

# Propriétés algébriques des groupes d'homéomorphismes et de difféomorphismes de surfaces

BOUNEMOURA ABED

Mémoire M2 Mathématiques  
Sous la direction de Monsieur FRÉDÉRIC LE ROUX  
Université Paris Sud Orsay

10 juin 2007



# Introduction

Le but de ce mémoire est, comme son nom l'indique, l'étude des propriétés algébriques des groupes d'homéomorphismes et de difféomorphismes de surfaces, qui préservent éventuellement une forme volume. Précisément, on étudiera la simplicité de ces groupes, ou plus exactement de leur composante connexe à l'identité.

Dans tout le mémoire,  $M$  désignera toujours (sauf mention contraire) une surface compacte orientable. En pratique, ce sera donc la sphère  $S^2$ , le tore  $\mathbb{T}^2$  et les surfaces de genre supérieur  $\Sigma_g$  si  $M$  est fermée ou le disque  $D^2$ , l'anneau  $\mathbb{A}$  et les surfaces hyperboliques à bord si  $M$  est non fermée. Précisons tout de suite que si on enlève l'hypothèse de compacité, les résultats énoncés resteront vrais si l'on se restreint aux transformations à support compact. De même, les résultats restent valables en dimension plus grande.

Le problème de la simplicité de ces groupes est étroitement lié à la recherche d'invariants de conjugaison pour les systèmes dynamiques topologiques ou différentiables : typiquement, les résultats de non-simplicité sont obtenus grâce à l'existence d'un invariant dynamique non trivial et réciproquement, l'existence d'un sous-groupe normal propre permet d'espérer que les éléments de ce sous-groupe sont caractérisés par des propriétés dynamiques intéressantes. Faisons un petit historique des résultats connus en la matière.

En ce qui concerne les groupes de difféomorphismes, tous les problèmes sont résolus, du moins en classe  $C^\infty$ . En 1970, Epstein démontre par des arguments généraux que le sous-groupe des commutateurs  $[Diff_0^\infty(M), Diff_0^\infty(M)]$  est simple, et réduit ainsi le problème. Herman démontra ensuite en 1973 la simplicité de  $Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2)$  par des méthodes d'analyses de type KAM avant que Thurston ne résolve le cas général en 1974, en s'appuyant de manière essentielle sur le théorème d'Herman. Alternativement, Mather prouve la même année la simplicité de  $Diff_0^r(M)$ , pour  $r \neq \dim M + 1$ .

Pour le groupe des difféomorphismes conservatifs, la situation est très différente. Pour peu que le  $H^1(M, \mathbb{R})$  soit non triviale, il existe un invariant dynamique qui donne naissance à un sous-groupe normal propre de  $Diff_0^\infty(M, \omega)$ . Cet invariant, qu'on appelle morphisme de flux ou invariant de Schwartzman (il

porte encore d'autres noms), est du à plusieurs auteurs, dont notamment Schwartzman, Calabi, Weinstein et Thurston. On identifiera ce sous-groupe au groupes des difféomorphismes hamiltoniens  $Ham(M, \omega)$ . Si  $M$  est fermée, avec des méthodes analogues à celles de Herman et Thurston, Banyaga prouve en 1978 la simplicité du groupe  $Ham(M, \omega)$ . En revanche, si  $M$  est non fermée, il existe un autre invariant défini sur le groupe  $Ham(M, \omega)$ , qu'on appelle invariant de Calabi. Toujours d'après Banyaga, le noyau de cet invariant de Calabi est un groupe simple.

Passons maintenant aux groupes d'homéomorphismes. En 1958, Anderson parvient à caractériser le sous-groupe normal minimal de  $Homeo(M)$  comme étant le sous-groupe engendré par les homéomorphismes qui sont l'identité sur un domaine. Il obtient ainsi la simplicité de certains groupes, dont notamment  $Homeo_0(S^2)$  (ce résultat avait déjà été annoncé par Ulam et Von Neumann en 1947). C'est cependant en 1960 que Fisher, un élève de Anderson, démontre la simplicité de  $Homeo_0(M)$  dans le cas général.

Lorsque les homéomorphismes préservent une mesure convenable  $\mu$ , Fathi a réussi à étendre l'invariant de Schwartzman au groupe  $Homeo_0(M, \mu)$  en 1980, mais ses arguments n'ont pas permis d'établir la simplicité du noyau. En particulier, il n'a pas pu démontrer la (non)-simplicité des groupes  $Homeo_0(S^2)$  et  $Homeo(D^2, \partial D^2, \mu)$ . C'est alors que très récemment, Oh et Müller ont défini un groupe d'homéomorphismes hamiltoniens  $Hameo(M, \omega)$ . C'est un sous-groupe normal de  $Homeo_0(M, \mu)$ , inclus dans le noyau de l'invariant de Fathi. Cependant, on ignore encore si cette inclusion est stricte. La simplicité des groupes  $Homeo_0(S^2, \mu)$  et  $Homeo(D^2, \partial D^2, \mu)$  reste donc un problème ouvert.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Groupe d'homéomorphismes de surfaces</b>	<b>5</b>
1.1	Simplicité du groupe $Homeo^0(M)$ . . . . .	5
1.2	Topologie des surfaces . . . . .	9
1.3	Simplicité du groupe $Homeo_0(M)$ . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Groupe de difféomorphismes de surfaces</b>	<b>15</b>
2.1	Le cas du tore . . . . .	15
2.2	Le cas général . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Groupe de difféomorphismes conservatifs</b>	<b>29</b>
3.1	Morphisme de flux et cycles asymptotiques . . . . .	29
3.2	Difféomorphismes hamiltoniens . . . . .	35
3.3	Invariant de Calabi . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Métrie de Hofer</b>	<b>43</b>
4.1	Distances bi-invariantes sur $Ham(M, \omega)$ . . . . .	43
4.2	Energie de déplacement et non dégénérescence. . . . .	45
<b>5</b>	<b>Groupe d'homéomorphismes conservatifs</b>	<b>51</b>
5.1	Invariant de Fathi. . . . .	51
5.2	Homéomorphismes hamiltoniens . . . . .	54
<b>A</b>	<b>Théorème d'inversion locale de Nash-Moser</b>	<b>61</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>65</b>



# Chapitre 1

## Groupe d'homéomorphismes de surfaces

Soit  $M$  une surface compacte orientable. On note  $Homeo(M)$  le groupe des homéomorphismes de  $M$ , et dans le cas à bord,  $Homeo(M, \partial M)$  le groupe des homéomorphismes qui sont l'identité sur un voisinage du bord. On note  $Homeo_0(M)$  le sous-groupe constitué des homéomorphismes isotopes à l'identité. C'est clairement un sous-groupe normal de  $Homeo(M)$ , qui coïncide avec la composante connexe à l'identité de  $Homeo(M)$ . On définit de même  $Homeo_0(M, \partial M)$

Le but de cette partie est de prouver la simplicité des groupes  $Homeo_0(M)$  et  $Homeo_0(M, \partial M)$ .

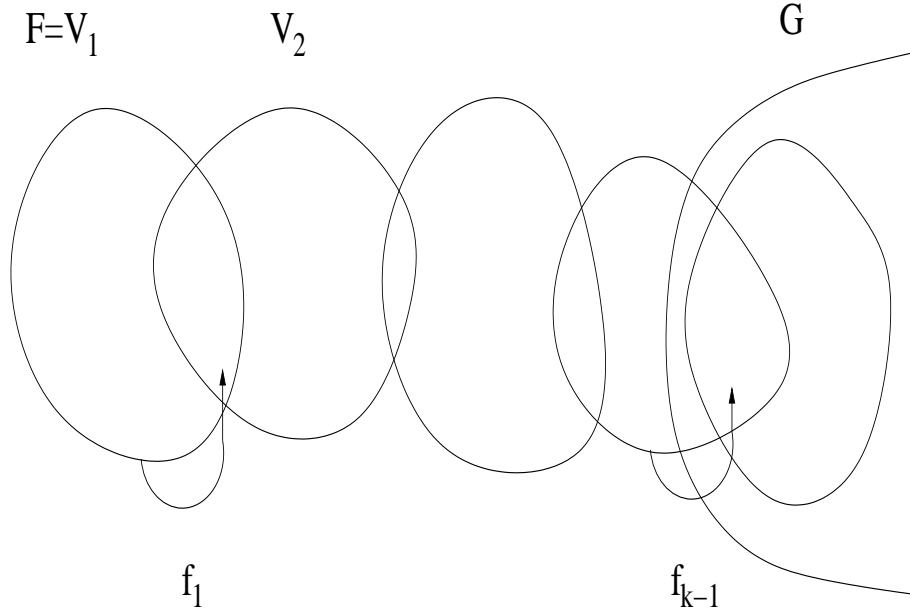
On dit qu'un homéomorphisme  $g$  est stable si il est l'identité à l'extérieur d'un disque  $D$ . On note alors  $supp(g) = \overline{\{x \in M | gx \neq x\}} \subseteq D$ , et on désignera par  $Homeo^0(M)$  le sous-groupe (normal) engendré par les homéomorphismes stables. Dans le cas à bord, on impose la condition  $supp(g) \subseteq D \subseteq \text{Int}(M)$  (en particulier un tel homéomorphisme est l'identité sur un voisinage du bord), on a alors  $Homeo^0(M, \partial M) \subseteq Homeo(M, \partial M)$ .

### 1.1 Simplicité du groupe $Homeo^0(M)$

Dans cette section, on démontre la simplicité des groupes  $Homeo^0(M)$  et  $Homeo^0(M, \partial M)$ , selon une idée d'Anderson ([An]).

Prenons  $M$  une surface compacte à bord, et fixons quelques notations. On note  $D$  un disque ouvert dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\overline{D}$  un disque fermé et  $\mathbb{H}^2$  le demi-espace fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

On se donne un atlas  $\mathcal{U} = (U_i, \varphi_i)$  avec  $\varphi_i : D \cap \mathbb{H}^2 \rightarrow U_i$  des homéomorphismes.


 FIG. 1.1 – Transitivité de  $Homeo^0(M)$ .

