1$. On décompose \mathbb{S}^1 en deux intervalles trivialisants I_1 et I_2 contenant 0 et $1/2$. On note $\phi_i : \pi^{-1}(I_i) \rightarrow I_i \times \Sigma_g$ les trivialisations locales.

Pour définir le morphisme d'holonomie, il suffit de le faire sur un générateur de $\pi_1(X)$, donc pour le lacet qui fait une fois le tour du cercle. Au dessus de chaque trivialisation, on peut pousser la fibre le long de l'intervalle. On note $h_1 : \begin{array}{c} \{0\} \times \Sigma_g \longrightarrow \{1/2\} \times \Sigma_g \\ (0, x) \longmapsto (1/2, x) \end{array}$

et $h_2 : \begin{array}{c} \{1/2\} \times \Sigma_g \longrightarrow \{0\} \times \Sigma_g \\ (1/2, x) \longmapsto (0, x) \end{array}$ le transport des fibres sur les trivialisations. Ainsi, pour ce lacet, le transport s'écrit :

$$h = \phi_2^{-1} h_1 \phi_2 \phi_1^{-1} h_1 \phi_1 : \pi^{-1}(0) \rightarrow \pi^{-1}(0).$$

Le difféomorphisme obtenu dépend a priori des trivialisations choisies. Plus précisément, on obtient une classe d'isotopie de difféomorphisme. En effet, il suffit de le vérifier par exemple si on change la première trivialisation. Prenons ψ_1 une autre trivialisation de l'intervalle I_1 . Il suffit donc de comparer $\phi_1^{-1} h_1 \phi_1 : \pi^{-1}(0) \rightarrow \pi^{-1}(1/2)$ avec $\psi_1^{-1} h_1 \psi_1 : \pi^{-1}(0) \rightarrow \pi^{-1}(1/2)$. Où encore de manière équivalente, montrer que l'application

$$\psi_1^{-1} h_1^{-1} \psi_1 \phi_1^{-1} h_1 \phi_1 : \pi^{-1}(0) \rightarrow \pi^{-1}(0)$$

est homotope à l'identité.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(0) & & \pi^{-1}(0) \\ \phi_1 \downarrow & & \psi_1^{-1} \uparrow \\ \{0\} \times \Sigma_g & & \{0\} \times \Sigma_g \\ h_1 \downarrow & & h_1^{-1} \uparrow \\ \{1/2\} \times \Sigma_g & & \{1/2\} \times \Sigma_g \\ \phi_1^{-1} \downarrow & & \psi_1 \uparrow \\ \pi^{-1}(1/2) & \longlongequal{\quad} & \pi^{-1}(1/2) \end{array}$$

Alors l'homotopie désirée est obtenue en prenant le transfert jusqu'aux fibres intermédiaires. C'est-à-dire, au temps t , on fait le même procédé, en s'arrêtant à la fibre au dessus du point $t/2$:

$$\begin{array}{ccc}
\pi^{-1}(0) & & \pi^{-1}(0) \\
\phi_1 \downarrow & & \psi_1^{-1} \uparrow \\
\{0\} \times \Sigma_g & & \{0\} \times \Sigma_g \\
h_t \downarrow & & h_t^{-1} \uparrow \\
\{t/2\} \times \Sigma_g & & \{t/2\} \times \Sigma_g \\
\phi_1^{-1} \downarrow & & \psi_1 \uparrow \\
\pi^{-1}(t/2) & \longleftarrow & \pi^{-1}(t/2)
\end{array}$$

avec

$$h_t : \begin{array}{l} \{0\} \times \Sigma_g \longrightarrow \{t/2\} \times \Sigma_g \\ (0, x) \longmapsto (t/2, x) \end{array}$$

et l'homotopie s'écrit :

$$H_t = \psi_1^{-1} h_t^{-1} \psi_1 \phi_1^{-1} h_t \phi_1 : \pi^{-1}(0) \rightarrow \pi^{-1}(0).$$

Donc finalement, on obtient un morphisme $\rho : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow M_g$. Dans le cas général, avec un fibré $E \rightarrow X$, on prend un lacet γ dans X . on considère le fibré tiré en arrière par l'application $\gamma; \mathbb{S}^1 \rightarrow X$:

$$\begin{array}{ccc}
\gamma^* E & \longrightarrow & E \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\gamma} & X
\end{array}$$

Alors on associe à γ l'élément de M_g construit à partir du générateur de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$. Pour avoir un morphisme du groupe fondamental dans le Groupe Modulaire, il faut ensuite vérifier que l'élément du Groupe Modulaire construit ne dépend pas de la classe d'homotopie de γ . Soit alors γ' un autre lacet homotope à γ .

Comme γ et γ' sont homotopes, ils induisent des fibrés tirés en arrière $\gamma^* E$ et $\gamma'^* E$ homotopes. Or des fibrés homotopes sont isomorphes, ainsi il existe $f : \gamma^* E \rightarrow \gamma'^* E$ un isomorphisme. Pour que la construction ne dépende pas de la classe d'homotopie du lacet choisi, il faut considérer non pas les morphismes $\pi_1(X) \rightarrow M_g$ mais les classes de conjugaison de ces morphismes comme le résume la proposition suivante.

1.1.4 Caractérisation des fibrés en surface

On se propose dans cette section de montrer le résultat suivant :

Proposition 1.1.3 *Deux Σ_g -fibrés isomorphes (de même base) ont des morphismes d'holonomie conjugués. Réciproquement, deux fibrés en surface, sur une même base connexe par arc, qui ont des morphismes d'holonomie conjugués sont isomorphes.*

Preuve : Il suffit de le faire pour le cas où la base est le cercle. Soient deux Σ_g -fibrés $E_1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ et $E_2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ isomorphes. On note $f : E_1 \rightarrow E_2$ l'isomorphisme. Alors, on rappelle que l'élément de M_g associé au générateur de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ s'écrivait $h_1 = \phi_2^{-1}h_1\phi_2\phi_1^{-1}h_1\phi_1$ pour le fibré E_1 et $h_2 = \psi_2^{-1}h_1\psi_2\psi_1^{-1}h_1\psi_1$ pour le fibré E_2 . Alors comme f est un isomorphisme, on peut choisir comme carte $\psi = \phi \circ f$. Et en calculant on trouve :

$$h_2 = f^{-1}h_1f.$$

Ce qui induit des morphismes d'holonomie conjugués.

Réciproquement, soit deux fibrés $p_1 : E_1 \rightarrow X$ et $p_2 : E_2 \rightarrow X$ deux fibrés qui ont des morphismes d'holonomie conjugués. On veut montrer qu'il existe un isomorphisme $f : E_1 \rightarrow E_2$.

Fixons $x \in X$. On choisit un difféomorphisme $g : p_1^{-1}(x) \rightarrow p_2^{-1}(x)$. Soit alors $y \in X$ quelconque. Soit c un chemin qui relie x à y . Supposons dans un premier temps que x , y et c soient contenu dans un ouvert U qui trivialise p_1 et p_2 à travers des trivialisations respectives $\phi : p_1^{-1}(U) \rightarrow U \times \Sigma_g$ et $\psi : p_2^{-1}(U) \rightarrow U \times \Sigma_g$. De la même manière que pour la définition du morphisme d'holonomie, on peut définir le transport des fibres le long de c .

Si on le fait pour l'intervalle trivialisant $I = [0, 1]$, dans E_1 le transport le long de I s'écrit :

$$\phi^{-1}h\phi,$$

avec
$$h : \begin{array}{l} \{0\} \times \Sigma_g \longrightarrow \{1\} \times \Sigma_g \\ (0, z) \longmapsto (1, z) \end{array}.$$

Alors on définit $h_y : p_1^{-1}(y) \rightarrow p_2^{-1}(y)$ par la composition :

$$\begin{array}{ccc} p_1^{-1}(x) & \xrightarrow{g} & p_2^{-1}(x) \\ \uparrow \phi^{-1} & & \downarrow \psi \\ \{0\} \times \Sigma_g & & \{0\} \times \Sigma_g \\ \uparrow h^{-1} & & \downarrow h \\ \{1\} \times \Sigma_g & & \{1\} \times \Sigma_g \\ \uparrow \phi & & \downarrow \psi^{-1} \\ p_1^{-1}(y) & & p_2^{-1}(Y) \end{array}$$

Lemme 1.1.4 *Le difféomorphisme h_y ainsi obtenu ne dépend pas du chemin c choisi.*

Preuve : C'est clair sur l'ouvert trivialisant U . \square

Maintenant, passons au cas où le chemin c reliant x à y est contenu dans deux ouverts trivialisants U et V et telle que la paramétrisation de c implique $c(1/2) \in U \cap V$. Les trivialisations respectives sur ces ouverts pour p_1 sont notées ϕ_1 et ϕ_2 . On définit alors le transport de la fibre en x le long de c par

$$p_1^{-1}(x) \xrightarrow{\phi_1} \{0\} \times \Sigma_g \xrightarrow{h_{1/2}} \{1/2\} \times \Sigma_g \xrightarrow{\phi_2 \phi_1^{-1}} \{1/2\} \times \Sigma_g \xrightarrow{h_1} \{1\} \times \Sigma_g \xrightarrow{\phi_2^{-1}} p_1^{-1}(y)$$

Et comme pour le morphisme d'holonomie, on vérifie que l'application obtenue ne dépend pas du choix des trivialisations choisies. On note $h_{1,c}$ le transport le long de c dans E_1 et $h_{2,c}$ le transport dans E_2 . Comme précédemment, on pose

$$h_y : p_1^{-1}(y) \rightarrow p_2^{-1}(y)$$

par

$$h_y = h_{2,c} g h_{1,c}^{-1}.$$

Proposition 1.1.5 *l'application obtenue h_y ne dépend pas du choix de c .*

Preuve : Soit c' un autre chemin. Notons \tilde{h}_y l'application obtenue le long de c' . Regardons $\tilde{h}_y^{-1} h_y : p_1^{-1}(y) \rightarrow p_1^{-1}(y)$. On a

$$\tilde{h}_y^{-1} h_y = h_{1,c'} g^{-1} h_{2,c'}^{-1} h_{2,c} g h_{1,c}^{-1}.$$

Or on reconnaît que $h_{2,c'}^{-1} h_{2,c}$ est le transport de la fibre au dessus de y dans E_2 le long du lacet cc'^{-1} . Ainsi, on a $h_{2,c'}^{-1} h_{2,c} = \rho_2(cc'^{-1})$, où $\rho_2 : \pi_1(X) \rightarrow M_g$.

Or par hypothèse les deux fibrés $E_1 \rightarrow X$ et $E_2 \rightarrow X$ ont des morphismes d'holonomie conjugués. Ainsi, on a $\rho_2 = f^{-1} \rho_1 f$. En d'autres termes, on peut ré-écrire :

$$\tilde{h}_y^{-1} h_y = h_{1,c'} g^{-1} f^{-1} h_{1,c'}^{-1} h_{1,c} f g h_{1,c}^{-1} = id.$$

□

Comme le transport se fait de manière difféomorphe, on obtient en fin de compte notre difféomorphisme fibre par fibre entre E_1 et E_2 . □

1.2 Obstruction

Le but de ce paragraphe est de montrer que s'il existe une section $s : M_g \rightarrow Diff_+(\Sigma_g)$, alors pour tout Σ_g -fibré $E \rightarrow X$, on a $e_i = 0$ pour $i \geq 3$. Pour cela, on montre que l'existence de la section entraîne l'existence d'un feuilletage de E de codimension 2 transverse aux fibres du fibré, pour ensuite appliquer le théorème d'annulation de Bott.

1.2.1 Conséquence de l'existence d'une section

Supposons qu'il existe une section $s : M_g \rightarrow Diff_+(\Sigma_g)$, alors à un Σ_g -fibré on peut lui associer $\phi : \pi_1(X) \rightarrow Diff_+(\Sigma_g)$ la composition $s \circ \rho$ de la section avec le morphisme d'holonomie du fibré.

L'étape suivante consiste à construire un autre fibré en surface à partir de la base X et la représentation ϕ . Si \tilde{X} désigne le revêtement universel de X , $\pi_1(X)$ agit proprement et librement sur $\tilde{X} \times \Sigma_g$ par action naturelle sur le premier facteur, et par sa représentation sur Σ_g .

Le quotient de cet espace par cette action est alors une variété, que l'on note

$$E_\phi := \tilde{X} \times \Sigma_g / \pi_1(X)$$

Si on note $p : \tilde{X} \rightarrow X$ la projection canonique, alors p induit une fibration $E_\phi \rightarrow X$ de fibre Σ_g et de représentation ϕ .