On peut supposer que ces  $\varphi_i$  s'étendent en des homéomorphismes entre  $\overline{D} \cap \mathbb{H}^2$  et  $\overline{U}_i$ . On dira que  $U_i$  est une cellule,  $F_i = \overline{U}_i$  une cellule fermée et qu'une cellule est interne si elle n'intersecte pas le bord de  $M$ .

Le lemme suivant énonce une propriété de transitivité de  $M$  sous l'action de  $Homeo^0(M)$ .

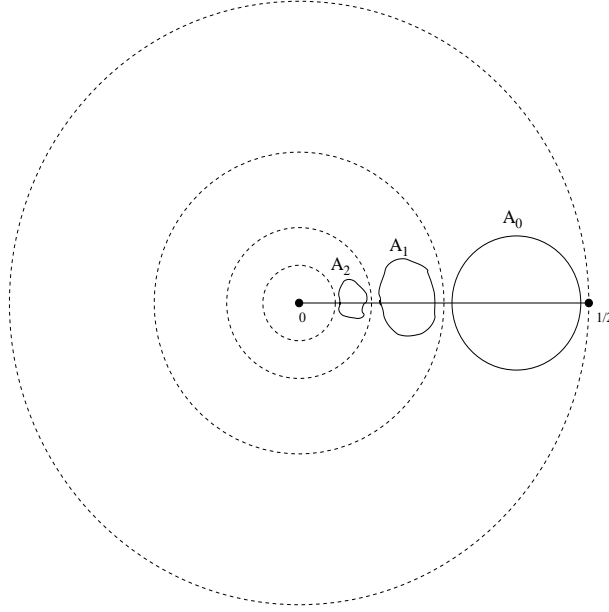
**Lemme.** Soit  $F$  une cellule fermée interne,  $G$  une cellule fermée, alors il existe  $f \in Homeo^0(M)$  tel que  $f(F) \subseteq G$ .

**Preuve.** Par connexité on trouve une suite de cellules  $V_1, \dots, V_k$  tel que  $V_1 = \text{int}(F)$ ,  $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$  et  $V_k \subseteq \text{int}(G)$ .

On écrit  $\overline{V}_i = \varphi_i(C_i) \subseteq \varphi_i(\overline{B})$ , où  $C_i = \overline{B}(a_i, r_i)$  est suffisamment petit et  $\overline{B} = \overline{B}(0, 1)$ . Posons  $A_i = \text{int}(\overline{V}_i \cap \overline{V}_{i+1})$ , puisque  $A_i$  est non vide, on choisit  $D_i = \overline{B}(b_i, s_i)$  suffisamment petit tel que  $\varphi_i(D_i) \subseteq A_i$ . Finalement on choisit  $E = \overline{B}(0, t)$   $t < 1$  tel que  $C_i \cup D_i \subseteq E \subseteq B$ .

Soit  $h_i$  un homéomorphisme de  $B$  à support dans  $E$ , qui envoie  $C_i$  sur  $D_i$ . On peut alors définir  $f_i$  par  $\varphi_i h_i \varphi_i^{-1}$  sur  $\varphi_i(E)$  et l'identité ailleurs. Il est clair que  $f_i \in Homeo^0(M)$  et envoie  $\overline{V}_i$  dans  $A_i$ , alors  $f = f_{k-1} \dots f_1$  est l'homéomorphisme voulu (voir la figure 1.1).  $\square$




 FIG. 1.2 – Suite des cellules  $A_i$ .

Le résultat principal est le suivant.

**Théorème (Anderson).** Soit  $h \in \text{Homeo}(M)$  différent de l'identité. Pour tout  $f \in \text{Homeo}^0(M)$ ,  $f$  est un produit de conjugués de  $h$  et  $h^{-1}$  par des éléments de  $\text{Homeo}^0(M)$ .

**Preuve.** Puisque  $h \neq id$ , on trouve  $x \in \text{Int}(M)$  tel que  $h^{-1}x \neq x$ , puis par continuité on trouve une cellule  $U$  tel que  $h^{-1}(U) \cap U = \emptyset$ . Supposons que  $U = \varphi(B(0, 2))$ .

Plaçons nous dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $A_0 = \overline{B}((3/8, 0), 1/9)$ .  $A_0$  est alors strictement inclus dans l'anneau de rayons  $1/4$  et  $1/2$  (car  $3/8 \pm 1/9 \in ]1/4, 1/2[$ ).

Définissons  $r_1 : B(0, 2) \rightarrow B(0, 2)$  par  $x \mapsto \lambda_x x$ , où  $r_1$  est l'identité à l'extérieur de  $B(0, 1)$  et contracte de  $\lambda_x = d(0, x)$  à l'intérieur de  $B(0, 1)$ . Clairement  $r_1$  est un homéomorphisme. Par récurrence on définit  $A_{i+1} = r_1(A_i)$ , on obtient ainsi une suite de cellules fermées 2 à 2 disjointes qui convergent vers 0 (les  $A_i$  restent strictement inclus dans l'anneau de rayons  $1/4^{i+1}$  et  $1/2^{i+1}$ , voir la figure 1.2).

Revenons dans  $M$ . Soit  $E = \varphi(\overline{B}(0, 1)) \subseteq U$ , alors  $E$  et  $h^{-1}(E)$  sont disjoints. Soit  $B_i = \varphi(A_i)$  et  $r \in \text{Homeo}^0(M)$  définie par  $\varphi r_1 \varphi^{-1}$  sur  $E$  et l'identité ailleurs. Ainsi  $r(B_i) = B_{i+1}$ .

Prenons  $f$  un homéomorphisme à support dans  $B_0$ , et essayons de l'écrire

comme un produit de conjugués en  $h$  et  $h^{-1}$ . Les  $r^i f r^{-i}$  sont à supports dans  $B_i = r^i(B_0)$ , définissons alors  $\phi$  par  $\phi|_{B_i} = r^i f r^{-i}$  et  $\phi$  est l'identité ailleurs (ie  $\phi = \prod_{i \geq 0} r^i f r^{-i}$ ). On remarque que  $\phi \in \text{Homeo}^0(M)$  ( $\phi$  est bien définie car les  $B_i$  sont 2 à 2 disjoints et convergent vers un point), son support est dans  $\bigcup_{i \geq 0} B_i$ . Maintenant  $h^{-1} \phi^{-1} h$  est à support dans  $h^{-1}(\bigcup_{i \geq 0} B_i)$ . Donc  $h^{-1} \phi^{-1} h$  et  $\phi$  sont à supports disjoints (rappelons que  $\bigcup_{i \geq 0} B_i \subseteq E$ ), l'action de  $(h^{-1} \phi^{-1} h) \phi$  se décompose alors en celle  $\phi$  sur  $\bigcup_{i \geq 0} B_i$  et celle de  $h^{-1} \phi^{-1} h$  sur  $h^{-1}(\bigcup_{i \geq 0} B_i)$ . L'action de  $r h^{-1} \phi h \phi^{-1} r^{-1} = (r h^{-1} \phi h r^{-1})(r \phi^{-1} r^{-1})$  se décompose de manière analogue.

Posons  $g = (r h^{-1} \phi h \phi^{-1} r^{-1})(h^{-1} \phi^{-1} h \phi)$ . Il agit alors par  $(r \phi^{-1} r^{-1}) \phi$  sur  $\bigcup_{i \geq 0} B_i$  puis par  $(r h^{-1} \phi h r^{-1})(h^{-1} \phi^{-1} h)$  sur  $h^{-1}(\bigcup_{i \geq 0} B_i)$ . Or il n'est pas dur de vérifier que la première action est exactement celle de  $f$ , tandis que la seconde est triviale. Donc  $f = g$ . Enfin une réécriture de

$$g = (r h^{-1} r^{-1})(r \phi h \phi^{-1} r^{-1})(h^{-1})(\phi^{-1} h \phi)$$

permet de conclure que  $f$  est un produit de 4 conjugués de  $h$  et  $h^{-1}$  par des éléments de  $\text{Homeo}^0(M)$ .

Maintenant si  $f \in \text{Homeo}^0(M)$  est arbitraire, on utilise le lemme pour trouver  $u \in \text{Homeo}^0(M)$  qui envoie  $\text{supp}(f)$  dans  $B_0$  et on applique ce qui précède à  $u f u^{-1}$ .  $\square$

**Corollaire.** Les groupes  $\text{Homeo}^0(M)$  et  $\text{Homeo}^0(M, \partial M)$  sont simples.

**Preuve.** On se donne  $N \trianglelefteq \text{Homeo}^0(M)$  non trivial, on prend  $h \in N$  différent de l'identité, et on écrit un élément arbitraire  $f \in \text{Homeo}^0(M)$  comme un produit de conjugués de  $h$  et  $h^{-1}$  par des éléments de  $\text{Homeo}^0(M)$  pour obtenir  $N = \text{Homeo}^0(M)$ . On applique le même raisonnement pour  $\text{Homeo}^0(M, \partial M)$ .  $\square$

La preuve précédente montre en réalité que  $\text{Homeo}^0(M)$  (resp.  $\text{Homeo}^0(M, \partial M)$ ) est un sous-groupe normal minimal de  $\text{Homeo}(M)$  (resp.  $\text{Homeo}(M, \partial M)$ ).

On a alors le corollaire suivant.

**Corollaire.** On a les inclusions  $\text{Homeo}^0(M) \subseteq \text{Homeo}_0(M)$  et  $\text{Homeo}^0(M, \partial M) \subseteq \text{Homeo}_0(M, \partial M)$ .

Pour conclure, remarquons que tous ces résultats s'étendent aussitôt en dimension plus grande.