1.2.2 Liens avec les classes caractéristiques

Maintenant, on peut munir le fibré E_ϕ construit d'un feuilletage comme suit : on munit $\tilde{X} \times \Sigma$ du feuilletage horizontale $F = \tilde{X} \times \{pt\}$. C'est un feuilletage de codimension 2 invariant par l'action de $\pi_1(X)$, donc il induit un feuilletage sur le quotient E_ϕ , qui est transverse aux fibres. Comme E_ϕ et E sont isomorphes, le feuilletage de E_ϕ se transporte sur E (si $f : E_\phi \rightarrow E$ est l'isomorphisme, les feuilles de E sont les images des feuilles de E_ϕ par f).

Ainsi, $E \rightarrow X$ est muni lui aussi d'un feuilletage F de codimension 2 transverse aux fibres de $E \rightarrow X$. Le feuilletage normal $\nu(F)$ est alors canoniquement isomorphe au fibré ς des vecteurs tangents aux fibres.

Théorème 1.2.1 (d'annulation de Bott) *Supposons qu'on ait un feuilletage F d'une variété E . On note $\nu(F)$ le feuilletage normal associé à F , alors l'anneau $Pont(\nu(F))$ engendré par les classes de Pontryagin réelles de $\nu(F)$ s'annule en dimension supérieure à $2dim(\nu(F))$, c'est-à-dire*

$$p_{i_1}(\nu(F)) \cdot p_{i_2}(\nu(F)) = 0, \\ \forall 4(i_1 + \dots + i_k) > 2dim(\nu(F)) = 2codim(F) = 4.$$

Le théorème de Bott, dont la démonstration est donnée au paragraphe suivant, affirme donc que $p_1^2(\nu(F)) = 0$. Ainsi, $p_1^2(\varsigma) = 0$ soit $e^4(\varsigma) = 0$ avec les propriétés des classes caractéristiques rappelées au début du chapitre. On résume notre résultat dans la proposition suivante.

Proposition 1.2.2 *Si on a une section $s : M_g \rightarrow Diff_+(\Sigma_g)$, alors pour tout Σ_g -fibré $E \rightarrow X$ on a $e_i = 0 \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$, pour tout $i \geq 3$.*

1.3 Annexe : démonstration du théorème de Bott

le théorème d'annulation de Bott [1] découle quasiment du théorème d'intégrabilité de Frobenius. Pour exploiter ce théorème, il faut le considérer sous sa forme différentielle.

Rappelons la forme géométrique du théorème de Frobenius.

Soit D un sous fibré vectoriel de dimension r d'une variété M lisse de dimension n . C'est-à-dire pour tout point p de M , on se donne un sous-espace D_p de dimension r de T_pM (la donnée de D_p est C^∞ par rapport à p). Une sous variété N de M est une variété intégrale de D en p si $T_pN = D_p$.

Si une telle sous variété existe pour tout point p de M , D est dit complètement intégrable.

Théorème 1.3.1 (Frobenius) *Un sous-fibré D de TM est complètement intégrable si et seulement si D est stable par crochet de Lie.*

C'est la version géométrique du théorème de Frobenius. Or ce n'est pas la forme qui nous intéresse pour montrer le théorème de Bott.

Définition 1.3.0.1 *Pour tout $k \neq 1$ on note*

$$I^k(D) = \{w \in A^k(M) \mid w(X_1, \dots, X_k) = 0, X_i \in D\}$$

et

$$I(D) = \bigoplus_{k=1}^n I^k(D)$$

l'ensemble des formes qui s'annulent sur D .

Lemme 1.3.2 *i) $I(D)$ est un idéal de l'algèbre $A^\bullet(M)$ des formes sur M .*

ii) $I(D)$ est localement engendré par $s = n - r$ formes de degrés 1 linéairement indépendantes, i-e

$$\forall p \in M, \exists U \in V(p), \exists w_1, \dots, w_s, \forall w \in I(D), \exists \theta_1, \dots, \theta_s, w = \sum_{i=1}^s \theta_i \wedge w_i.$$

Et on a $D_p = \{X \in T_pM \mid w_1(X) = \dots = w_s(X) = 0\}$.

Preuve : Si on choisit U un voisinage de p quelconque dans M suffisamment petit, il existe X_{s+1}, \dots, X_n des champs de vecteurs tels que ces champs soient linéairement indépendants en tout point de U . Ainsi, D est engendré par X_{s+1}, \dots, X_n . (Sur un ouvert trivialisant, $T_pU \cong \mathbb{R}^n$, on voit alors D_p comme un sous espace de \mathbb{R}^n engendré par r vecteurs).

On rajoute ensuite X_1, \dots, X_s pour avoir une base de TM sur U .

Si w_1, \dots, w_n sont les 1-formes duales de ces champs de vecteurs (i-e $w_i(X_j) = \delta_{ij}$) alors une k -forme sur U est combinaison linéaire de $w_I = w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_k}$ ($w = \sum_I f_I w_I$.)

Alors w une k -forme appartient à $I^k(D)$ si et seulement si $f_{i_1, \dots, i_k} = 0$ sur U pour tout $i_j \notin \{1, \dots, s\}$ c'est-à-dire si $w \in \langle w_1, \dots, w_s \rangle$, l'idéal engendré par w_1, \dots, w_s . \square

Maintenant la condition d'intégrabilité se manifeste par :

Théorème 1.3.3 *Le sous-fibré D est complètement intégrable si et seulement si $I(D)$ est un idéal différentiable, i-e $dI(D) \subset I(D)$.*

Démonstration : Supposons que D soit complètement intégrable. Soit $w \in I^k(D)$ alors pour tout champs de vecteurs $X_1, \dots, X_{k+1} \in D$, on a $[X_i, X_j] \in D$ par hypothèse. On a

$$dw(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i X_i \cdot w(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) + \sum_{0 \leq i < j \leq k+2} (-1)^{i+j} w([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1})$$

Alors on a $dw(X_1, \dots, X_{k+1}) = 0$, soit

$$dw \in I^{k+1}(D).$$

Réciproquement, supposons $dI(D) \subset I(D)$ et soient X et Y des champs de vecteurs dans D . On veut montrer que le crochet $[X, Y] \in D$, c'est-à-dire que $w([X, Y]) = 0$ pour $w \in I^1(D)$. On a $dw(X, Y) = 0$ par hypothèse et

$$dw(X, Y) = \frac{1}{2}(X \cdot w(Y) - Y \cdot w(X) - w([X, Y])).$$

Avec $w(X) = w(Y) = 0$ cela donne

$$w([X, Y]) = 0$$

et achève la preuve. \square

Finalement, on peut reformuler la condition d'intégrabilité.

Proposition 1.3.4 *Localement, une distribution d'ordre r sur M de dimension n est donnée par l'annulation de $s = n - r$ formes w_1, \dots, w_s sur U . Donc D est intégrable s'il existe θ_{ij} des 1-formes sur U telles que $dw_i = \sum_{j=1}^s \theta_{ij} \wedge w_j$ pour $i = 1, \dots, s$.*

Désormais, on peut montrer le théorème de Bott :

Théorème 1.3.5 (d'annulation de Bott) *Si un sous-fibré D du fibré tangent TM est intégrable, alors l'anneau $Pont(TM/D)$ engendré par les classes de Pontryagin réelles de TM/D s'annule en dimension supérieure à $2\dim(TM/D)$, c'est-à-dire*

$$p_{i_1}(TM/D) \cdot \dots \cdot p_{i_l}(TM/D) = 0,$$

$$\forall l(i_1 + \dots + i_l) > 2\dim(TM/D).$$

Notons qu'un feuilletage de M vérifie le critère d'intégrabilité.

Pour démontrer ce théorème, il faut avoir à l'esprit qu'avec la théorie de Chern-Weil sur les classes caractéristiques, l'anneau des classes de Pontryagin se calcule à partir de la courbure de n'importe quelle connexion. Ce qu'on va montrer, c'est que le fibré normal

$Q = TM/D$ a une connexion particulière, dont la courbure s'annule dès qu'on l'élève à une puissance supérieur à $q = \dim(Q)$.

Comme le tenseur de courbure est localement une matrice de 2-formes, cela voudra donc dire que la forme de Pontryagin de la courbure s'annule en degrés strictement supérieur à $2q$.

Démonstration : Comme $D \subset TM$ est intégrable, il existe localement sur U un ouvert de M des 1-formes $w_1, ..w_q$ avec $q = \dim(TM/D) = \text{codim}(D)$ qui engendrent $I(D)$ et $I(D)$ est un idéal différentiable. Ainsi, il existe $\theta_{i,j}$ tel que pour tout $i \leq q$,

$$dw_i = \sum_{j=1}^q \theta_{ij} \wedge dw_j.$$

On définit une connexion ∇ sur $Q^* \subset TM^*$ localement en définissant ∇_U sur U par $\nabla_U w_i = \sum_{j=1}^q \theta_{ij} \otimes w_j$ et qui respecte la règle de Leibniz. On étend ensuite cette connexion à Q^* entier par partition de l'unité. On essaie de tirer des renseignements sur la matrice de courbure de cette forme de connexion. Localement sur U on écrit $dw_i = \sum \theta_{ij} \wedge w_j$ et en différenciant on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j d\theta_{ij} \wedge w_i - \sum_j \theta_{ij} \wedge dw_j \\ &= \sum_j d\theta_{ij} \wedge w_j - \sum_j \theta_{ij} \wedge \sum_k \theta_{jk} \wedge w_k \\ &= \sum_k (d\theta_{ik} - \sum_j (\theta_{ij} \wedge \theta_{jk})) \wedge w_k. \end{aligned}$$

Or on reconnaît $K_{ik} = d\theta_{ik} - \sum_j (\theta_{ij} \wedge \theta_{jk})$ qui est la (i, k) entrée de la matrice de courbure de ∇ sur U .

On a donc $\sum_k K_{ik} \wedge w_k = 0$. Alors, si X et Y sont des champs de vecteurs à valeurs dans D , et que (pour reprendre le formalisme précédent) X_i désigne les formes duales de w_i , en appliquant à la dernière égalité (X, Y, X_j) , on trouve

$$K_{i,j}(X, Y) = 0.$$

Ainsi, K_{ik} appartient à l'idéal engendré par les $w_1, ..w_q$. De fait, si on élève $K_{i,j}$ à une puissance $> q$, elle s'annule. Donc pour tout polynôme P Ad-invariant de degrés $> q$, $P((K_{ij})) = 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème de Bott. \square

Chapter 2

Un premier calcul

Comme on l'a vu en première partie, l'existence d'une section à la projection naturelle du Groupe Modulaire M_g entraîne l'annulation des classes caractéristiques e_i pour $i \geq 3$ pour tout Σ_g -fibré. Avant d'arriver à la contradiction cherchée, nous allons commencer par montrer qu'on peut construire un Σ_g fibré dont la première classe e_1 est non nulle.

2.1 Revêtements ramifiés

On s'intéressera au plus simple des revêtements ramifiés : les revêtements ramifiés cycliques. Très généralement, on se donne une variété compacte X orientée de dimension n . On suppose que le groupe cyclique $\mathbb{Z}/m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ agit sur X par difféomorphismes préservant l'orientation et que l'ensemble Y des points fixes par cette action est une sous variété de X .

On supposera dans notre cas que toutes les composantes connexes de Y sont de codimensions 2, que \mathbb{Z}/m opère librement sur $X - Y$. Par conséquent $X/(\mathbb{Z}/m)$ est une variété orientée.

Notons $\pi : X \rightarrow X/\mathbb{Z}$ la projection, alors $\pi(Y)$ est une sous variété de codimension 2 de $X/\mathbb{Z}/m$. De plus $\pi|_Y : Y \rightarrow \pi(Y)$ est un difféomorphisme et $\pi : X - Y \rightarrow X/\mathbb{Z}/m - \pi(Y)$ est un revêtement au sens usuel.

Définition 2.1.0.2 *On dit alors que X est un m -revêtement ramifié de $X/\mathbb{Z}/m$ de lieu de ramification Y*

Le prototype même de revêtement ramifié consiste à prendre l'exemple de l'action de \mathbb{Z}/m sur \mathbb{C} .

L'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto z^m$ est l'identité à l'origine, et dès qu'on s'en éloigne elle induit un revêtement classique d'ordre m . Cet exemple sert même de modèle local. Si on revient au cadre général des revêtements ramifiés cyclique, on se donne une variété X et une sous-variété Y de codimension 2 invariante par l'action de \mathbb{Z}/m qui agit sur X par difféomorphismes préservant l'orientation. Comme l'a montré S.Wang [13] dans les cas où X est une variété de dimension 4, si l'on prend un voisinage tubulaire $N(Y)$ dans X ,

alors, à difféomorphisme près, \mathbb{Z}/m agit comme une rotation de $N(Y)$ autour de Y .