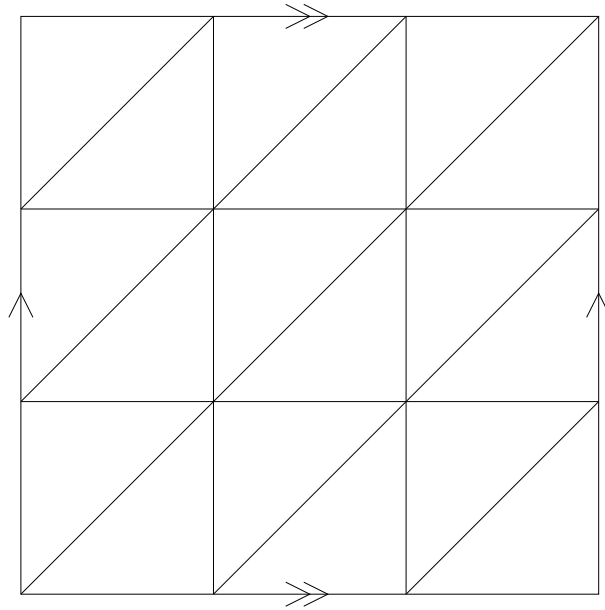


FIG. 1.3 – Triangulation du tore  $\mathbb{T}^2$ .

## 1.2 Topologie des surfaces

Avant de s'attaquer à la simplicité du groupe  $\text{Homeo}_0(M)$ , on va énoncer des théorèmes fondamentaux sur la topologie des surfaces (on pourra consulter [Mo] pour trouver des preuves).

On rappelle qu'un complexe simplicial  $K$  est une collection localement finie de simplexes telle que si  $\sigma$  est dans  $K$ , alors toute face de  $\sigma$  est aussi dans  $K$ , et si deux simplexes de  $K$  s'intersectent, ils le font sur une unique face commune. On note  $|K|$  le polyèdre associé (ie la réunion des simplexes de  $K$ ) et on appelle triangulation d'une variété  $M$  un complexe  $K$  et un homéomorphisme  $t : |K| \rightarrow M$ . Le théorème suivant est classique.

**Théorème (Rado).** Toute surface topologique, éventuellement à bord, admet une triangulation.

Ce résultat est l'étape clé dans la classification des surfaces. Cependant, pour une surface explicite, il est toujours facile d'en trouver une triangulation (voir la figure 1.3 pour le cas du tore).

Passons maintenant à de la topologie plane. On appelle cercle (resp. disque) topologique l'image de  $S^1$  (resp.  $D^2$ ) par un homéomorphisme. On admettra les deux résultats importants suivants.

**Théorème (Jordan).** Soit  $S$  un cercle topologique dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors  $S$  sépare  $\mathbb{R}^2$  en 2 composantes connexes.

**Théorème (Schoenflies).** Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux cercles topologiques dans  $\mathbb{R}^2$ , alors tout homéomorphisme entre  $S_1$  et  $S_2$  préservant l'orientation s'étend en un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

On aura aussi besoin d'une version « continu » du théorème de Schoenflies (voir [Le] par exemple).

**Théorème (Schoenflies « continu »).** Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux cercles centrés en 0 dans  $\mathbb{R}^2$  bordant des disques  $D_1$  et  $D_2$ ,  $D_1 \subseteq D_2$ . Alors  $\forall r > 0, \exists s > 0$  tel que tout plongement  $f : D_1 \hookrightarrow D_2$  avec  $d(f, id_{D_1}) < s$  s'étend en un homéomorphisme  $\bar{f} : D_2 \rightarrow D_2$  avec  $\bar{f}|_{S_2} = id$  et  $d(\bar{f}, id_{D_2}) < r$ .

Le théorème de Schoenflies sera utilisé de manière essentielle dans la partie suivante.

### 1.3 Simplicité du groupe $Homeo_0(M)$

On est maintenant en mesure de prouver la simplicité de  $Homeo_0(M)$ . On munit  $Homeo(M)$  de la topologie  $C^0$ , ie de la distance définie par

$$d_{C^0}(f, g) = \sup_{x \in M} d(f(x), g(x)) + \sup_{x \in M} d(f^{-1}(x), g^{-1}(x))$$

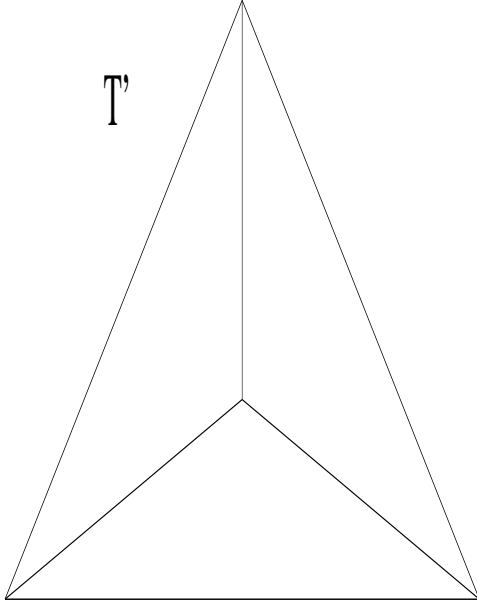
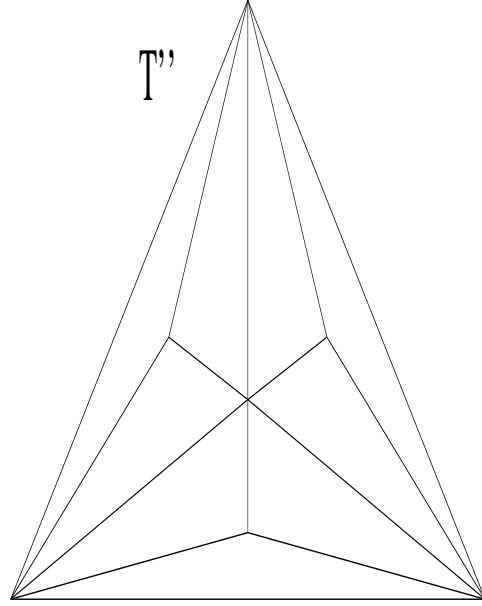
où  $d$  est une distance quelconque sur  $M$ .

Le résultat suivant, dû à Fisher ([Fi]), contient l'essentiel de la preuve.

**Théorème (Fisher).** Soit  $M$  une surface compacte. Alors  $Homeo^0(M)$  (resp.  $Homeo^0(M, \partial M)$ ) est un sous-groupe ouvert de  $Homeo(M)$  (resp. de  $Homeo(M, \partial M)$ ).

**Preuve.** Puisque  $Homeo(M)$  est un groupe topologique, il suffit de montrer que  $Homeo^0(M)$  contient un voisinage de l'identité. Commençons par le cas où  $\partial M = \emptyset$ .  $M$  étant triangulable, on peut supposer  $M = |T|$  où  $T$  est un 2-complexe simplicial fini.

Précisons les notations. On note  $T'$  et  $T''$  les subdivisions successives de  $T$ , obtenues en mettant une arête entre le barycentre de chaque triangle et ses trois sommets (voir les figures 1.4 et 1.5). Notons  $v_1, \dots, v_m$  les sommets de  $T$ , et  $D'_i, D''_i$  les étoiles fermées de  $v_i$  dans  $T'$  et  $T''$  respectivement (on peut


 FIG. 1.4 – Subdivision  $T'$ 

 FIG. 1.5 – Subdivision  $T''$ 

voir  $D_i'' \subseteq D_i'$  comme des voisinages fermés de  $v_i$ ). Posons  $V = \bigcup D_i''$ . Si  $T_1'$  désigne le 1-squelette de  $T'$ ,  $r$  sera la distance minimale entre 2 composantes de  $|T_1'| - V$ .

*Assertion 1.* On peut trouver  $s > 0$  tel que si  $h \in \text{Homeo}(M)$  et  $d_{C^0}(h, id) < s$ , alors  $\exists g \in \text{Homeo}^0(M)$  tel que  $g^{-1}h|_V = id$  et  $d_{C^0}(g^{-1}h, id) < r/2$ .

Choisissons des disques  $D_1$  et  $D_2$  dans  $\mathbb{R}^2$  centrés à l'origine et des homéomorphismes  $\varphi_i$  de  $D_2$  sur  $D_i'$  envoyant  $D_1$  dans  $D_i''$ .

(1) La continuité uniforme des  $\varphi_i$  donne  $r' > 0$  tel que

$$d(x, y) < r' \Rightarrow d(\varphi_i(x), \varphi_i(y)) < r/4$$

(2) La version « continue » du théorème de Schoenflies donne  $s' > 0$  tel que si  $f : D_1 \hookrightarrow D_2$  est un plongement avec  $d_{C^0}(f, id) < s'$ , alors  $f$  admet une extension  $\bar{f} : D_2 \rightarrow D_2$  avec  $\bar{f}|_{\partial D_2} = id$  et  $d_{C^0}(\bar{f}, id) < r'$ .

(3) La continuité uniforme des  $\varphi_i^{-1}$  donne  $s > 0$ ,  $s < r/4$  tel que

$$d(x', y') < s \Rightarrow d(\varphi_i^{-1}(x'), \varphi_i^{-1}(y')) < s'$$

Prenons donc  $h \in \text{Homeo}(M)$  vérifiant  $d_{C^0}(h, id) < s$ .

On a  $\forall x \in D_1$   $d(h\varphi_i(x), \varphi_i(x)) < s$ , donc  $d(\varphi_i^{-1}h\varphi_i|_{D_1}, id_{D_2}) < s'$  par (3), on applique alors (2) à  $\varphi_i^{-1}h\varphi_i|_{D_1}$  pour obtenir une extension à  $D_2$  qu'on note  $h_i$ . Ainsi  $h_i|_{\partial D_2} = id$  et  $d_{C^0}(h_i, id_{D_2}) < r'$ .

Donc  $\forall x' \in \varphi_i(D_2) = D'_i$ ,  $d(h_i\varphi_i^{-1}(x'), \varphi_i^{-1}(x')) < r'$  et (1) nous donne  $d(\varphi_i h_i \varphi_i^{-1}(x'), x') < r/4$ . Définissons  $g_i$  par  $\varphi_i h_i \varphi_i^{-1}$  sur  $D'_i$  et l'identité ailleurs (ce qui est cohérent car les  $\varphi_i h_i \varphi_i^{-1}$  valent l'identité sur  $\partial D'_i$ ). On a ainsi  $d_{C^0}(g_i, id) < r/4$ ,  $g_i|_{D''_i} = h_i|_{D''_i}$  et  $g_i \in Homeo^0(M)$ . Enfin posons  $g = g_1 \dots g_m \in Homeo^0(M)$  et montrons que ce  $g$  convient.