Proposition 2.1.1 ([6]) *Soit M une variété orientée lisse, et B une sous variété de M de codimension 2 orientée. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $[B]^* \in H_{n-2}(M, \mathbb{Z})$ soit divisible par m . Alors il existe un revêtement cyclique ramifié d'ordre m de lieu de ramification B , $\tilde{M} \rightarrow M$*

Preuve : Soit M une variété fermée orientée de dimension n et supposons qu'on se donne $B \subset M$ une sous variété de codimension 2 orientée. Soit $[B] \in H_{n-2}(M, \mathbb{Z})$ sa classe d'homologie fondamentale et $[B]^*$ sa classe de cohomologie duale au sens de Poincaré. Avec la théorie de Chern-Weil sur les classes caractéristiques de Chern, il existe un isomorphisme $Vect_{\mathbb{C}}^1(M) \cong H^2(M, \mathbb{Z})$. A $[B]^* \in H^2(M, \mathbb{Z})$ on lui associe un fibré en droite complexe η sur M . On peut donner une construction explicite de η :

Soit ν le fibré normal à B .

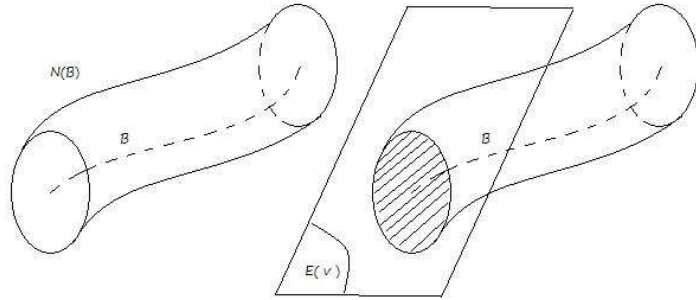
$$\pi : E(\nu) \rightarrow B.$$

Avec

$$E(\nu) = \{(x, v) \in B \times TM, v \in T_x M, v \perp B\}.$$

C'est un fibré vectoriel de rang 2 réel muni de l'orientation induite par celle de M et de B . On peut donc le considérer comme un fibré en droite complexe.

Soit $N(B)$ un voisinage tubulaire de B . On peut construire un difféomorphisme $\phi : N(B) \rightarrow \{v \in E(\nu), \|v\| < \epsilon\}$ pour ϵ fixé. Ainsi, $B \subset N(B)$ est d'image nulle par ϕ dans $E(\nu)$.



Posons $\pi' = \pi \circ \phi : N(B) \rightarrow B$.

$$\begin{array}{ccc} N(B) & \xrightarrow{\phi} & E(\nu) \\ & \searrow \pi' & \downarrow \pi \\ & & B \end{array}$$

Soit $\eta_0 = (\pi')^*(\nu)$ le fibré tiré en arrière :

$$\begin{array}{ccc} E(\eta_0) & \longrightarrow & E(\nu) \\ \downarrow s & & \downarrow \pi \\ N(B) & \xrightarrow{\pi'} & B \end{array}$$

On peut expliciter : $E(\eta_0) = \{(p, u) \in N(B) \times E(\nu), \pi'(p) = \pi(u)\}$. On a une section

$$s : \begin{cases} N(B) & \longrightarrow & E(\eta_0) \\ p & \longmapsto & (p, \phi(p)). \end{cases}$$

Cette section ne s'annule pas en dehors de B car $\phi(p)$ est non nul pour $p \notin B$ par construction.

On a donc une trivialisaton $\eta_0|_{N(B)-B} \cong (N(B) - B) \times \mathbb{C}$. (On identifie $(p, z) \in (N(B) - B) \times \mathbb{C} = (p, zs(p)) \in E(\eta_0)$)

On pose $W = M - B$. on colle le fibré trivial $W \times \mathbb{C}$ sur η_0 et on obtient alors un fibré complexe en droite η sur M et on étend la section s de η_0 à η en posant $s = 1$ sur W .

Clairement $\eta|_B = \nu$ et le lieu des zéros de s est précisément B . L'image de s intersecte donc transversalement la section nulle dans $M \subset E(\eta)$.

Avec les hypothèses du théorème, il existe $\beta \in H^2(M, \mathbb{Z})$ tel que $m\beta = [B]^*$. Par ce qui précède, on note encore η le fibré en droite complexe qui correspond à $[B]^*$ et il existe une section $M \rightarrow E(\eta)$ qui vérifie

- i) $s = 0$ sur B
- ii) $s \neq 0$ sur $M - B$
- iii) $Im(s)$ intersecte la section nulle de $E(\eta)$ transversalement.

Définition 2.1.0.3 Soient $\pi : E \rightarrow X$ et $\pi' : E' \rightarrow X$ deux fibrés vectoriel de rang n et n' sur une même base X . On définit le produit tensoriel des deux fibrés comme le fibré $q : E \otimes E' \rightarrow X$, défini par $E \otimes E' = \{(y, y'), \pi(y) = \pi'(y')\}$ et $q(y, y') = \pi(y) = \pi'(y')$.

Enfin, la fibre au dessus de $x \in X$ est $q^{-1}(x) = E_x \times E_{x'}$ le produit des deux fibres. Cela en fait donc un fibrés vectoriel de rang $n + n'$.

Soit alors η' le fibré complexe en droite associé à β . Toujours grâce à la théorie des classes de Chern on a $(\eta')^{\otimes m} = \eta$. On peut alors définir une application

$$f : \begin{cases} E(\eta') & \longrightarrow & E(\eta) \\ v & \longmapsto & v \otimes \dots \otimes v \end{cases}$$

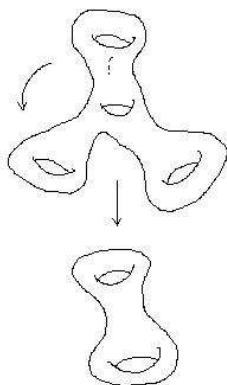
En posant $\tilde{M} = f^{-1}(Im(s))$, $f : \tilde{M} \rightarrow Im(s) = M$ est le revêtement cyclique désiré. L'action de \mathbb{Z}/m sur \tilde{M} est l'action par rotation ($v \mapsto e^{2i\pi/m}v$). La variété B s'identifiant avec le lieu des zéros de s , le tiré en arrière de B dans \tilde{M} est bien invariant par la rotation. Par contre je ne vois pas très bien où intervient le fait que la section s intersecte la section nulle transversalement. L'information qu'on peut en tirer, c'est que le lieu des zéros de s est bien une sous variété (mais on le savait c'est B ?).□

2.2 Revêtement des surfaces fermées

Soit $g \geq 1$, on considère les revêtement $\Sigma_{g'} \rightarrow \Sigma_g$ fini, d'indice $m \in \mathbb{N}^*$

Pour $g' = m(g - 1) + 1$, on construit le revêtement qui suit :

On prend pour représentation de $\Sigma_{g'}$ une étoile à m branches avec sur chacune des branches $g - 1$ trous et un trou central. Alors $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ agit proprement et de manière discontinue sur $\Sigma_{g'}$ par rotation d'angle $2\pi/m$. Le quotient $\Sigma_{g'}/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est alors une variété Σ_g , et la projection est un revêtement à m feuilles.



Proposition 2.2.1 *Réciproquement, si $\Sigma_{g'} \rightarrow \Sigma_g$ est un revêtement à m feuilles, alors nécessairement $g' = m(g - 1) + 1$.*

Preuve : pour montrer ça, introduisons la caractéristique d'Euler pour une variété X de dimension n :

$$\chi(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i \text{rg}(H_i(X)).$$

Lemme 2.2.2

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g.$$

Admettons le résultat que pour toute suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, on a $\text{rg}(B) = \text{rg}(C) + \text{rg}(A)$.

Alors pour toute décomposition de la variété $X = A \cup B$,

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$

En effet, si $X = A \cup B$ on a la suite longue de Mayer-Vietoris :

$$\rightarrow H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow$$

dont on en extrait des suites exactes courtes en croix :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 & & & A_n & & & C_n \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 & & & H_n(A \cap B) & \rightarrow & H_n(A) \oplus H_n(B) & \rightarrow & H_n(X) & \rightarrow & H_{n-1}(A \cap B) & \rightarrow \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 & & & C_{n+1} & & & B_n & & & & A_{n-1} \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
 \chi(X) &= \sum (-1)^n \text{rg}(H_n(X)) = \sum (-1)^n (\text{rg}(B_n) + \text{rg}(C_n)) \\
 &= \sum (-1)^n (\text{rg}(H_n(A) \oplus H_n(B)) - \text{rg}(A_n) + \text{rg}(H_{n-1}(A \cap B)) - \text{rg}(A_{n-1})) \\
 &= \sum (-1)^n (\text{rg}(H_n(A)) + \text{rg}(H_n(B))) - \sum (-1)^{n-1} \text{rg}(H_{n-1}(A \cap B)) \\
 &\quad + \sum (-1)^{n-1} \text{rg}(A_n) - \sum (-1)^n \text{rg}(A_{n-1}) \\
 &= \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)
 \end{aligned}$$

comme annoncé.

En particulier, si $\tilde{X} \rightarrow X$ est un revêtement à m feuilles, on a $\chi(\tilde{X}) = m\chi(X)$, ce qui fait que pour $\Sigma_{g'} \rightarrow \Sigma_g$ on a

$$\begin{aligned}
 \chi(\Sigma_{g'}) = m\chi(\Sigma_g) &\Leftrightarrow 2 - 2g' = m(2 - 2g) \\
 &\Leftrightarrow g' = m(g - 1) + 1.
 \end{aligned}$$

□

2.3 Un premier espace fibré

L'objet de ce paragraphe est de construire un Σ_g espace fibré dont la première classe e_1 sera non nulle.

2.3.1 Construction

Proposition 2.3.1 *Il existe un digramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{D} & & D \\
\downarrow & & \downarrow \\
\tilde{E} & \xrightarrow{f} & M_3 \times \Sigma_{g_2} \\
\tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\
M_3 & \xrightarrow{Id} & M_3
\end{array}$$

avec les propriétés suivantes : M_3 est un revêtement fini de Σ_{g_2} . La variété D est une sous variété de $M_3 \times \Sigma_{g_2}$ de codimension 2 qui est intersecte transversalement chaque fibre de π en exactement m points. L'application f est un revêtement ramifié cyclique d'ordre m suivant D .

Preuve : fixons une surface Σ_{g_1} , où $g_1 \geq 2$ fixé. Par construction des familles de revêtements $\Sigma_{g_2} \rightarrow \Sigma_{g_1}$ d'ordre m , on sait que nécessairement $g_2 = m(g_1 - 1) + 1$ et que \mathbb{Z}/m agit sur Σ_{g_2} par difféomorphisme et Σ_{g_1} est le quotient de Σ_{g_2} par cette action.

Ainsi, on se donne un revêtement d'ordre m , $\rho_1 : \Sigma_{g_2} \rightarrow \Sigma_{g_1}$ et $\sigma : \Sigma_{g_2} \rightarrow \Sigma_{g_2}$ un générateur de l'action de \mathbb{Z}/m sur Σ_{g_2} . Soit maintenant $\rho_2 : M_3 \rightarrow \Sigma_{g_2}$ le revêtement induit par le noyau de l'application

$$\pi_1(\Sigma_{g_2}) \rightarrow H_1(\Sigma_{g_2}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\Sigma_{g_2}, \mathbb{Z}/m) \cong (\mathbb{Z}/m)^{2g_2}.$$

(noyau = élément du π_1 dont la somme des puissances des générateurs est divisible par m .) C'est un revêtement d'ordre m^{2g_2} .

On construit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
M_3 \times \Sigma_{g_2} & \xrightarrow{f_2} & \Sigma_{g_2} \times \Sigma_{g_2} & \xrightarrow{f_1} & \Sigma_{g_1} \times \Sigma_{g_1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M_3 & \xrightarrow{\rho_2} & \Sigma_{g_2} & \xrightarrow{\rho_1} & \Sigma_{g_1}
\end{array}$$

Où pour les flèches verticales, on a les projections classique, et $f_1 = (\rho_1, \rho_1)$ et $f_2 = (\rho_2, id_{M_2})$.

Si D_1 désigne la diagonale de Σ_{g_1} dans $\Sigma_{g_1} \times \Sigma_{g_1}$, on construit $D = f_2^{-1} f_1^{-1}(D_1)$.