On a  $d_{C^0}(g, id) < r/4$  (l'inégalité est vrai pour les  $g_i$ , et les supports des  $g_i$  ne s'intersectent qu'aux sommets où ils valent l'identité). L'inégalité triangulaire donne aussitôt

$$d_{C^0}(g^{-1}h, id) \leq d_{C^0}(g^{-1}, id) + d_{C^0}(h, id) = d_{C^0}(g, id) + d_{C^0}(h, id) < r/4 + s < r/2$$

Enfin  $g|_{D''_i} = g_i|_{D''_i} = h_i|_{D''_i}$  et donc  $g^{-1}h$  est l'identité sur  $V = \bigcup D''_i$ . Ceci termine la preuve de la première assertion.

*Assertion 2.* Si  $f \in Homeo(M)$  vérifie  $f|_V = id$  et  $d(f, id) < r/2$ , alors  $f \in Homeo^0(M)$ .

En faisant  $f = g^{-1}h$  avec le  $g$  construit précédemment, on aura alors que  $g^{-1}h \in Homeo^0(M)$  et donc que  $h = gg^{-1}h \in Homeo^0(M)$ , ce qui prouvera que  $Homeo^0(M)$  contient un voisinage de l'identité, précisément la boule de centre  $s$ , avec le  $s$  construit précédemment. Il suffit donc de prouver cette seconde assertion pour démontrer le lemme.

Pour chaque arête  $t$  de  $T$ , notons  $U(t)$  l'union des deux triangles de  $T'$  ayant  $t$  comme arête commune (on peut voir les  $U(t)$  comme des voisinages des arêtes de  $T$ , voir la figure 1.6). Pour chaque triangle  $S$  de  $T'$  ayant une arête  $t_S$  dans  $T$ , définissons  $u_S$  sur  $\partial S$  par valant  $f$  sur  $t_S$  et l'identité sur les 2 autres arêtes. Alors  $u_S$  envoie  $\partial S$  dans  $U(t_S)$  (car  $d_{C^0}(f, id) < r/2$ ) et  $u_S$  est continue (car  $f|_V = id$ ). Donc  $u_S$  est un homéomorphisme sur son image, par le théorème de Schoenflies il s'étend en un homéomorphisme de  $S$  sur son image. Ces homéomorphismes se recollent de manière évidente en un homéomorphisme  $u$  tel que  $u|_{\partial U(t)} = id$ , car les  $U(t)$  forment un recouvrement fini de  $T$ . Cela permet de définir  $u(t)$  par valant  $u$  sur  $U(t)$  et l'identité ailleurs. Les  $u(t) \in Homeo^0(M)$ , donc  $u \in Homeo^0(M)$ .

Posons  $v = u^{-1}f$ . Alors  $v|_{\partial S} = id$  pour tout triangle  $S$  de  $T$ , le raisonnement précédent montre alors que  $v \in Homeo^0(M)$ . Ainsi  $f = uv \in Homeo^0(M)$ , ce qui prouve l'assertion donc le théorème dans le cas  $\partial M = \emptyset$ .

Enfin si  $\partial M \neq \emptyset$ , on applique le raisonnement précédent aux sommets et arêtes qui sont dans l'intérieur de  $M$  pour obtenir que  $Homeo^0(M, \partial M)$  est ouvert dans  $Homeo(M, \partial M)$ .  $\square$

**Corollaire.** Soit  $M$  une surface compacte. Alors le groupe  $Homeo_0(M)$  (resp.  $Homeo_0(M, \partial M)$ ) est simple.

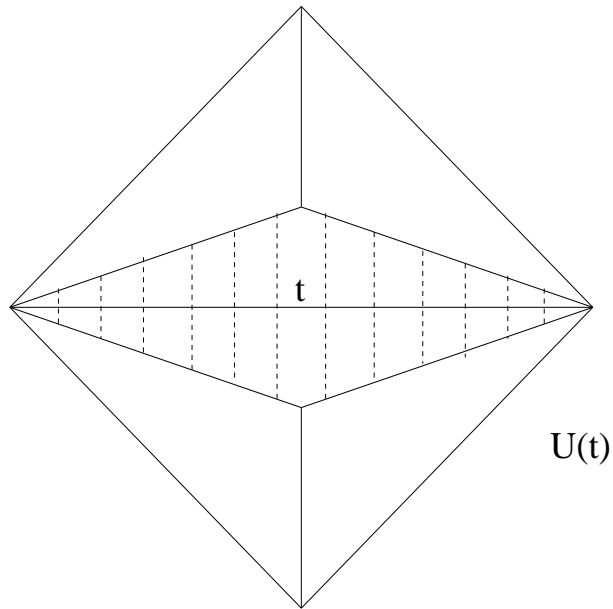


FIG. 1.6 – Ensemble  $U(t)$

**Preuve.**  $Homeo_0(M)$  étant normal dans  $Homeo(M)$ , on a par minimalité  $Homeo^0(M) \subseteq Homeo_0(M)$ . Maintenant  $Homeo^0(M)$  est ouvert, donc fermé et la connexité de  $Homeo_0(M)$  nous donne  $Homeo^0(M) = Homeo_0(M)$ . Le cas de  $Homeo_0(M, \partial M)$  est similaire.  $\square$

Ainsi, dans le cas de la sphère ou du tore, les groupes  $Homeo_0(S^2)$  et  $Homeo_0(T^2)$  sont simples.

Dans le cas du disque, l'astuce d'Alexander nous donne  $Homeo_0(D^2, \partial D^2) = Homeo(D^2, \partial D^2)$  donc  $Homeo(D^2, \partial D^2)$  est simple.

Signalons que ces résultats sont encore vrais en dimension plus grande, mais les techniques sont différentes, voir [EK].





# Chapitre 2

## Groupe de difféomorphismes de surfaces

On s'intéresse désormais aux groupes de difféomorphismes  $Diff_0^\infty(M)$  et  $Diff_0^\infty(M, \partial M)$  pour une variété compacte  $M$ . Dans la suite, on se limitera au cas où  $M$  est fermée (le cas à bord s'obtient par de légères modifications). Comme précédemment, on va prouver que ce groupe est simple, mais les arguments seront plus délicats.

Notons enfin que tous les résultats présentés dans ce chapitre n'ont rien de spécifique à la dimension 2, et qu'ils s'étendent verbatim à toutes les dimensions.

### 2.1 Le cas du tore

Dans cette partie, on souhaite démontrer le théorème suivant (voir [He]) :

**Théorème (Herman).** Le groupe  $Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2)$  est parfait.

On peut même en déduire que ce groupe est simple par un argument général d'Epstein ([Ep]), mais on n'aura pas besoin de ce résultat dans la suite. Commençons par des préliminaires.

Pour  $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ , notons  $|k| = |k_1| + |k_2|$  et si  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{T}^2$ , on note  $\langle k, \gamma \rangle = k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2$ . On dit que le vecteur  $\gamma$  est diophantien si il existe  $c > 0, \alpha \geq 2$  tel que  $\|\langle k, \gamma \rangle\| \geq c|k|^{-\alpha}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . On peut montrer que de tels vecteurs existent, ils forment même un ensemble de mesure totale pour la mesure de Lebesgue sur le tore.

Pour  $\gamma \in \mathbb{T}^2$ , on note  $R_\gamma$  la translation de vecteur  $\gamma$ . Les translations forment un sous-groupe de  $Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2)$ , qui s'identifie à  $\mathbb{T}^2$ . Dans la suite,  $Diff_0(\mathbb{T}^2)$

sera muni de la topologie  $C^\infty$ .

La preuve du théorème repose entièrement sur le résultat KAM suivant, qui affirme que si un difféomorphisme du tore est suffisamment proche d'une translation diophantienne  $R_\gamma$ , alors quitte à le rectifier par une petite translation, il est  $C^\infty$ -conjugué à  $R_\gamma$ .

**Lemme.** Soit  $R_\gamma \in \mathbb{T}^2$  avec  $\gamma$  diophantien et soit l'application

$$\Phi_\gamma : Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2) \times \mathbb{T}^2 \longrightarrow Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2) : (\psi, \lambda) \longmapsto R_\lambda \circ \psi^{-1} \circ R_\gamma \circ \psi$$

Alors il existe un voisinage  $V$  de  $R_\gamma$  dans  $Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2)$  et une application lisse  $s : V \longrightarrow Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2) \times \mathbb{T}^2$  telle que  $\Phi_\gamma \circ s = 1_V$ .

**Preuve.** La preuve du lemme nécessite le langage des bons espaces de Fréchet afin d'appliquer le théorème d'inversion locale de Nash-Moser. On renvoie à l'annexe A pour ces notions.

Remarquons que  $\Phi_\gamma(1_{\mathbb{T}^2}, 0) = R_\gamma$ . Pour pouvoir appliquer le théorème de Nash-Moser, on doit donc prouver que la différentielle  $d\Phi_\gamma$  est inversible en tout point d'un voisinage de  $(1_{\mathbb{T}^2}, 0) \in Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2) \times \mathbb{T}^2$ , et que son inverse est une bonne application linéaire continue.

Selon Herman, on procède en 4 étapes.

*a. On exprime  $\Phi_\gamma$  dans une carte exponentielle.*

Fixons une métrique riemannienne (nécessairement complète) sur  $\mathbb{T}^2$  et considérons l'application exponentielle associée  $Exp : T\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ . Il est bien connu que l'exponentielle se restreint en un difféomorphisme d'un voisinage  $V$  de la section nulle de  $T\mathbb{T}^2$  sur un voisinage  $W$  de la diagonale de  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ . Pour un difféomorphisme  $f$ , posons

$$W_f = \{g \in Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2) \mid \forall x (f(x), g(x)) \in W\}$$

$$V_f = \{\xi \in \Gamma_f^\infty(\mathbb{T}^2) \mid \forall x \xi(x) \in V\}$$

où  $\Gamma_f^\infty(\mathbb{T}^2)$  est l'espace vectoriel des champs de vecteurs au-dessus de  $f$ , ie l'espace des sections du fibré induit  $f^*(T\mathbb{T}^2)$  (c'est l'espace qui joue le rôle d'espace tangent au dessus de  $f$ ).

On peut alors définir un difféomorphisme  $\psi_f : V_f \rightarrow W_f$  en composant par l'exponentielle : on obtient ainsi une collection de cartes  $(W_f, \psi_f^{-1})$  qui permette de munir  $Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2)$  d'une structure lisse modelée sur  $\Gamma^\infty(\mathbb{T}^2)$ .

Sur  $\mathbb{R}^2$  munie de sa métrique canonique, on a  $Exp(x, v) = (x, x + v)$ , donc quitte à relever les difféomorphismes du tore en des difféomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  (et ce de manière canonique en relevant une isotopie à l'identité), on peut écrire

$$\psi_f(\xi)(x) = f(x) + \xi(x)$$

$$\psi_f^{-1}(g)(x) = g(x) - f(x)$$

L'application  $\Phi_\gamma$  lue dans ces cartes s'écrit :

$$\Gamma^\infty(\mathbb{T}^2) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Gamma_{R_\gamma}^\infty(\mathbb{T}^2) : (\xi, \lambda) \longmapsto (1 + \xi)^{-1} \circ R_\gamma \circ (1 + \xi) + \lambda - \gamma$$

En effet, notons 1 l'identité de  $\mathbb{R}^2$ . On commence par appliquer  $\psi_1$  et on obtient  $\psi_1(\xi, \lambda) = (1 + \xi, \lambda)$ , puis on applique  $\Phi_\gamma$  et on a  $\Phi_\gamma \psi_1(\xi, \lambda) = (1 + \xi)^{-1} \circ R_\gamma \circ (1 + \xi) + \lambda$  et enfin  $\psi_{R_\gamma}^{-1} \Phi_\gamma \psi_1(\xi, \lambda)$  nous donne l'expression voulue. Bien entendu, cette expression n'est valable que pour  $\xi$  suffisamment petit.

Dans la suite, c'est cette expression de  $\Phi_\gamma$  que l'on considère. On vérifie que c'est une bonne application de classe  $C^\infty$  entre bons espaces de Fréchet.

*b. On calcule la différentielle de  $\Phi_\gamma$ .*

Posons  $(1 + \mu) = (1 + \xi)^{-1}$ . Soit  $(\hat{\xi}, \hat{\lambda}) \in \Gamma^\infty(\mathbb{T}^2) \times \mathbb{R}^2$ . En appliquant soigneusement la règle de chaîne il vient

$$\begin{aligned} d\Phi_\gamma(\xi, \lambda).(\hat{\xi}, \hat{\lambda})(x) &= d(1 + \mu)(R_\gamma(1 + \xi)(x)).\hat{\xi}(x) \\ &\quad - d(1 + \mu)(R_\gamma(1 + \xi)(x)).\hat{\xi}((1 + \mu) \circ R_\gamma \circ (1 + \xi)(x)) \\ &\quad + \hat{\lambda} \end{aligned}$$

En particulier,  $d\Phi_\gamma(0, 0).(\hat{\xi}, \hat{\lambda}) = \hat{\xi} - \hat{\xi} \circ R_\gamma + \hat{\lambda}$ .

*c. On réduit l'inversion de  $d\Phi_\gamma$  à la résolution d'une équation cohomologique.* Rappelons que l'on cherche à inverser  $d\Phi_\gamma$  au voisinage de  $(0, 0)$ , ie on veut résoudre l'équation

$$d\Phi_\gamma(\xi, \lambda).(\hat{\xi}, \hat{\lambda}) = \eta \tag{2.1}$$

où  $\xi, \lambda, \eta$  sont donnés et  $\hat{\xi}, \hat{\lambda}$  sont inconnus. On va alors transformer cette équation de telle sorte qu'elle soit « proche » de l'équation obtenue au point  $(\xi, \lambda) = (0, 0)$ . On introduit alors les variables  $\tilde{\xi} = \hat{\xi} \circ (1 + \mu)$ ,  $\tilde{\eta} = d(1 + \mu)((1 + \mu) \circ R_\gamma).(\eta \circ (1 + \mu))$  et  $\chi(\xi) = d(1 + \mu)((1 + \mu) \circ R_\gamma)$ . Il n'est alors pas difficile de vérifier que l'équation (1) devient

$$\tilde{\xi} - \tilde{\xi} \circ R_\gamma = \tilde{\eta} - \chi(\xi).\hat{\lambda} \tag{2.2}$$

où les inconnues sont  $\tilde{\xi}, \hat{\lambda}$ .

*d. On résoud l'équation cohomologique.*

Prenons  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$ , on veut donc résoudre

$$\tilde{\xi}(x) - \tilde{\xi}(x + \gamma) = \tilde{\eta}(x) - \chi(\xi)(x).\hat{\lambda}$$

Si  $\xi$  est suffisamment petit, alors la matrice  $M = \int_{\mathbb{T}^2} \chi(\xi)(x) dx$  est proche de l'identité donc inversible. Le terme de gauche a clairement une moyenne

nulle, ceci détermine donc  $\hat{\lambda} = M^{-1} \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{\eta}(x) dx$ .

On veut maintenant déterminer  $\tilde{\xi}$ . Notons  $a_k$  ses coefficients de Fourier vis-à-vis de la mesure de Lebesgue du tore, et  $b_k$  ceux de  $\tilde{\eta} - \chi(\xi) \cdot \hat{\lambda}$ . Le choix de  $\hat{\lambda}$  nous donne  $b_0 = a_0 = 0$ . Pour  $k \neq 0$ , on a

$$a_k = \frac{b_k}{1 - e^{2i\pi \langle k, \gamma \rangle}}$$

C'est ici qu'intervient la condition diophantienne. Elle nous donne une estimation  $|a_k| \leq C|b_k||k|^\alpha$ . Puisque la fonction  $\tilde{\eta} - \chi(\xi) \cdot \hat{\lambda}$  est  $C^\infty$ , ses coefficients  $b_k$  sont à décroissance rapide à l'infini, il en est alors de même pour les coefficients  $a_k$ . Il en résulte alors que la fonction  $\tilde{\xi}$  est bien déterminé et  $C^\infty$ , et que l'application  $\Sigma b_k e^{2i\pi \langle k, x \rangle} \rightarrow \Sigma a_k e^{2i\pi \langle k, x \rangle}$  est une bonne application linéaire continue (avec une perte de différentiabilité  $r = \alpha + 2$ ).

On a donc réussi à construire une bonne application  $(\xi, \lambda, \eta) \mapsto (\hat{\xi}, \hat{\lambda})$  qui est bien une section de  $d\Phi_\gamma(\xi, \lambda)$  au voisinage de  $(0, 0)$ . On termine alors la preuve du lemme en utilisant le théorème de Nash-Moser.  $\square$

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème. Notons  $N(\mathbb{T}^2)$  le sous-groupe normal engendré par  $\mathbb{T}^2 \subseteq \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2)$ . C'est un sous-groupe topologique de  $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2)$ . D'après le lemme, il est ouvert au voisinage d'une translation diophantienne, donc il est ouvert. En particulier, il est fermé et par connexité de  $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2)$ , on a l'égalité  $N(\mathbb{T}^2) = \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2)$ .

Sur  $\mathbb{T}$ , on a les inclusions  $\mathbb{T} \subseteq H \subseteq \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T})$  où  $\mathbb{T}$  agit sur le cercle par rotations et  $H \cong PSL(2, \mathbb{R})$  agit sur le cercle par homographies, après identification du cercle avec la droite projective réelle.

Ainsi on a  $\mathbb{T}^2 \subseteq H^2 \subseteq \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2)$ . Cependant le groupe  $H$  est parfait (même simple) d'où

$$\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2) = N(\mathbb{T}^2) \subseteq N(H^2) = N([H^2, H^2]) \subseteq [\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2), \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2)]$$

Le groupe  $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2)$  est donc parfait.  $\square$

**Remarque.** Pour la suite, notons qu'un raisonnement analogue donne la simplicité du groupe  $\widetilde{\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2)}$ , revêtement universel de  $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2)$ .

Précisons qu'un élément de  $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2)$  est une classe d'homotopie à extrémités fixes  $[\Phi]$  où  $\Phi : t \mapsto \varphi^t$  est un chemin de difféomorphismes du tore qui part de l'identité.

Comme dans la preuve précédente, le point clé est de prouver que  $N(\widetilde{\mathbb{T}^2})$  est un sous-groupe ouvert dans  $\widetilde{\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2)}$  (le reste de la preuve est identique). Prenons  $\gamma \in \mathbb{T}^2$  un vecteur diophantien, et soit

$$s : \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2) \longrightarrow V \subseteq \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2) \times \mathbb{T}^2$$

l'inverse local de l'application  $\Phi_\gamma$  définie dans le lemme.

Notons alors  $s_1$  et  $s_2$  les projections de  $s$ . Pour  $\Psi \in \widetilde{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2)$  suffisamment proche de l'identité, ie  $\Psi(t) \in Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2)$  proche de l'identité pour tout  $t$ , on applique le lemme pour obtenir

$$\Psi_1 = s_1(R_\gamma \Psi) \in \widetilde{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^2) \quad \text{et} \quad \Psi_2 = s_2(R_\gamma \Psi) \in \widetilde{\mathbb{T}^2}.$$

On a alors  $R_\gamma \Psi = R_{\Psi_2} \Psi_1^{-1} R_\gamma \Psi_1$ , et puisque les translations commutent,  $\Psi = R_{\Psi_2} [R_\gamma^{-1}, \Psi_1^{-1}]$ .