Il n'est pas évident que D ainsi construit est une variété. Toutefois, écrivons $D_1 = \{(x, x), x \in \Sigma_{g_1}\}$. Son image inverse est :

$$\begin{aligned}
f_1^{-1}(D_1) &= \{(x, y) \in \Sigma_{g_2} \times \Sigma_{g_2}, \rho_1(x) = \rho_1(y)\} \\
&= \{(x, \sigma^i(x)), x \in \Sigma_{g_2}, i = 1, \dots, m\} \\
&= \bigcup \Gamma_{\sigma^i}
\end{aligned}$$

où

$$\Gamma_{\sigma^i} = \{(x, \sigma^i(x)), x \in \Sigma_{g_2}\}.$$

Les Γ_{σ^i} sont disjoints, puisque

$$(x, \sigma^i(x)) = (y, \sigma^j(y)) \Leftrightarrow \sigma^i(x) = \sigma^j(x) \Leftrightarrow i = j.$$

De la même manière, on écrit $D = \{(m, x) \in M_3 \times \Sigma_{g_2}, \rho_2(m) = \sigma^i(\rho_2(m))\}$ et avec la définition analogue, $D = \bigcup \Gamma_{\sigma^i \circ \rho_2}$.

Les $\Gamma_{\sigma^i \circ \rho_2}$ sont disjoints pour les mêmes raisons que précédemment. Ainsi, D est bien une sous-variété.

Maintenant, pour l'étape suivante, on va construire un revêtement $E \rightarrow M_3 \times \Sigma_{g_2}$ ramifié suivant D . Pour cela, il suffit de montrer que la classe fondamentale de D est divisible par m dans $H_2(M_3 \times \Sigma_{g_2}, \mathbb{Z})$ ou encore que $[D]^* \in H^2(M_3 \times \Sigma_{g_2}, \mathbb{Z})$ est divisible par m .

On est donc ramené à montrer le lemme suivant :

Lemme 2.3.2 *La réduction modulo m , $[D]_m^*$ est nulle dans $H^2(M_3 \times \Sigma_{g_2}, \mathbb{Z}/m)$.*

Preuve : par naturalité des classes fondamentales, on a $[D]_m^* = f_2^* f_1^*([D_1]_m^*)$.

Or par le théorème de Kunnëth,

$$H^2(\Sigma_{g_1} \times \Sigma_{g_1}, \mathbb{Z}) = H^2(\Sigma_{g_1} \times \{point\}; \mathbb{Z}) \bigoplus (H^1(\Sigma_{g_1}; \mathbb{Z}) \otimes H^1(\Sigma_{g_1}; \mathbb{Z})) \bigoplus H^2(\{point\} \times \Sigma_{g_1}; \mathbb{Z}).$$

De fait, on écrit $[D_1]^* = [\Sigma_{g_1}]^* \times 1 + \sum \alpha_i \times \beta_i + 1 \times [\Sigma_{g_1}]^*$, avec $\alpha_i, \beta_i \in H^1(\Sigma_{g_1}; \mathbb{Z})$.

Par construction, $\rho_1^* : H^2(\Sigma_{g_1}; \mathbb{Z}/m) \rightarrow H^2(\Sigma_{g_2}; \mathbb{Z}/m)$ est triviale, de telle sorte que $f_1^* = (\rho_1^*, \rho_1^*)$ annule les composantes $[\Sigma_{g_1}]^*$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f_1^*([D_1]^* &= \sum f_1^*(\alpha_i \times \beta_i) \\ &= \sum \rho_1^*(\alpha_i) \times \rho_1^*(\beta_i). \end{aligned}$$

Toujours par construction, $\rho_2^* : H^1(\Sigma_{g_2}, \mathbb{Z}/m) \rightarrow H^1(M_3; \mathbb{Z}/m)$ est triviale, ainsi $f_2^* = (\rho_2^*, id)$ annule les composantes $\rho_1^* \alpha_i \in H^1(\Sigma_{g_2}; \mathbb{Z}/m)$:

$$\begin{aligned} f_2^* f_1^*([D_1]^* &= \sum f_2^*(\rho_1^*(\alpha_i) \times \rho_1^*(\beta_i)) \\ &= \sum (\rho_2^*(\rho_1^*(\alpha_i)) \times \rho_1^*(\beta_i)) \in H^2(M_3 \times \Sigma_{g_2}; \mathbb{Z}/m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalement

$$[D]_m^* = f_2^* f_1^*([D_1]_m^*) = 0.$$

□

On applique donc la proposition 2.1.1 à la variété $M_3 \times \Sigma_{g_2}$ et D sa sous-variété de codimension 2 : il existe un revêtement ramifié $\tilde{E} \rightarrow M_3 \times \Sigma_{g_2}$ ramifié suivant D .

On a alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{D} & & D \\
\downarrow & & \downarrow \\
\tilde{E} & \xrightarrow{f} & M_3 \times \Sigma_{g_2} \\
\tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\
M_3 & \xlongequal{\quad} & M_3
\end{array}$$

avec $\tilde{D} = f^{-1}(D)$.

$\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow M_3$ est obtenu en prenant la composition $\pi \circ f$. C'est un fibré en surface, la fibre est un revêtement de Σ_{g_2} ramifiée en m points. En effet, dans la composition $\tilde{E} \rightarrow M_3 \times \Sigma_{g_2} \rightarrow M_3$ la fibre de la projection est Σ_{g_2} et ensuite on prend l'image inverse par le revêtement ramifié. \square

2.3.2 Calcul de e_1

Nous avons donc avec la proposition 2.3.1

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{D} & & D \\
\downarrow & & \downarrow \\
\tilde{E} & \xrightarrow{f} & M_3 \times \Sigma_{g_2} \\
\tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\
M_3 & \xrightarrow{Id} & M_3
\end{array}$$

Désignons par \tilde{e} et e les classes d'Euler de $\tilde{\pi}$ et de π . c'est-à-dire, par exemple pour π , que e est la classe d'Euler du fibré des vecteurs tangents aux fibre de π (on rappelle que c'est un fibré de dimension 2). On a alors

Proposition 2.3.3 *i) $f^*([D]^*) = m[\tilde{D}]^*$
ii) $\tilde{e} = f^*(e) - (m - 1)[\tilde{D}]^* = f^*(e - (1 - \frac{1}{m})[D]^*)$*

Preuve : i) Rappelons la signification de la classe fondamentale d'une variété : il s'agit pour une triangulation convenable de la variété des simplexes de dimension maximale qui composent la variété. Dans le cas de la dualité de Poincaré on peut écrire (en posant $E = M_3 \times \Sigma_{g_2}$)

$$\begin{aligned}
[\tilde{E}] \cap [\tilde{D}]^* &= [\tilde{D}] \\
[E] \cap [D]^* &= [D].
\end{aligned}$$

Comme f est un difféomorphisme de \tilde{D} sur D , on a $f_*[\tilde{D}] = [D]$. On peut voir intuitivement la classe duale de Poincaré de la variété D comme ce qu'il faut enlever aux simplexes de E pour obtenir les simplexes de D . Ainsi, quand on tire en arrière la classe duale de D , on recopie les annulations sur chacune des m copies du complémentaire de D dans M . Or comme on a m copies, la classe duale de \tilde{D} agit de la même manière sur chacune de ses copies. Par suite, $f^*([D]^*) = m[\tilde{D}]^*$.

ii) Posons $E = M_3 \times \Sigma_{g_2}$, et soit $N(D)$ et $N(\tilde{D})$ des voisinages tubulaires de D et de \tilde{D} . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^2(E; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f^*} & H^2(\tilde{E}; \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(E - \text{Int}(N(D)); \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(\tilde{E} - \text{Int}(N(\tilde{D})); \mathbb{Z}) \end{array}$$

Les images de \tilde{e} et e dans $H^2(\tilde{E} - \text{Int}(N(\tilde{D})); \mathbb{Z})$ coïncident (le fait de retirer $\text{Int}(N(D))$ et $\text{Int}(N(\tilde{D}))$ nous ramène à des revêtements simples à m feuilletés)

On a d'autre part une suite exacte en cohomologie relative

$$\rightarrow H^2(\tilde{E}, \tilde{E} - \text{Int}(N(\tilde{D})); \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\tilde{E}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\tilde{E} - \text{Int}(N(\tilde{D})); \mathbb{Z}) \rightarrow ..$$

Lemme 2.3.4 *On a des isomorphismes*

$$H^2(\tilde{E}, \tilde{E} - \text{Int}(N(\tilde{D})); \mathbb{Z}) \cong H^2(N(\tilde{D}), \partial N(\tilde{D}); \mathbb{Z}) \cong H_{n-2}(\tilde{D}, \mathbb{Z})$$

Preuve : le premier isomorphisme s'obtient par excision : pour des sous espaces $Z \subset A \subset X$ avec $\bar{Z} \subset \text{Int}(A)$ l'inclusion $i : (X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ induit des isomorphismes $i^* : H^*(X, A, G) \cong H^*(X - Z, A - Z, G)$. Le premier isomorphisme est donc obtenu en prenant pour Z le complémentaire de $N(D)$.

Pour avoir le deuxième isomorphisme, on passe par la dualité de Lefschetz. Il existe une dualité plus générale qui affirme que si M est compact et que $\partial M = A \cup B$ avec $\partial A = \partial B = A \cap B$ on a des isomorphismes $D_M : H^k(M, A; R) \cong H_{n-k}(M, B; R)$. Si on prend le cas particulier où $B = \emptyset$ et $A = \partial M$ on tombe sur la dualité de Lefschetz et on trouve que $H^k(M, \partial M; R) \cong H_{n-k}(M; R)$. \square

Dans notre cas, on a $H^2(N(D), \partial N(D); \mathbb{Z}) \cong H_{n-2}(N(D); \mathbb{Z}) \cong H_{n-2}(D, \mathbb{Z})$ (cf Madsen).

Car on ne change pas la cohomologie en prenant un voisinage tubulaire.

On a alors :

$$\begin{array}{ccc} H^2(E; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f^*} & H^2(\tilde{E}; \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(E - \text{Int}(N(D)); \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(\tilde{E} - \text{Int}(N(\tilde{D})); \mathbb{Z}) \end{array}$$

par le lemme 2.3.2

$$H^2(\tilde{E}, \tilde{E} - \text{Int}(N(\tilde{D})); \mathbb{Z}) \cong H_{n-2}(\tilde{D}, \mathbb{Z})$$

et la suite exacte

$$H^2(\tilde{E}, \tilde{E} - \text{Int}(N(\tilde{D})); \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\tilde{E}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\tilde{E} - \text{Int}(N(\tilde{D})); \mathbb{Z})$$

Par conséquent, l'image de $\tilde{e} - f^*(e)$ dans $H^2(\tilde{E} - \text{Int}(N(\tilde{D})); \mathbb{Z})$ étant nulle, la différence provient d'un élément $b \in H^2(\tilde{E}, \tilde{E} - \text{Int}(N(\tilde{D})); \mathbb{Z}) \cong H_{n-2}(\tilde{D}, \mathbb{Z})$.

Ainsi, il existe un élément $a \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\tilde{e} = f^*(e) + a[\tilde{D}]^*.$$

2.3.3 Calcul de a

$\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow M_3$ et $\pi : E \rightarrow M_3$ sont des fibrés en surfaces. Notons g' et g le genre de leur surface respective.

Proposition 2.3.5 *On a $2 - 2g' = m(2 - 2g - m) + m$*

Ce résultat est aussi connu sous le nom de théorème d'Hurwitz (ou formule de Riemann-Hurwitz).

Preuve :

Quand on calcule $\chi(\Sigma_{g'})$, il faut prendre en compte qu'en dehors des points ramifiés, tout se passe comme un revêtement classique, mais qu'au voisinage d'un point ramifié, on perd $(m - 1)$ copies de ce points. Comme il y a m points ramifiés, on a $\chi(\Sigma_{g'}) = \chi(\Sigma_g) - m(m - 1)$ et donc

$$2 - 2g' = m(2 - 2g) - m(m - 1)$$

ce qui achève la preuve. \square

Maintenant dans la formule $\tilde{e} = f^*(e) + a[\tilde{D}]^*$ si on se restreint aux fibres de $\tilde{\pi}$, on trouve alors que $2 - 2g' = m(2 - 2g) + ma$. Les deux premiers termes proviennent du fait que lorsque l'on restreint les classes d'Euler aux surfaces, on tombe exactement sur la caractéristique d'Euler. On corrige alors par am car D coupe transversalement chaque fibre en exactement m points.