Soit  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$  un chemin reliant l'identité à  $R_\gamma$ , alors  $(s, t) \mapsto [R_{\alpha(s+(1-s)t)}, \Psi_1^{-1}(t)]$  est une homotopie à extrémités fixes entre les chemins  $t \mapsto [R_{\alpha(t)}^{-1}, \Psi_1^{-1}(t)]$  et  $t \mapsto [R_\gamma^{-1}, \Psi_1^{-1}(t)]$ . Donc  $\Psi$  est homotope au chemin  $t \mapsto R_{\Psi_2(t)} [R_{\alpha(t)}^{-1}, \Psi_1^{-1}(t)]$ , et ce dernier est clairement contenu dans  $N(\widetilde{\mathbb{T}^2})$ .

## 2.2 Le cas général

On considère maintenant  $M$  une surface fermée. On souhaite prouver la simplicité du groupe  $Diff_0^\infty(M)$ . La preuve de ce résultat est essentiellement dû à Thurston ([Th], voir [Ba] pour plus de détails) et se décompose en deux étapes.

Dans un premier temps, on utilise des propriétés générales du groupe  $Diff_0^\infty(M)$  pour se ramener à l'étude du groupe  $Diff_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ , le groupe des difféomorphismes du plan, isotopes à l'identité et à support compact. Précisément, on montrera que si  $Diff_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  est parfait, alors  $Diff_0^\infty(M)$  est simple.

Dans un second temps, on s'attachera à prouver que  $Diff_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  est parfait. Pour cela, par des arguments « géométriques » dû à Thurston, il suffira de montrer que  $Diff_0^\infty(M)$  est parfait pour une surface  $M$  quelconque.

Commençons par quelques définitions.

**Définition.** On dit que  $G \subseteq Diff_0^\infty(M)$  a la propriété de fragmentation si  $\forall \mathcal{U} = (U_i)$  recouvrement ouvert et  $\forall g \in G, \exists g_1, \dots, g_s, \in G$  avec  $supp(g_i) \subseteq U_i$  et  $g = g_1 \dots g_s$ .

**Définition.** On dit que  $G \subseteq Diff_0^\infty(M)$  est fortement  $p$ -transitif si  $\forall (x_1, \dots, x_p)$  et  $(y_1, \dots, y_p)$  distincts,  $\exists g_i \in G$  tel que  $g_i(x_i) = y_i$  et  $supp(g_i) \cap supp(g_j) = \emptyset$ , pour  $i \neq j$ . En particulier, les  $G$ -orbites sont denses dans  $M$ .

Montrons alors que  $Diff_0^\infty(M)$  possède ces propriétés.

**Lemme.**  $Diff_0^\infty(M)$  a la propriété de fragmentation.

**Preuve.** Soit  $g \in \text{Diff}_0^\infty(M)$ , et  $g_t$  une isotopie le joignant à l'identité. Pour  $N \in \mathbb{N}$ , écrivons

$$g = g_1 = (g_1 g_{\frac{N-1}{N}}^{-1})(g_{\frac{N-1}{N}} g_{\frac{N-2}{N}}^{-1}) \dots (g_{\frac{1}{N}} g_0^{-1})$$

Pour  $N$  suffisamment grand, chaque  $g_{\frac{N-k+1}{N}} g_{\frac{N-k}{N}}^{-1}$  est proche de l'identité, on peut donc supposer  $g$  proche de l'identité. En prenant une carte exponentielle au voisinage de l'identité, on peut même choisir une isotopie  $g_t = \exp(\text{texp}^{-1}g)$  qui soit proche de l'identité pour tout  $t$ .

Soit  $U_1, \dots, U_m$  un recouvrement ouvert, et  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  une partition de l'unité associée. Définissons  $\mu_k = \sum_{i \leq k} \lambda_i$  et  $g_k(x) = g_{\mu_k(x)}(x)$ . Alors  $g_k$  est une application lisse, proche de l'identité, donc c'est un difféomorphisme. Par définition des  $\mu_k$ , il est clair que  $g_k(x) = g_{k-1}(x)$  si  $x \notin U_k$ . Donc  $h_k = g_k g_{k-1}^{-1}$  est un difféomorphisme à support dans  $U_k$ , et on a

$$g = g_m = (g_m g_{m-1}^{-1})(g_{m-1} g_{m-2}^{-1}) \dots (g_1 g_0^{-1}) = h_m \dots h_1 \square$$

**Lemme.**  $\text{Diff}_0^\infty(M)$  est fortement  $p$ -transitif,  $\forall p \in \mathbb{N}$ .

**Preuve.** On commence par le cas  $p = 1$ . Soit  $x, y \in M$  distincts, on cherche  $g$  tel  $g(x) = y$ . Si  $x$  et  $y$  sont proches, on trouve une carte  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $\varphi(x) = (0, 0)$  et  $\varphi(y) = (0, \varepsilon)$ . Si  $\lambda(x)$  est une fonction plateau convenablement choisie, alors le temps 1 du flot de  $X(x) = \lambda(x)\partial_{x_1}$  envoie  $\varphi(x)$  sur  $\varphi(y)$ , donc en le conjuguant par  $\varphi$  on obtient  $g \in \text{Diff}_0^\infty(M)$  tel que  $g(x) = y$ . Si maintenant  $x$  et  $y$  sont arbitraires, on prend  $c$  un chemin les joignant qu'on découpe par compacité en un nombre fini de chemins suffisamment petits pour que l'on puisse appliquer la construction précédente. Enfin pour  $p$  quelconque, on trouve  $p$  chemins disjoints  $c_1, \dots, c_p$  contenus dans des ouverts disjoints  $U_1, \dots, U_p$ , et à chaque  $c_i$  on associe  $g_i \in \text{Diff}_0^\infty(M)$ , à support dans  $U_i$  et tel que  $g_i(x_i) = y_i$ . Alors  $g = g_1 \dots g_p$  convient.  $\square$

**Théorème (Thurston).** Si  $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  est parfait, alors  $\text{Diff}_0^\infty(M)$  est simple.

**Preuve.** Notons  $G = \text{Diff}_0^\infty(M)$ . Pour  $U \subseteq M$  un ouvert de carte, on note  $G_U$  le sous-groupe de  $G$  des difféomorphismes dont l'isotopie est à support dans  $U$ . Par hypothèse,  $G_U \cong \text{Diff}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  est parfait.

La simplicité de  $\text{Diff}_0^\infty(M)$  va alors résulter uniquement des propriétés de fragmentation et de transitivité.

Soit  $g \in G$  différent de l'identité, notons  $N(g)$  le sous-groupe normal engendré

par  $g$ . Il s'agit donc de prouver que  $N(g) = G$ .

Soit  $x$  tel que  $g(x) \neq x$ . Puisque les  $G$ -orbites sont denses dans  $M$ , on trouve  $h \in G$  tel que  $h(x) \neq x$ ,  $h(x) \neq g(x)$ . On trouve alors trois ouverts disjoints  $W_1$ ,  $W_2$  et  $W_3$  séparant  $x$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$  et on pose  $U = W_1 \cap g^{-1}(W_2) \cap h^{-1}(W_3)$ . Ainsi  $U$  est un voisinage ouvert de  $x$  et les ouverts  $U$ ,  $g(U)$  et  $h(U)$  sont disjoints. Il est alors clair que  $\forall u, v \in G_U$

$$[u, g] = \begin{cases} u & \text{sur } U \\ gu^{-1}g^{-1} & \text{sur } g(U) \\ id & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$[v, h] = \begin{cases} v & \text{sur } U \\ hv^{-1}h^{-1} & \text{sur } h(U) \\ id & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et une simple vérification donne  $[u, v] = [[u, g], [v, h]]$ .

On a alors

$$G_U \subseteq [G_U, G_U] \subseteq [[G_U, g], [G_U, h]] \subseteq [N(g), G] \subseteq N(g)$$

Pour  $x \in M$ , on trouve par transitivité un voisinage  $U_x$  de  $x$  et  $\alpha_x \in G$  tel que  $\alpha_x(U_x) \subseteq U$ . On a alors  $G_{U_x} \subseteq \alpha_x^{-1}G_U\alpha_x \subseteq N(g)$ . Ces  $U_x$ , lorsque  $x$  parcourt  $M$ , recouvrent  $M$  et ainsi par fragmentation  $\bigcup_{x \in M} G_{U_x}$  engendre  $G$ , ce qui donne  $G \subseteq N(g)$ .  $\square$

Passons maintenant à la seconde partie. Il nous reste à prouver que le groupe  $Diff_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  est parfait. La preuve sera très indirecte, il nous faut donc commencer par des préliminaires. On note  $G = Diff_0^\infty(M)$ .

L'idée essentielle va être de considérer une isotopie dans  $G$  comme un 1-cycle d'un certain complexe de chaîne  $B\overline{G}$  afin d'utiliser le formalisme de l'homologie.

Pour cela, on note  $SG_n$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par les  $n$ -simplexes singuliers, ie les applications  $f : \Delta^n \rightarrow G$ , et  $SG$  le complexe des chaînes singulières. Soit  $v_0$  le premier sommet de  $\Delta^n$  (on suppose que les sommets de  $\Delta^n$  sont ordonnés), et  $f$  un  $n$ -simplexe singulier. On peut alors faire agir  $G$  sur  $SG_n$  pour ramener  $f(v_0)$  en l'identité  $e \in G$ . On note alors  $B\overline{G}_n$  le quotient, qui s'identifie aux sommes formelles de  $n$ -simplexes  $c : \Delta^n \rightarrow G$  qui vérifie  $c(v_0) = e$ .

On remarque alors que  $B\overline{G}_0 = \{e\}$  et que  $B\overline{G}_1$  est exactement l'ensemble des sommes formelles d'isotopies dans  $G$ .

L'opérateur de bord  $\partial : SG_n \rightarrow SG_{n-1}$  passe au quotient  $\partial : B\overline{G}_n \rightarrow B\overline{G}_{n-1}$

et en notant  $B\overline{G}$  la somme directe des  $B\overline{G}_n$ , on obtient alors un complexe de chaîne  $(B\overline{G}, \partial)$  dont on note  $H_*(B\overline{G}, \mathbb{Z})$  l'homologie à coefficients entiers. L'intérêt de cette notion réside dans la proposition suivante.

**Proposition.** On a un isomorphisme de groupes

$$\tilde{G}/[\tilde{G}, \tilde{G}] \cong H_1(B\overline{G}, \mathbb{Z}).$$

En particulier,  $\tilde{G}$  est parfait si et seulement si  $H_1(B\overline{G}, \mathbb{Z})$  est trivial.

On va se contenter de décrire l'isomorphisme en question, qui est analogue à l'isomorphisme de Hurewicz.

Soit  $c$  une isotopie dans  $G$ , ie  $c : [0, 1] \rightarrow G$  est un chemin tel que  $c(0) = e$ . On note  $[c]$  sa classe d'homotopie dans  $\tilde{G}$  et  $[[c]]$  sa classe d'homologie dans  $H_1(B\overline{G}, \mathbb{Z})$ . Remarquons que cette dernière définition est correcte car  $c$ , en tant qu'élément de  $B\overline{G}_1$ , est automatiquement un 1-cycle car  $B\overline{G}_0 = \{e\}$ . Définissons alors

$$\Phi : \tilde{G} \rightarrow H_1(B\overline{G}, \mathbb{Z}) : [c] \mapsto [[c]].$$

Vérifions que cette définition a un sens. Soit  $c'$  tel que  $[c'] = [c]$ . Alors  $c'$  et  $c$  sont des isotopies homotopes à extrémités fixes. Soit  $H : [0, 1]^2 \rightarrow G$  une homotopie. Puisque  $H$  est constante sur  $\{0\} \times [0, 1]$ , elle se factorise à travers un 2-simplexe  $\sigma : \Delta^2 \rightarrow G$ . De plus,  $H$  est aussi constante sur  $\{1\} \times [0, 1]$ , ce qui permet de s'assurer que  $c - c'$  est un bord, ie  $[[c']] = [[c]]$  (voir la figure 2.1).

Ainsi  $\Phi$  est bien définie. On peut alors vérifier que c'est un morphisme. Prenons  $c, c'$  deux éléments de  $\tilde{G}$ , leur produit  $c * c'$  est défini par la concaténation de  $c$  et d'une reparamétrisation convenable de  $c'$ . On peut alors définir un 2-simplexe

$$\sigma : \Delta^2 = \Delta^2(v_0, v_1, v_2) \rightarrow G$$

par  $\sigma|_{[v_0, v_1]} = c$ ,  $\sigma|_{[v_1, v_2]} = c'$  et en imposant que  $\sigma$  soit constante sur les segments perpendiculaires à  $[v_0, v_2]$ . Ceci nous donne que  $c + c' - c * c'$  est le bord de  $\sigma$ , donc on a bien  $[[c * c']] = [[c]] + [[c']]$  (voir la figure 2.3).

On se retrouve donc avec un morphisme de groupes

$$\Phi : \tilde{G} \rightarrow H_1(B\overline{G}, \mathbb{Z}).$$

Puisque  $H_1(B\overline{G}, \mathbb{Z})$  est abélien,  $\Phi$  envoie les commutateurs de  $\tilde{G}$  sur 0, donc elle passe au quotient

$$\Phi : \tilde{G}/[\tilde{G}, \tilde{G}] \rightarrow H_1(B\overline{G}, \mathbb{Z}).$$



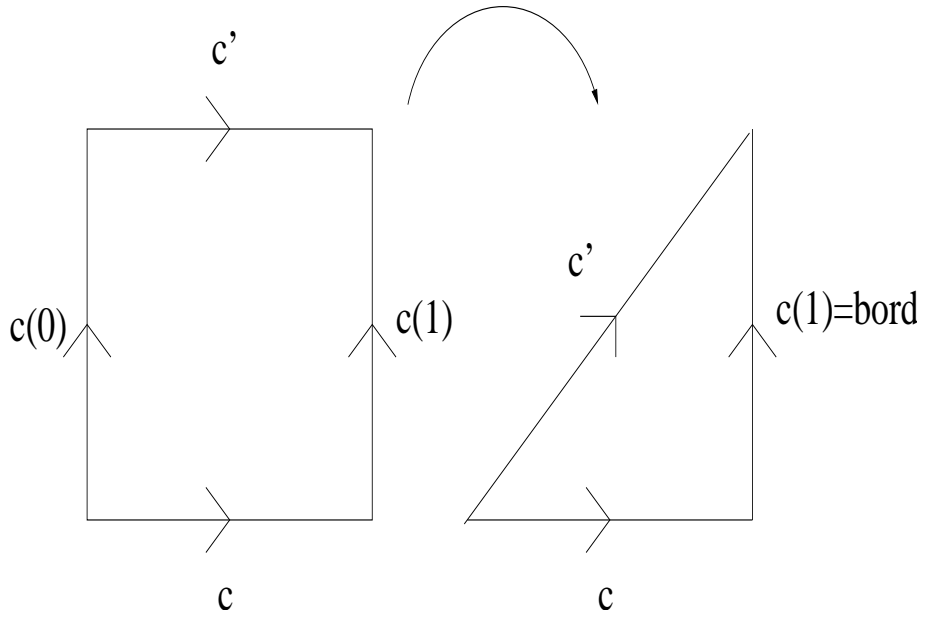


FIG. 2.1 -  $[c] = [c'] \Rightarrow [[c]] = [[c']]$ .

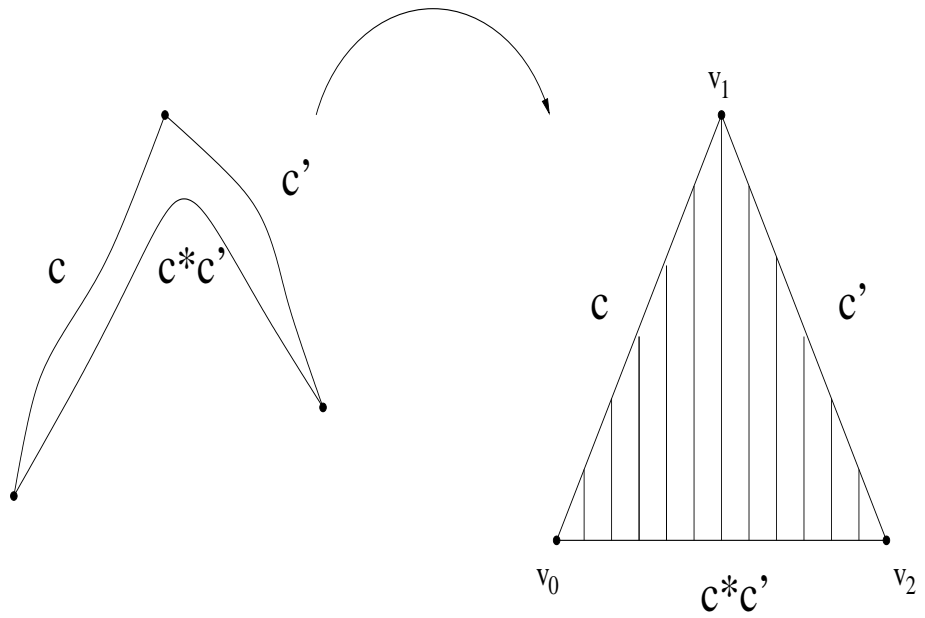


FIG. 2.2 -  $[[c * c']] = [[c]] + [[c']]$ .

On peut alors montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme, et cela se fait de la même manière que dans le théorème de Hurewicz.

On est alors en mesure d'énoncer le second théorème de Thurston.

**Théorème (Thurston)** Soit  $U \subseteq M$  un ouvert,  $\bar{U} \subseteq V$  et  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  une carte. Alors l'inclusion  $G_U \subseteq G$  induit un isomorphisme  $H_1(\overline{BG_U}, \mathbb{Z}) \cong H_1(\overline{BG}, \mathbb{Z})$ .

D'après ce qui précède,  $H_1(\overline{BG}, \mathbb{Z}) = 0$  si et seulement si  $\tilde{G}$  est parfait. En appliquant le résultat de Thurston puis de Herman à  $M = \mathbb{T}^2$  et  $U = \mathbb{R}^2$ , on a  $H_1(\overline{BDiff_0^\infty(\mathbb{R}^2)}, \mathbb{Z}) \cong H_1(\overline{BDiff_0^\infty(\mathbb{T}^2)}, \mathbb{Z}) \cong 0$ .

Donc  $\overline{Diff_0^\infty(\mathbb{R}^2)}$  est parfait, ce qui donne aussitôt que  $Diff_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  est parfait. On obtient alors la simplicité de  $Diff_0^\infty(M)$  dans le cas général.

Passons maintenant à la preuve du théorème de Thurston.

**Preuve.** Notons  $\rho : \overline{BG_U} \rightarrow \overline{BG}$  le morphisme obtenue par l'inclusion  $G_U \subseteq G$  et  $\rho_* : H_1(\overline{BG_U}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\overline{BG}, \mathbb{Z})$  le morphisme induit en homologie. On procède en plusieurs étapes.

*a. Lemme :* si  $\tau$  est un 1-simplexe de  $\overline{BG}$ ,  $g \in G$ , alors  $\tau$  et  $g\tau g^{-1}$  sont homologues dans  $H_1(\overline{BG}, \mathbb{Z})$ .

Autrement dit, la conjugaison dans  $G$  induit une application triviale en homologie.

Il convient de prouver que l'application  $t \mapsto [g, \tau_t]$  est nulle-homologue. Soit  $t \mapsto g_t$  un chemin joignant  $g$  à l'identité. Alors l'application  $t \mapsto [g_t, \tau_t]$  est nulle-homologue car c'est un commutateur de  $\tilde{G}$ . Il reste donc à montrer que  $[g, \tau_t]$  et  $[g_t, \tau_t]$  sont homologues. Pour cela, il suffit de vérifier que  $H(s, t) = [g_{s+t-st}, \tau_t]$  est une homotopie (à extrémités fixes) entre  $[g, \tau_t]$  et  $[g_t, \tau_t]$ . Ceci termine la preuve du lemme.