Puis après identification, on a

$$a = 1 - m.$$

Ce qui prouve alors que

$$\tilde{e} = f^*(e) - (m - 1)[\tilde{D}]^* = f^*(e - (1 - \frac{1}{m})[D]^*).$$

Ce qui conclut la preuve de la proposition 2.3.1. \square

Finalement on peut calculer notre première classe e_1 :

Proposition 2.3.6

$$\langle e_1, [M_3] \rangle = (2g_2 - 2)m^{2g_2}(m^2 - 1).$$

$$\begin{aligned} \langle e_1, [M_3] \rangle &= \langle \tilde{e}^2, [\tilde{E}] \rangle \\ &= \langle f^*((2 - 2g_2)[\Sigma_{g_2}]^* - (1 - \frac{1}{m})[D]^*)^2, [\tilde{E}] \rangle \\ &= m \langle ((2 - 2g_2)[\Sigma_{g_2}]^* - (1 - \frac{1}{m})[D]^*)^2, [M_3 \times \Sigma_{g_2}] \rangle \\ &= m^{2g_2+1} \langle ((2 - 2g_2)[\Sigma_{g_2}]^* - (1 - \frac{1}{m})[D_2]^*)^2, [\Sigma_{g_2} \times \Sigma_{g_2}] \rangle \\ &= m^{2g_2+1}(-2(1 - \frac{1}{m})(2 - 2g_2)m + (1 - \frac{1}{m})^2 m(2 - 2g_2)) \\ &= (2g_2 - 2)m^{2g_2}(m^2 - 1). \end{aligned}$$

Donc pour la première ligne, on remplace par la définition des classes caractéristiques.

Pour la deuxième ligne, c'est la proposition 2.3.1, avec dans le cas particulier d'un fibré en surface triviale $M_3 \times \Sigma_{g_2} \rightarrow M_3$, la classe d'Euler de ce fibré correspond à $\chi(\Sigma_{g_2})[\Sigma_{g_2}]$ (section 1.1.2 et lemme 2.2.2).

Pour la troisième ligne, si $f : X_1 \rightarrow X_2$ est un revêtement ramifié d'ordre m , alors $\langle f^*\alpha, [X_1] \rangle = m \langle \alpha, f_*[X_1] \rangle$. Cela se voit très bien quand on passe à coefficients réels: on obtient une intégration d'une forme de degrés maximale sur la variété X_1 qui est invariant par difféomorphisme. Donc quand on prend un revêtement, il faut prendre en compte m fois l'intégration. Cela marche donc pour les revêtements d'ordre m , ainsi que pour les revêtement cyclique (puisque la différence entre les deux est une intégration sur une variété de codimension 2, donc négligeable).

Pour la quatrième ligne, il s'agit de la même remarque pour le revêtement $M_3 \rightarrow \Sigma_{g_2}$ d'ordre m^{2g_2} .

Il me manque le passage à la cinquième ligne à ce jour.

2.3.4 Conclusion

Finalement, pour $g_2 > 1$ et $m > 1$, on a construit un $\Sigma_{g'}$ -fibré $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow M_3$ dont la première classe caractéristique e_1 est non triviale.

Chapter 3

Généralisation

On a construit au chapitre précédent un fibré en surface $E \rightarrow M$ dont la première classe e_1 est non triviale. Le résultat préliminaire qui découlait de l'hypothèse d'existence de section forçait les classes e_i à être triviales pour $i \geq 3$.

L'idée suivante, qui fait l'objet de ce chapitre, est de construire récursivement des fibrés dont on pourrait calculer e_{i+1} connaissant le e_i du fibré précédent.

Les principes de construction se feront à l'aide de 3 constructions types, en se restreignant à ne prendre que des revêtements finis, des tirés en arrière ou des revêtements ramifiés.

3.1 Premier procédé

On se donne un Σ_g -fibré $\pi : E \rightarrow M$. Le premier procédé sert à avoir un autre Σ_g fibré en augmentant la dimension des espaces de base de 2.

Définition 3.1.0.1 Soit un Σ_g -fibré $\pi : E \rightarrow M$, on note E^* le fibré tiré en arrière de E par lui même : $E^* = \{(u, u'), \pi(u) = \pi(u')\}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma_g & & \Sigma_g \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E^* & \xrightarrow{q} & E \\
 \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\
 E & \xrightarrow{\pi} & M
 \end{array}$$

avec $\pi'(u, u') = u, q(u, u') = u'$.

L'avantage de construire ce fibré est que l'on obtient une section gratuite à π' , $s : \begin{cases} E & \longrightarrow & E^* \\ u & \longmapsto & (u, u) \end{cases}$.

Définition 3.1.0.2 On note $D = \{(x, x), x \in E\}$ la diagonale dans E^* .

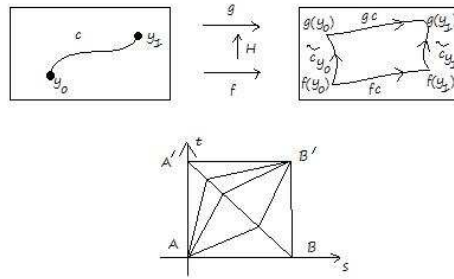
Proposition 3.1.1 La diagonale D est une sous variété de E^* de codimension 2 qui intersecte transversalement les fibres de π' .

3.2 Le théorème de Dehn-Nielsen-Baer

Discutons d'une autre interprétation du Groupe Modulaire au travers de ce théorème. Tout d'abord, pour $g \geq 1$, on considérera le Groupe Modulaire généralisé $M_g^\pm = \text{Diff}(\Sigma_g)/\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ où l'on n'impose pas aux difféomorphismes de Σ_g de préserver l'orientation. On remarquera que M_g^\pm contient M_g comme sous groupe d'indice 2.

Soit f un homéomorphisme de Σ_g , qui fixe $y_0 \in \Sigma_g$ préalablement fixé. On note f_* l'automorphisme induit sur $\pi_1(\Sigma_g, y_0)$. Si deux homéomorphismes f et g sont isotopes à travers une isotopie qui fixe y_0 , alors ils induisent les mêmes automorphismes sur $\pi_1(\Sigma_g, y_0)$.

Toutefois, si l'isotopie ne fixe pas y_0 pour tout temps t , alors f_* et g_* diffèrent d'une conjugaison par une classe du lacet $\gamma(t) = H(y_0, t)$, où H désigne l'isotopie.



Il est plus facile de le voir pour des chemins dans un premier temps. Si c est un chemin entre y_0 et y_1 , on note $\tilde{c}_{y_i}(t) = H(t, y_i)$. Pour P et Q dans $I \times I$ ($I = [0, 1]$), notons $T_{PQ} : s \mapsto (1-s)P + sQ$.

Alors $G : \begin{cases} I \times I & \longrightarrow \Sigma_g \\ (s, t) & \longmapsto H(c(s), t) \end{cases}$ envoie $T_{AB}T_{BB'}$ sur $f\sigma\tilde{c}_{y_1}$ et $T_{AA'}T_{A'B'}$ sur $\tilde{c}_{y_0}g\sigma$.

On obtient une homotopie de $f\sigma\tilde{c}_{y_1}$ vers $\tilde{c}_{y_0}g\sigma$ en composant G avec une homotopie de chemins dans $I \times I$, allant de $T_{AB}T_{BB'}$ vers $T_{AA'}T_{A'B'}$. On obtient le résultat que pour les lacets, f_* et g_* diffèrent d'une conjugaison par une classe du lacet $\gamma(t) = H(y_0, t)$.

Notons qu'à isotopie près, tout homéomorphisme préserve un point de base fixé. En effet, on peut se convaincre sans trop de problème que si f est un tel homéomorphisme, on choisit un chemin c qui relie $f(y_0)$ à y_0 et il existe une famille d'isotopies $F(t, y)$ telle que $F(0, y) = y$ et $F(t, f(y_0)) = c(t)$, de telle sorte que le point $f(y_0)$ est transporté le long de c , et le reste de Σ_g est transporté de manière continue.

Alors $H(t, y) = F(t, f(x))$ fourni l'isotopie désirée.

Finalement, on a un morphisme naturel $M_g^\pm \rightarrow \text{Out}(\pi_1(\Sigma_g)) = \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g))/\text{Inn}(\pi_1(\Sigma_g))$, où $\text{Inn}(\pi_1(\Sigma_g))$ désigne le sous groupe de $\text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g))$ dont les éléments agissent comme

une conjugaison.

Le théorème de Denh-Nielsen-Baer affirme que cette application est un isomorphisme, qui identifie alors un objet topologique (le Groupe Modulaire) avec un objet purement algébrique.

3.3 Deuxième procédé

Lemme 3.3.1 *Soit un Σ_g fibré $\pi : E \rightarrow M$ orienté, avec $g \geq 1$. Alors pour tout entier m , il existe un revêtement fini $M_1 \rightarrow M$ tel que le tiré en arrière $E_1 \rightarrow M$ admette un revêtement d'ordre m , $E'_1 \rightarrow E_1$ suivant les fibres. Autrement dit, que $E'_1 \rightarrow M_1$ soit un $\Sigma_{g'}$ fibré, où $\Sigma_{g'}$ est un revêtement d'ordre m de Σ_g*

$$\begin{array}{ccccc}
 \Sigma_{g'} & \xrightarrow{R_m} & \Sigma_g & & \Sigma_g \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \exists E'_1 & \xrightarrow{R} & E_1 & \longrightarrow & E \\
 \tilde{\pi} \downarrow & & \pi_1 \downarrow & & \downarrow \\
 M_1 & \xlongequal{\quad} & \exists M_1 & \xrightarrow{R} & M
 \end{array}$$

On rappelle que l'existence de revêtement d'ordre m équivaut à l'existence de sous groupe du π_1 d'indice m de l'espace d'arrivé.

D'autre part, on peut montrer que la donnée d'un Σ_g fibré est équivalente, à isomorphisme près, à la donnée de l'homomorphisme d'holonomie $\pi_1(M) \rightarrow M_g$ du groupe fondamentale de la base dans le Groupe Modulaire.

Au vu du lemme, il devient intéressant de basculer sur le point de vue algébrique du Groupe Modulaire au travers du théorème de Denh-Baer-Nielsen. On a alors $M_g = Aut_+(\pi_1(\Sigma_g))/Inn(\pi_1(\Sigma_g))$ où $Aut_+(\pi_1(\Sigma_g))$ est le sous groupe de $Aut(\pi_1(\Sigma_g))$ d'indice 2 correspondant à M_g .

On commence par fixer un revêtement d'ordre m de Σ_g , $f : \Sigma_{g'} \rightarrow \Sigma_g$. C'est équivalent à se donner un sous groupe normal d'indice m $f\pi_1(\Sigma_{g'})$ de $\pi_1(\Sigma_g)$. On peut identifier $f\pi_1(\Sigma_{g'})$ avec $\Sigma_{g'}$ car l'application induite par le revêtement est injective.

On choisit ensuite un groupe Γ_1 de $Aut_+(\pi_1(\Sigma_g))$ qui stabilise $\pi_1(\Sigma_{g'})$, il induit donc une flèche $\Gamma_1 \rightarrow Aut_+(\pi_1(\Sigma_{g'}))$. Enfin, on note $r : \Gamma_1 \rightarrow Aut_+(\pi_1(\Sigma_{g'})) \rightarrow M_{g'}$, obtenu en composant avec la projection canonique de $Aut_+(\pi_1(\Sigma_{g'}))$ sur le groupe modulaire.

Tout élément de $\Gamma_1 \cap Inn(\pi_1(\Sigma_g))$ est d'ordre fini dans M_g . En effet, pour $\gamma \in \Gamma_1 \cap Inn(\pi_1(\Sigma_g))$, on a $\gamma : \sigma \mapsto c^{-1}\sigma c$ sur $\pi_1(\Sigma_g)$. Or comme $[\pi_1(\Sigma_g) : \pi_1(\Sigma_{g'})] = m$ et que $\gamma^m : \sigma \mapsto (c^m)^{-1}\sigma(c^m)$ alors $c^m \in \pi_1(\Sigma_{g'})$ car si $[c] \in \pi_1(\Sigma_g)/\pi_1(\Sigma_{g'})$, on a $[c^m] = [c]^m = 0$.

Finalement, $\gamma^m \in Inn(\pi_1(\Sigma_g))$.

Admettons le résultat suivant :

Proposition 3.3.2 *Le groupe modulaire $M_{g'}$ est virtuellement sans torsion. c'est-à-dire qu'il contient un sous-groupe distingué d'indice fini sans torsion.*

Finalement, on choisit un sous groupe distingué Γ_2 de $M_{g'}$ d'indice fini sans torsion. Par ce qui précède

$$r^{-1}(\Gamma_2) \cap \text{Inn}(\pi_1(\Sigma_g)) \subset \text{Ker}(r)$$

On a donc réussi à factoriser

$$\begin{array}{ccc} r^{-1}(\Gamma_2) & \xrightarrow{r} & M_{g'} \\ \downarrow & \nearrow & \\ M_g & & \end{array}$$

Notons la projection $\pi : \text{Aut}_+(\pi_1(\Sigma_g)) \rightarrow M_g$ et posons Γ_3 le sous groupe de M_g comme l'intersection de tous les sous groupes conjugués à $\pi(r^{-1}(\Gamma_2))$, qui est donc d'indice fini. Par construction, on a donc une flèche $\Gamma_3 \rightarrow M_{g'}$.

Si $h : \pi_1(M) \rightarrow M_g$ est le morphisme d'holonomie du fibré $E \rightarrow M$, on choisit le revêtement $M_1 \rightarrow M$ induit par le noyau de l'application $\pi_1(M) \rightarrow M_g \rightarrow M_g/\Gamma_3$ et on définit le $\Sigma_{g'}$ fibré $E'_1 \rightarrow M_1$ par $\pi_1(M_1) \rightarrow \Gamma_3 \rightarrow M_{g'}$.

Par construction, on a bien une flèche $E'_1 \rightarrow E_1$ qui est un revêtement fini. L'ordre du revêtement est alors le même que celui de $\Sigma_{g'} \rightarrow \Sigma_g$ car si $e \in E_1$, alors $e \in \Sigma_g$ au dessus de $m \in M_1$. Par commutativité du diagramme, $\text{Card}(p^{-1}(e)) = m$. \square

3.4 Troisième procédé

Définition 3.4.0.3 *On définit pour chaque entier n une classe C_n constituée de variétés de dimension $2n$ connexes, définie de manière récursive :*

La classe C_0 est l'ensemble des points. La classe C_1 consiste en les surfaces Σ_g de genre $g \geq 2$. De manière générale C_{n+1} est constitué des variétés E' qui sont un revêtement fini d'un espace total E d'un Σ_g fibré dont la base M vit dans C_n :

$$\begin{array}{ccc} & & \Sigma_g \\ & & \downarrow \\ E' & \xrightarrow{R} & E \\ & & \downarrow \\ & & M \in C_n \end{array}$$

On posera $C = \bigcup C_n$.

Proposition 3.4.1 *Soit $E \in C$ et soit m un entier non nul. Alors pour toute classe de cohomologie $u \in H^2(E, \mathbb{Z}/m)$ il existe un revêtement fini $p : \tilde{E} \rightarrow E$ tel que $p^*(u) = 0$.*

Preuve : La preuve se déroule par récurrence. Le cas $n = 0$ est trivial, et pour le cas $n = 1$, on prend $\tilde{E} = \Sigma_g$ un revêtement d'ordre m de Σ_g .

Supposons donc que $E \in C_n$.

Lemme 3.4.2 *Soit $E \in C_n$, alors il existe un Σ_g -fibré $E'_0 \rightarrow M'_0$, avec $E'_0 \in C_n$ et $M'_0 \in C_{n-1}$, et une application $f : E'_0 \rightarrow E$ avec $f = i \circ R$, où i est une injection et R un revêtement.*

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma_g & \\ & \downarrow & \\ & E'_0 & \xrightarrow{f} E \\ & \downarrow & \\ & M'_0 & \end{array}$$

Preuve : On a alors

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma_{g_1} & \\ & \downarrow & \\ E' & \xrightarrow{R} & E_0 \\ & & \downarrow \\ & & M_0 \end{array}$$

Avec $M_0 \in C_n$. On a donc un espace fibré en prenant la composition $E \rightarrow M_0$ mais les fibres Σ ne sont pas nécessairement connexes. Toutefois $\pi_1(M_0)$ agit sur $\pi_0(\Sigma)$ on prend alors un revêtement qui annule cette action $M'_0 \rightarrow M_0$. Notons $E' \rightarrow M'_0$ le fibré tiré en arrière.

Soit E'_0 une composante connexe de E' , alors

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_g & & \Sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ E'_0 & \hookrightarrow & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M'_0 & & M'_0 \end{array}$$

devient un Σ_g fibré, pour un certain g . \square

La classe $u \in H^2(E, \mathbb{Z}/m)$ a une image $u' \in H^2(E'_0, \mathbb{Z}/m)$.

Lemme 3.4.3 *Soit $E'_0 \rightarrow M'_0$ un Σ_g -fibré, alors il existe un morphisme de fibré*

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma_{g'} & \xrightarrow{R_m} & \Sigma_g \\
\downarrow & & \downarrow \\
E_2 & \xrightarrow{h} & E'_0 \\
\downarrow \pi & & \downarrow \\
M_2 & \xrightarrow{R} & M'_0
\end{array}$$

tel que pour tout $u' \in H^2(E'_0, \mathbb{Z}/m)$ il existe $v \in H^2(M_2; \mathbb{Z}/m)$ tel que $h^*(u') = \pi^*(v)$.

On peut alors conclure la preuve de la troisième construction (i-e de la proposition) avec ce lemme. Finalement, comme on ne prend dans la construction que des revêtement d'ordre fini, on a $M_2 \in C_n$, on choisit donc un revêtement d'ordre fini $r : M_3 \rightarrow M_2$ tel que $r^*(v) = 0$. Notons $\tilde{E} \rightarrow M_3$ le fibré tiré en arrière, alors $p : \tilde{E} \rightarrow E$, obtenu en prenant toutes les compositions, est un revêtement fini, et $p^*(u) = 0$ par construction. \square

Preuve du lemme 3.4.3: Appliquons le lemme 3.3.1 au fibré $\Sigma_g \rightarrow E'_0 \rightarrow M'_0$:

$$\begin{array}{ccccc}
\Sigma_{g'} & \xrightarrow{R_m} & \Sigma_g & & \Sigma_g \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\exists E'_1 & \xrightarrow{R} & E_1 & \longrightarrow & E'_0 \\
\downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \\
M_1 & \xlongequal{\quad} & \exists M_1 & \xrightarrow{R} & M'_0
\end{array}$$

Le groupe fondamental $\pi_1(M_1)$ agit sur $H^1(\Sigma_{g'}; \mathbb{Z}/m)$ au travers du morphisme d'holonomie : si $\gamma \in \pi_1(M_1)$, on pose $f = \rho(\gamma)$ où ρ est le morphisme d'holonomie associé à $M_1 \rightarrow E'_1$. Alors à $\omega \in H^1(\Sigma_{g'}; \mathbb{Z}/m)$ on associe $\omega \circ f$. On choisit alors un revêtement $M'_1 \rightarrow M_1$ qui tue cette action, c'est-à-dire le revêtement induit par le noyau de $\pi_1(M_1) \rightarrow \text{Aut}(H^1(\Sigma_{g'}; \mathbb{Z}/m))$. On note E''_1 le fibré tiré en arrière :

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma_{g'} & & \Sigma_{g'} \\
\downarrow & & \downarrow \\
E''_1 & \longrightarrow & E'_1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
M'_1 & \longrightarrow & M_1
\end{array}$$

Ensuite on choisit un revêtement $M_2 \rightarrow M'_1$ induit par le noyau de $\pi_1(M'_1) \rightarrow H_1(M'_1; \mathbb{Z}/m)$. Ce noyau est d'indice fini car \mathbb{Z}/m est d'indice fini. Ainsi on obtient un revêtement tel que $H^1(M'_1, \mathbb{Z}/m) \rightarrow H^1(M_2, \mathbb{Z}/m)$ soit trivial. On note E_2 le fibré tiré en arrière :

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma_{g'} & & \Sigma_{g'} \\
\downarrow & & \downarrow \\
E_2 & \longrightarrow & E_1'' \\
\downarrow & & \downarrow \\
M_2 & \longrightarrow & M_1'
\end{array}$$

On récapitule le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Sigma_{g'} & & \Sigma_{g'} & & \Sigma_{g'} & \xrightarrow{R_m} & \Sigma_g & & \Sigma_g \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
E_2 & \longrightarrow & E_1'' & \longrightarrow & E_1' & \xrightarrow{R} & E_1 & \longrightarrow & E_0' \\
\pi \downarrow & & \downarrow & & \tilde{\pi} \downarrow & & \pi_1 \downarrow & & \downarrow \\
M_2 & \longrightarrow & M_1' & \longrightarrow & M_1 & \xlongequal{\quad} & \exists M_1 & \xrightarrow{R} & M_0'
\end{array}$$

Avec $\pi_1(M_1')$ qui agit trivialement sur $H^1(\Sigma_{g'}; \mathbb{Z}/m)$ et $H^1(M_1', \mathbb{Z}/m) \rightarrow H^1(M_2, \mathbb{Z}/m)$ trivial. Ce qui fournit la construction de $E_2 \rightarrow M_2$.

Comme le lemme l'indique, si on veut faire marcher la récurrence, il va falloir descendre la classe de cohomologie à l'étage inférieur. Or, si les classes de cohomologie se comportent bien quand on les tire en arrière, tout se corse quand il faut les pousser. Toutefois, il existe des résultats pour les fibrés. La théorie des suites spectrales permet pour des fibrés dont l'action du groupe fondamental de la base sur la fibre est triviale, de décrire les classes de cohomologie de l'espace total à l'aide de celles de la fibre et de la base.

Dans notre cas, on utilisera sans démonstration un résultat obtenu en utilisant la suite spectrale de Leray-Serre (voir [?]). Pour pouvoir l'appliquer, on devra donc se placer sur le fibré :

$$\Sigma_{g'} \rightarrow E_1'' \rightarrow M_1'$$

Dans le cas qui nous intéresse, le résultat obtenu en passant par les suites de Leray-Serre est que $H^2(E_1'', \mathbb{Z}/m) = E_\infty^{2,0} \oplus E_\infty^{1,1} \oplus E_\infty^{0,1}$, où les différents termes du membre de droite sont des certains quotients respectivement de

$$\begin{aligned}
E_2^{2,0} &= H^2(M_1'; \mathbb{Z}/m) \\
E_2^{1,1} &= H^1(M_1'; H^1(\Sigma_{g'}; \mathbb{Z}/m)) \\
E_2^{0,2} &= H^0(M_1'; H^2(\Sigma_{g'}; \mathbb{Z}/m)) \cong H^2(\Sigma_{g'}; \mathbb{Z}/m).
\end{aligned}$$

Notons w l'image de u' dans $H^2(E_1''; \mathbb{Z}/m)$, alors w peut se décomposer en trois facteurs, qui se relèvent respectivement en des éléments $w_1 \in E_2^{2,0}$, $w_2 \in E_2^{1,1}$ et $w_3 \in E_2^{0,2}$.

Pour w_3 : Sur la partie du diagramme suivante

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{g'} & \xrightarrow{R_m} & \Sigma_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_1'' & \longrightarrow & E_1 \end{array}$$

par commutativité du diagramme, le terme $w_3 \in H^2(M_1'; \mathbb{Z}/m)$ provient d'un élément du $H^2(\Sigma_g, \mathbb{Z}/m)$ tiré en arrière par un revêtement d'ordre m , donc il est nul dans $H^2(\Sigma_{g'}; \mathbb{Z}/m)$.

Pour w_2 : On ne peut a priori rien dire sur w_2 dans $H^1(M_1'; H^1(\Sigma_{g'}; \mathbb{Z}/m))$, toutefois, comme on a prit soin de prendre un revêtement $M_2 \rightarrow M_1'$ tel que $H^1(M_1'; \mathbb{Z}/m) \rightarrow H^1(M_2; \mathbb{Z}/m)$ soit trivial, intuitivement, l'image de w_2 serait nul dans $H^1(M_2; H^1(\Sigma_{g'}; \mathbb{Z}/m))$, c'est ce qu'on va montrer.

Lemme 3.4.4 *Soient un homéomorphisme $f : X \rightarrow Y$ entre deux variétés X et Y , F une autre variété et G un groupe abélien. Supposons que cet homéomorphisme induise un homomorphisme trivial en cohomologie, c'est-à-dire que $f^* : H^1(Y, G) \rightarrow H^1(X, G)$ soit trivial. Alors,*

$$H^1(Y, H^1(F, G)) \rightarrow H^1(X, H^1(F, G))$$

est trivial.

Preuve : On rappelle la définition de la cohomologie singulière. Si $C_n(X)$ désigne le groupe des simplexes, on note $C^n(X, G)$ le groupe des cochaînes, i-e $C^n(X, G) = \text{Hom}(C_n(X), G)$, pour tout n entier. On a un opérateur δ sur les groupes des cochaînes qui permet de définir la cohomologie en degrés n en définissant $H^n(X, G) = \ker(\delta) / \text{Im}(\delta)$ dans $C^n(X, G)$. L'opérateur δ est l'opérateur dual de l'opérateur ∂ sur les groupes des simplexes, i-e que si $\phi \in C^n(X, G)$, alors $\delta\phi = \phi \circ \partial$.

Supposons donc que $f^* : H^1(Y, G) \rightarrow H^1(X, G)$ soit trivial, c'est donc dire que pour tout $\phi \in C^1(Y, G)$, il existe $\psi \in C^0(X, G)$ tel que $f^*\phi = \delta_X\psi$, et que tout est indépendant des choix des représentants. On prend bien soin de préciser sur quel espace on utilise l'opérateur δ . Plus important, par définition de δ , cet opérateur est le même qu'on se place dans $H^1(X, G)$ que dans $H^1(X, H^1(F, G))$, donc on sera amené à distinguer δ_X de δ_Y .

Commençons par

$$\psi \in \text{Hom}(C_1(Y), \text{Hom}(C_1(F), G)) = \text{Hom}(C_1(Y) \times C_1(F), G) = \text{Hom}(C_1(F), \text{Hom}(C_1(Y), G))$$

On a, pour $c \in C_1(F)$, $f^*\psi(c) = \delta_X\phi_c$ avec $\phi_c \in \text{Hom}(C_0(X), G)$.

Ce qu'on voudrait, c'est $f^*\psi = \delta_X\bar{\phi}$ avec $\bar{\phi} \in \text{Hom}(C_0(X), \text{Hom}(C_1(F), G))$, mais un tel élément existe, car par la propriété de l'opérateur δ , on a pour $\alpha \in C_0(X)$:

$\delta_X\bar{\phi}(\alpha) = \bar{\phi}(\partial\alpha) : c \mapsto \phi_c(\delta_X\alpha)$. Finalement, cela marche bien car l'opérateur δ est défini indépendamment du groupe des coefficients.

On vérifie que tout ce qu'on a fait est indépendant du choix des représentants. Or sur $C_1(Y)$ rien ne se passe car le tiré en arrière par f n'agit que sur les simplexes de Y . Puis on conclut car tout se passe comme dans le cas usuel, avec les propriétés de functorialité des tirés en arrière. \square

Finalement, il ne restait que deux classes w_1 et w_2 , mais dès qu'on tire en arrière encore une fois pour se trouver dans la partie du fibré $\Sigma_{g'} \rightarrow E_2 \rightarrow M_2$, la composante sur $H^1(M_2; H^1(\Sigma_{g'}; \mathbb{Z}/m))$ est nulle. Il ne reste plus qu'une seule image : celle dans $H^1(M_2, \mathbb{Z}/m)$, ce qui conclut la preuve du lemme 3.4.3. \square

Remarque : On pourrait se demander s'il est nécessaire de se restreindre aux variétés qui vivent dans C pour faire cette construction. On peut apporter une réponse avec l'exemple de $E = \mathbb{S}^2$, qui n'admet pas de revêtement car \mathbb{S}^2 est simplement connexe.

3.5 m-construction

Soit un Σ_g fibré $E \rightarrow M$, avec $E \in C_n$, avec la première construction, on a un nouveau Σ_g fibré $E^* \rightarrow E$, muni d'une section $s : E \rightarrow E^*$ d'image D qui est une sous variété orientée de codimension 2. On note $v_m \in H^2(E^*; \mathbb{Z}/m)$ la réduction modulo m de la classe duale au sens de Poincaré de sa classe fondamentale.

On applique le lemme 3.4.3 au fibré $E^* \rightarrow E$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{g'} & \xrightarrow{R_m} & \Sigma_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_2^* & \xrightarrow{h} & E^* \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ E_2 & \xrightarrow{R} & E \end{array}$$

où l'on a remplacé (avec les notations précédentes) M par E et E par E^* . Il existe donc $v \in H^2(E_2; \mathbb{Z}/m)$ tel que $h^*(v_m) = \pi^*(v)$.

L'application $R : E_2 \rightarrow E$ est un revêtement, et comme $E \in C_n$, on a $E_2 \in C_n$. De ce fait, on peut appliquer la proposition 3.4.1 à E_2 : il existe $p : \tilde{E} \rightarrow E_2$ tel que $p^*(v) = 0$.

On note E_3^* le fibré tiré en arrière :

$$\begin{array}{ccccc} & & \Sigma_{g'} & \xrightarrow{R_m} & \Sigma_g \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_3^* & \longrightarrow & E_2^* & \longrightarrow & E^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{E} & \xrightarrow{p} & E_2 & \longrightarrow & E \end{array}$$

Notons D^* l'image inverse de D dans E_3^* , c'est une variété (cf paragraphe 2.3). Par commutativité des diagrammes, sa classe de cohomologie réduite modulo m est nulle dans $H^2(E_3^*; \mathbb{Z}/m)$. On applique alors la proposition 2.1.1 à $M = E_3^*$ et $B = D^*$: il existe un revêtement $\tilde{E}^* \rightarrow E_3^*$ cyclique ramifié suivant D^* .

La projection $\tilde{E}^* \rightarrow \tilde{E}$ est un $\Sigma_{g''}$ fibré.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{g''} & & \Sigma_{g'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{E}^* & \longrightarrow & E_3^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{E} & \xlongequal{\quad} & \tilde{E} \end{array}$$

Comme on l'a vu au chapitre 2, paragraphe 2.5, $\Sigma_{g''}$ est un revêtement de $\Sigma_{g'}$ ramifié en m points, et on avait (proposition 2.5.1)

$$2 - 2g'' = m(2 - 2g' - m) + m.$$

Or $\Sigma_{g'}$ étant un revêtement d'ordre m de Σ_g , on a

$$g' = m(g - 1) + 1.$$

Finalement on a

$$g'' = m^2g - \frac{1}{2}m(m + 1) + 1.$$

On résume notre construction par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{g''} & & \Sigma_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{E}^* & \longrightarrow & E^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{E} & \longrightarrow & E \end{array}$$

Ce fibré est construit à partir du fibré $E \rightarrow M$. On appellera ce fibré une m -construction de $E \rightarrow M$. L'espace total \tilde{E}^* appartient à la classe C_{n+1} .

3.6 Calcul de e_i

Dans le dernier schéma commutatif, gardons en résumé de la construction pour un Σ_g fibré quelconque $E \rightarrow M$, l'existence d'un $\Sigma_{g''}$ fibré $\tilde{E}^* \rightarrow \tilde{E}$ tel que :

$$\begin{array}{ccccc}
\Sigma_{g''} & & \Sigma_g & & \Sigma_g \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\tilde{E}^* & \xrightarrow{r} & E^* & \xrightarrow{q} & E \\
\tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\
\tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{r}} & E & \xrightarrow{\pi} & M
\end{array}$$

Enfin, désignons par $e \in H^2(E^*; \mathbb{Z})$ et $\tilde{e} \in H^2(\tilde{E}^*; \mathbb{Z})$ les classes d'Euler de $\tilde{\pi}$ et de π . On notera D l'image de la section $s : E \rightarrow E^*$, et on pose $\tilde{D} = r^{-1}(D)$, $v = [D]^*$, $\tilde{v} = [\tilde{D}]^*$.

On rappelle que la classe d'Euler associée à $\pi : E \rightarrow M$ désigne la classe d'Euler du fibré ζ des vecteurs tangents aux fibres, qui est un fibré sur E de dimension 2. Les classes caractéristiques associées au fibré $\pi : E \rightarrow M$ sont alors les $e_i = \pi_*(e^{i+1}) \in H^{2i}(M; \mathbb{Z})$ où π_* désigne l'homomorphisme de Gysin.

Proposition 3.6.1 *i) $r^*([D]^*) = m[\tilde{D}]^*$*

*ii) $[D]^{*2} = q^*(e)[D]^* = (\pi')^*(e)[D]^*$*

iii) $\tilde{e} = r^(q^*(e) - (1 - \frac{1}{m})[D]^*)$*

Preuve :

i) et iii) proviennent de la proposition similaire au chapitre précédent.

Montrons ii) :

Notons $i : D \rightarrow E^*$ l'inclusion. La première étape consiste à remarquer que $i^*q^*(e) = i^*(\pi')^*(e)$ est égale à la classe d'Euler du fibré normal de D dans E^* . En effet, quand on tire en arrière le fibré des vecteurs tangents aux fibres par l'application $D \hookrightarrow E^* \rightarrow E$, on obtient un fibré isomorphe au fibré normal à D . La remarque repose alors sur la naturalité de la classe d'Euler.

La deuxième étape consiste à relier la classe d'Euler du fibré normal à D avec la classe duale au sens de Poincaré de D . Pour cela, on passe par l'étude de la classe de Thom, et de l'isomorphisme de Thom. Le résultat principal est le suivant : *La classe de Thom d'un fibré normal orienté d'une sous-variété d'une variété orientée est la tirée en arrière de la classe duale de Poincaré de la sous-variété.* Auquel on rajoute le fait que la classe d'Euler peut être définie à partir de la classe de Thom.

Passons en cohomologie à coefficients réels. On change de cadre pour s'occuper de fibrés vectoriels. Soit $p : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel de rang 2 (puisque c'est ce qu'il nous intéresse). On note $\Omega_{cv}^\bullet(E)$ l'ensemble des formes sur E dont les restrictions aux fibres de p sont à support compact. Localement de telles formes s'écrivent

$$\omega = p^*\omega_M \wedge \alpha$$

où, par abus de notation, α est une forme sur \mathbb{R}^2 à support compact et ω_M est une forme sur M .

On a alors un isomorphisme, dit isomorphisme de Thom

$$\Phi_* : H_{cv}^\bullet(E) \rightarrow H^\bullet(M)$$

donné par l'intégration sur les fibres :

$$\Phi_*(\omega) = \omega_M \int_{\mathbb{R}^2} \alpha$$

si α est de degrés 2, et 0 sinon.

On définit alors la classe de Thom $U \in H_{cv}^\bullet(E)$ telle que $\Phi_*(U) = 1 \in H^0(M) \cong \mathbb{R}$.

Comme pour l'homomorphisme de Gysin, l'intégration sur les fibres vérifie l'égalité :

$$\Phi_*(p^*\tau \wedge \omega) = \tau \wedge \Phi_*\omega$$

pour $\tau \in H^\bullet(M)$ et $\omega \in H_{cv}^\bullet(E)$.

Soit alors une variété M orientée, B une sous-variété de M de codimension 2. On définit alors le dual de Poincaré de B dans M par la classe $\nu \in H^2(M)$ telle que si $i : B \hookrightarrow M$ est l'inclusion, alors

$$\int_B i^*\omega = \int_M \omega \wedge \nu$$

pour toute forme ω fermée à support compact.

Proposition 3.6.2 *Le dual de Poincaré d'une sous-variété fermée B de M et la classe de Thom du fibré normal sont représentées par la même forme.*

Preuve : Soit M une variété de dimension n et B une sous-variété de M de codimension 2. On note $i : B \hookrightarrow M$ l'inclusion et $N(B)$ un voisinage tubulaire de B dans M . Alors $N(B)$ est isomorphe au fibré normal de B . Si bien qu'il existe $P : N(B) \rightarrow B$ un fibré qui soit isomorphe au fibré normal de B de rang 2. On note $\Phi_* : H_{cv}^{\bullet+2}(N(B)) \rightarrow H^\bullet(B)$ l'isomorphisme de Thom associé à ce fibré.

Soit $\alpha : B \rightarrow N(B)$ l'inclusion (ou la section nulle du fibré normal). Des formes qui vivent dans $H_{cv}^\bullet(N(B))$ peuvent être étendues à $H^\bullet(M)$ en les prolongeant par 0 (elles sont à support compact dans $N(B)$). Notons

$$j_* : H_{cv}^\bullet(N(B)) \rightarrow H^\bullet(M)$$

cette application et $U \in H_{cv}^2(N(B))$ la classe de Thom du fibré $p : N(B) \rightarrow B$. Soit alors ω une forme sur M .

$$\int_M \omega \wedge j_*U = \int_{N(B)} \omega|_{N(B)} \wedge U$$

car U est à support dans $N(B)$. Puis comme $p^*\alpha^* = id$,

$$\begin{aligned} \int_M \omega \wedge j_*U &= \int_{N(B)} p^*\alpha^*\omega|_{N(B)} \wedge U \\ &= \int_B \alpha^*\omega|_{N(B)} \wedge \Phi_*U \\ &= \int_B \alpha^*\omega|_{N(B)} \\ &= \int_B i^*\omega \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. \square

Définition 3.6.0.4 Soit un fibré $p : E \rightarrow M$ vectoriel de rang 2. Soit $\Phi_* : H_{cv}^{\bullet+2}(E) \rightarrow H^\bullet(M)$ l'isomorphisme de Thom et U la classe de Thom. On définit la classe d'Euler de ce fibré par $e = \Phi_* U \in H^2(M)$.

Revenons à notre proposition initiale.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \downarrow i & & \\ E^* & \xrightarrow{q} & E \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

On rappelle que si e était la classe d'Euler associée au fibré π , alors $i^*q^*(e)$ était la classe d'Euler du fibré normal à D . Notons $N(D) \rightarrow D$ le fibré normal (avec $N(D)$ un voisinage tubulaire de D dans E^*). La variété D est une sous variété de E^* de codimension 2, orientée. Notons ν sa classe duale au sens de Poincaré. On a montré précédemment que si on note

$$\begin{aligned} \Phi_* &: H_{cv}^{\bullet+2}(N(D)) \rightarrow H^\bullet(D) \\ j_* &: H_{cv}^\bullet(N(D)) \rightarrow H^\bullet(E^*) \end{aligned}$$

et

$$U \in H_{cv}^2(N(D))$$

la classe de Thom du fibré normal à D , on avait les égalités

$$\begin{aligned} i^*q^*(e) &= \Phi_*(U^2) \\ \nu &= j_*U \end{aligned}$$

Ce qui donne, car Φ_* est un isomorphisme,

$$\begin{aligned} \Phi_*^{-1}(-i^*q^*(e)) &= U^2 \\ \nu^2 &= j_*U^2. \end{aligned}$$

Or, $\Phi_*^{-1} = \wedge U$ et en combinant les deux équations on trouve

$$\begin{aligned} \nu^2 &= j_*\Phi_*^{-1}i^*(q^*(e)) \\ &= \nu q^*(e) \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. \square

Dans le premier chapitre, nous avons introduit quelques classes caractéristiques ds fibrés. On rappelle que si on a un Σ_g -fibré $E \rightarrow M$, on dispose d'un fibré vectoriel ζ sur E , qui est le fibré vectoriel des vecteurs tangents aux fibres. C'est un fibré vectoriel orienté de rang 2. On note $e \in H^2(E; \mathbb{Z})$ sa classe d'Euler, et on pose $e_i = \pi_*(e^{i+1}) \in H^{2i}(M; \mathbb{Z})$ l'image des puissance de la classe d'Euler par l'homomorphisme de Gysin.

Proposition 3.6.3 En notant e_k et \tilde{e}_k les classes caractéristiques des fibrés π et $\tilde{\pi}$, on a

$$\tilde{e}_k = m^2 \tilde{r}^*(\pi^*(e_k) - (1 - m^{-(k+1)})e^k)$$

Preuve : On a par la proposition précédente,

$$\tilde{e}^{k+1} = r^*(q^*(e) - (1 - \frac{1}{m})v)^{k+1}$$

on a

$$\begin{aligned} (q^*(e) - (1 - \frac{1}{m})v)^{k+1} &= q^*(e)^{k+1} + \sum_{n=1}^{n=k+1} C_{k+1}^n (-1)^n (1 - \frac{1}{m})^n q^*(e)^{k+1-n} v^n \\ &= q^*(e)^{k+1} + \sum_{n=1}^{n=k+1} C_{k+1}^n (-1)^n (1 - \frac{1}{m})^n (\pi')^*(e)^{k+1-n} v^n \\ &= q^*(e)^{k+1} + \sum_{n=1}^{n=k+1} C_{k+1}^n (-1)^n (1 - \frac{1}{m})^n (\pi')^*(e)^k v \\ &= q^*(e)^{k+1} + (-1 + (1 - 1 + \frac{1}{m})^{k+1}) (\pi')^*(e)^k v \\ &= q^*(e)^{k+1} - (1 + m^{-(k+1)}) (\pi')^*(e)^k v \end{aligned}$$

Les premières lignes de calculs s'obtiennent en utilisant la proposition 3.6.1 ii).

Alors $\tilde{e}^{k+1} = r^*(q^*(e)^{k+1} - (1 + m^{-(k+1)}) (\pi')^*(e)^k v)$.

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma_{g''} & & \Sigma_g & & \Sigma_g \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{E}^* & \xrightarrow{r} & E^* & \xrightarrow{q} & E \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ \tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{r}} & E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Si on applique l'homomorphisme de Gysin $\tilde{\pi}_* : H^{k+2}(\tilde{E}^*; \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(\tilde{E})$ à la dernière égalité on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_k &= \tilde{\pi}_*(\tilde{e}^{k+1}) \\ &= \tilde{\pi}_* r^*(q^*(e)^{k+1} - (1 + m^{-(k+1)}) (\pi')^*(e)^k v). \end{aligned}$$

Or, l'homomorphisme de Gysin est naturel respectivement aux morphismes de Σ_g -fibrés (lemme 1.1.2, iii)). Toutefois, l'application r n'est pas un morphisme de Σ_g fibré, puisque $\Sigma_{g''} \rightarrow \Sigma_g$ est un revêtement d'ordre m^2 . Ce qui signifie qu'on à l'égalité

$$\tilde{\pi}_* r^* = m^2 \tilde{r}^* \pi'_*$$

où $\pi'_* : H^{k+2}(E^*; \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(E; \mathbb{Z})$ est l'homomorphisme de Gysin du fibré π' .

On obtient donc

$$\tilde{e}_k = m^2 \tilde{r}^* \pi'_*(q^*(e)^{k+1} - (1 + m^{-(k+1)}) (\pi')^*(e)^k v).$$

Calculons $\pi'_*(q^*(e)^{k+1} - (1 + m^{-(k+1)}) (\pi')^*(e)^k v)$. Grâce au lemme 1.1.2 iii), on a $\pi'_* q^* = \pi^* \pi_*$ où $\pi_* : H^{k+2}(E; \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(M; \mathbb{Z})$ est l'homomorphisme de Gysin du fibré π . Cela donne

$$\pi'_* q^*(e)^{k+1} = \pi^*(e_k).$$

Finalement, avec le lemme 1.1.2 i) on peut exprimer

$$\begin{aligned} \pi'_* \pi'^*(e)^k v &= e^k \pi'_*(v) \\ &= e^k \end{aligned}$$

ce qui, en rassemblant les deux résultats, achève la preuve. \square

Ce qui permet de conclure sur un dernier lemme de calcul que si e_n est non trivial (pour M une variété $\in C_n$), alors \tilde{e}_{n+1} est lui aussi non trivial pour le fibré construit.

Supposons que $M \in C_n$. Donc M est une variété de dimension $2n$, donc on peut évaluer e_n sur $[M]$. La variété \tilde{E} construite est une variété de dimension $2(n+1)$, on peut tout aussi bien évaluer e_{n+1} sur $[\tilde{E}]$.

Lemme 3.6.4 *On a*

$$\tilde{e}_{n+1}[\tilde{E}] = -dm^2(1 - m^n)e_n[M]$$

où d est le degrés de l'application \bar{r} .

Preuve : On a montré que $\tilde{e}_{n+1} = m^2\bar{r}^*(\pi^*(e_{n+1}) - (1 - m^{-(n+2)})e^{n+1})$. Par raison de degré maximal, $e_{n+1} = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{n+1}[\tilde{E}] &= -m^2\bar{r}^*((1 - m^{-(n+2)})e^{n+1})[\tilde{E}] \\ &= -dm^2(1 - m^{-(n+2)})e^{n+1}[E] \\ &= -dm^2(1 - m^{-(n+2)})e_n[M] \end{aligned}$$

la dernière égalité provient de la propriété de l'homomorphisme de Gysin (lemme 1.1.2).□

3.7 Conclusion

Soit un Σ_g -fibré $E \rightarrow M$, avec $E \in C_n$. La m -construction nous donne un autre $\Sigma_{g'}$ -fibré :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{g''} & & \Sigma_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{E}^* & \xrightarrow{r} & E \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{E} & \longrightarrow & M \end{array}$$

avec $\tilde{E} \in C_{n+1}$. Gardons les notations précédentes : on note e_i les classes caractéristiques associées au fibré $E \rightarrow M$ et \tilde{e}_i celles associées à $\tilde{E}^* \rightarrow \tilde{E}$. Le lemme 3.6.3 affirme alors que si e_n est non triviale, il en est de même de \tilde{e}_{n+1} .

Cependant, dans le premier chapitre, on a montré le résultat suivant :

Proposition 3.7.1 *Si on a une section $s : M_g \rightarrow \text{Diff}_+(\Sigma_g)$, alors pour tout Σ_g -fibré $E \rightarrow X$ on a $e_i = 0 \in H^{2i}(X, \mathbb{Z}), \forall i \geq 3$.*

Dans le deuxième chapitre, nous avons construit un Σ_g -fibré $\tilde{E} \rightarrow M_3$ dont la première classe caractéristique était non triviale. La variété M_3 était un revêtement de Σ_g , où $g = m^2g' - \frac{1}{2}m(m+1) + 1$ avec $m >$ et $g' > 1$ quelconque. Par suite, on a $M_3 \in C_1$.

Partons alors du Σ_g -fibré $\tilde{E} \rightarrow M_3$, et choisissons m_1 quelconque. On notera e_1 la première classe caractéristique associée à ce fibré, qui est donc non triviale par construction. Si on applique une m_1 construction, on obtient alors un deuxième fibré

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{g_1} & & \Sigma_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{E}_1 & \longrightarrow & \tilde{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \longrightarrow & M_3 \end{array}$$

avec $g_1 = m_1^2 g - \frac{1}{2} m_1 (m_1 + 1) + 1$ et $X_1 \in C_2$.

Le lemme 3.6.3 affirme que si on note e_i^1 les classes caractéristiques associées au fibré $\tilde{E}_1 \rightarrow X_1$, alors $e_2^1 \in H^4(X_1; \mathbb{Z})$ est non triviale.

On recommence une autre fois ce qu'on vient de faire : on prend m_2 quelconque, et on applique une m_2 -construction au fibré $\tilde{E}_1 \rightarrow X_1$. On obtient alors :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{g_2} & & \Sigma_{g_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{E}_2 & \longrightarrow & \tilde{E}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \longrightarrow & X_1 \end{array}$$

avec $g_2 = m_2^2 g_1 - \frac{1}{2} m_2 (m_2 + 1) + 1$, et $X_2 \in C_3$.

Si on note e_i^E les classes caractéristiques associées au fibré $\tilde{E}_2 \rightarrow X_2$, alors $e_3^2 \in H^6(X_2; \mathbb{Z})$ est non triviale. Ce qui fournit notre contradiction. Finalement, on a montré que le résultat faible suivant :

Proposition 3.7.2 *Soient $g' > 1$ et $m > 1, m_1 > 1, m_2 > 1$ quelconque, alors il n'existe pas de section à la projection canonique $\text{Diff}(\Sigma_{g_2}) \rightarrow M_{g_2}$, avec*

$$g_2 = m^8 g' - \frac{1}{2} (m + 1) (m^7 + m^5 + m^3 + m) + m^6 + m^4 + m^2 + 1.$$

Une première application est obtenue en prenant par exemple $g' = m_1 = m_2 = m = 2$, alors il n'existe pas de section pour $g_2 = 342$. Sans un résultat supplémentaire, nous ne pouvons pas arriver à la conclusion de S. Morita.

Bibliography

- [1] R. Bott *On a topological obstruction to integrability*, Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., Am. Math. Soc. **16**, 127-131 (1970).
- [2] D. B. A. Epstein *Curves on 2-manifold and isotopies*, Acta Mathematica **115**, 83-107 (1966).
- [3] B. Farb D. Margalit *A primer on mapping class groups*, Web Working Draft.
- [4] J. Franks M. Handel *Global fixed points for centralizers and Morita's Theorem*, Geom. Topol. **13**, (2009).
- [5] A. Hatcher *Algebraic topology*, Cambridge University Press
- [6] F. Hirzebruch *The signature of ramified covering*, Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira, Tokyo university press, 253-265 (1979).
- [7] V. Markovic *Realization of the mapping class group by homeomorphisms*, Invent. Math. **168**, (2007).
- [8] V. Markovic D. Saric *mapping class group cannot be realized by homeomorphisms*, preprint, (2008).
- [9] J. McCleary *A user's guide to spectral sequences*, Cambridge University Press, (2001).
- [10] J. Milnor J. Stasheff *Characteristic classes*, Ann. Math. Stud **76**, Princeton University Press (1974).
- [11] S. Morita *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. **90** 551-577 (1987).
- [12] S. Morita *Geometry of characteristic classes*, Translations of mathematical monographs, American Mathematical Society.
- [13] S. Wang *Gauge theory and involutions*, Thesis, Oxford University (1990).