*b. Surjectivité de  $\rho_*$ .*

Soit  $\alpha \in H_1(\overline{BG}, \mathbb{Z}) = \tilde{G}/[\tilde{G}, \tilde{G}]$ , on note  $g_t$  un représentant, ie  $\alpha = [g_t]$ . On va alors découper  $g_t$  en une somme finie d'isotopies à support dans  $U$  pour trouver un antécédent  $\beta \in H_1(\overline{BG_U}, \mathbb{Z})$ . Soit  $\mathcal{U} = (U_i)$  un recouvrement ouvert par des boules suffisamment petites pour que l'on puisse trouver, par transitivité, des  $h_i \in G$  avec  $h_i(U_i) \subseteq U$ . Par fragmentation, on a  $g_t = g_t^1 \dots g_t^n$  avec  $\text{supp}(g_t^i) \subseteq U_i$ .

L'isotopie  $h_i g_t^i h_i^{-1}$  est à support dans  $U$ , notons alors  $\beta_i \in H_1(\overline{BG_U}, \mathbb{Z})$  sa classe d'homologie. Il est alors clair que  $\rho_*(\beta_1 + \dots + \beta_n) = \alpha$  : il suffit en

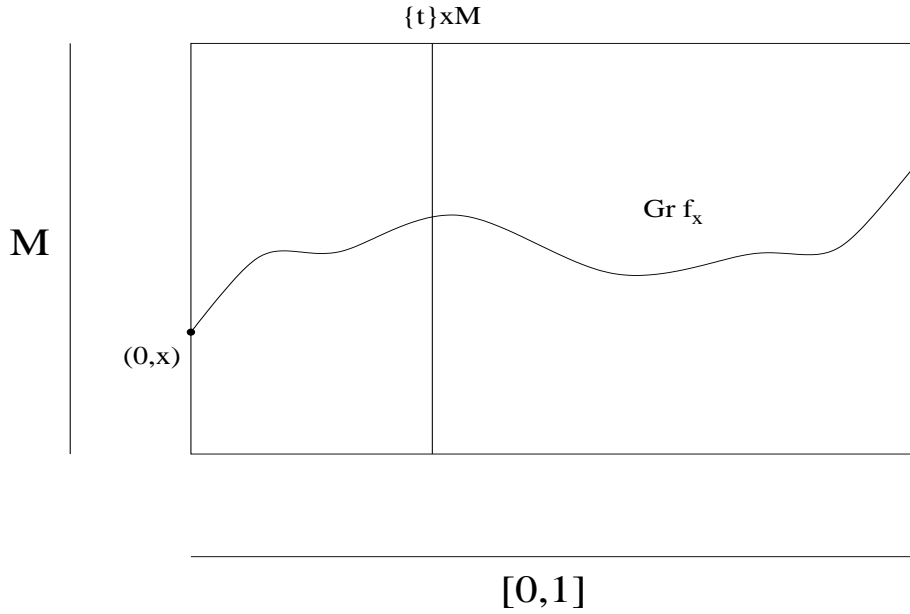


FIG. 2.3 – Isotopies et feuilletages.

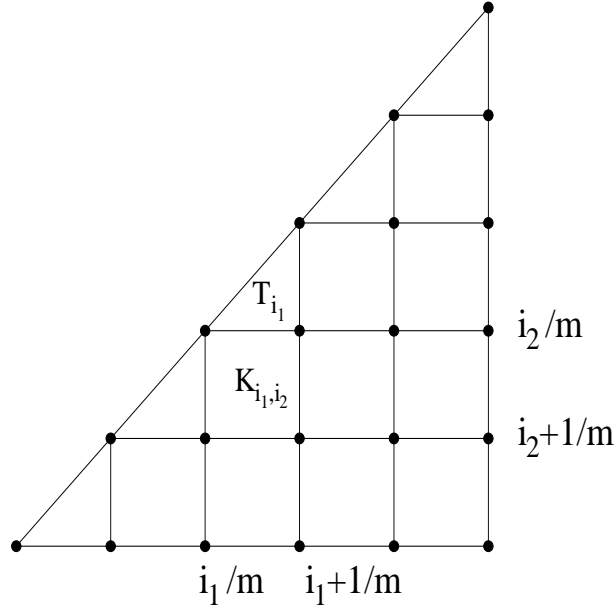
effet de remarquer que  $\forall i$ , les chemins  $t \mapsto g_t^i$  et  $t \mapsto h_i g_t^i h_i^{-1}$  sont homologues dans  $H_1(\overline{BG}, \mathbb{Z})$  par le lemme précédent. Ceci démontre la surjectivité. L'injectivité sera beaucoup plus délicate, on va devoir changer de point de vue pour un moment et considérer une isotopie dans  $G$  comme un feuilletage du produit  $[0, 1] \times M$ .

*c. Liens entre isotopies et feuilletages de  $[0, 1] \times M$ .*

Soit  $c$  une isotopie dans  $G$ . On peut lui associer un feuilletage de  $[0, 1] \times M$  de codimension 2, transverse aux sous-variétés verticales  $\{t\} \times M$  : on définit la feuille passant par  $(0, x)$  comme étant l'ensemble  $\{(t, c(t)(x)) | t \in [0, 1]\}$ . Réciproquement, étant donné un feuilletage de  $[0, 1] \times M$  transverse aux sous-variétés  $\{t\} \times M$ , on peut lui associer une isotopie dans  $G$  : en effet, l'hypothèse de transversalité implique que la feuille passant par  $(0, x)$  est nécessairement le graphe d'une application lisse  $f_x : [0, 1] \rightarrow M$  (voir la figure 2.3), il suffit ensuite de définir  $c : [0, 1] \rightarrow G$  par  $c(t)(x) = f_x(t)$ .

De manière analogue, on a une correspondance entre les 2-simplexes  $c : \Delta^2 \rightarrow G$  et les feuilletages de  $\Delta^2 \times M$  transverses à  $\{t\} \times M$ . Remarquons que pour le 2-simplexe constant  $c(t) = e \forall t$ , on obtient le feuilletage horizontal de  $\Delta^2 \times M$ , dont les feuilles sont  $\Delta^2 \times \{x\}$ .

On dit qu'un point  $x$  est hors du support d'un simplexe  $c : \Delta^2 \rightarrow G$ , et on note  $x \notin \text{supp}(c)$ , si la feuille passant par  $(0, x)$  n'est autre que  $\Delta^2 \times \{x\}$


 FIG. 2.4 – Décomposition de  $\Delta^2$ 

(on parle alors de feuille horizontale). Autrement dit,  $\text{supp}(c)$  est le plus petit fermé  $K \subseteq M$  tel que la restriction du feuilletage à  $\Delta^2 \times (M - K)$  soit horizontal. Dans les cas des isotopies (ie des 1-simplexes), cela correspond à la notion usuelle de support.

On va utiliser le point de vue des feuilletages dans le lemme technique suivant.

*d. Lemme : soit  $c : \Delta^2 \rightarrow G$  un 2-simplexe  $C^1$ -proche de l'identité. Alors  $\forall \mathcal{U} = (U_i)$  recouvrement ouvert de  $M$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , il existe une 2-chaîne  $\tilde{c} = \sum_{0 \leq i_1, i_2 \leq m} c_{i_1, i_2}$  qui vérifie les 2 conditions suivantes :*

(i)  $\partial \tilde{c} = \partial c$

(ii) Si  $U_{i_1+1} \cap U_{i_2+1} = \emptyset$ , alors  $\partial c_{i_1, i_2} = \emptyset$ .

On note  $\Delta^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq s \leq 1\}$  le 2-simplexe standard. On découpe les arêtes de  $\Delta^2$  en  $m$  intervalles de même longueur, et on considère la décomposition en carrés et triangles que l'on obtient (voir la figure 2.4). Soit  $\mathcal{U} = (U_i)$  un recouvrement ouvert et  $(\lambda_i)$  une partition de l'unité associée. Posons  $\mu_{i_1} = \sum_{j \leq i_1} \lambda_j$  et  $\mu_{i_2} = \sum_{j \leq i_2} \lambda_j$ . On considère l'application

$$f : \Delta^2 \times M \longrightarrow \Delta^2 \times M : (i_1/m, i_2/m, x) \longmapsto (\mu_{i_1}(x), \mu_{i_2}(x), x)$$

L'application est ainsi définie sur les sommets de la décomposition de  $\Delta^2$ , on l'étend ensuite affinement sur  $\Delta^2$ .

On obtient alors une application fibrée au dessus de l'identité de  $M$ , ie  $f$  est

de la forme

$$f(t, x) = (f_x(t), x) \quad \forall (t, x) \in \Delta^2 \times M$$

On vérifie alors que  $D_{(t,x)}f(T_{(t,x)}(\Delta^2 \times M)) = T_{(f_x(t),x)}(\{f_x(t)\} \times M)$ , donc

$$T_{(f_x(t),x)}(\Delta^2 \times M) = T_{(f_x(t),x)}(\Delta^2 \times \{x\}) \oplus D_{(t,x)}f(T_{(t,x)}(\Delta^2 \times M))$$

ce qui revient à dire que  $f$  est transverse au feuilletage horizontal de  $\Delta^2 \times M$ , dont les feuilles sont  $\Delta^2 \times \{x\}$ .

Prenons alors un 2-simplexe  $c : \Delta^2 \rightarrow G$   $C^1$ -petit, ie  $c(t)$  est  $C^1$ -proche de l'identité  $\forall t$ . Soit  $\mathcal{F}$  le feuilletage défini par  $c$ . Puisque  $\mathcal{F}$  est proche du feuilletage horizontal,  $f$  reste transverse à  $\mathcal{F}$  et on peut ainsi définir le feuilletage induit  $f^*\mathcal{F}$ .

Soit  $K_{i_1, i_2}$  (pour  $i_1 + i_2 \neq m$ ) les carrés représentés sur la figure 2.4, et  $T_{i_1} = T_{i_1, m-i_1}$  les triangles. Notons  $j_{i_1, i_2} : K_{i_1, i_2} \times M \hookrightarrow \Delta^2 \times M$  et  $j_{i_1} : T_{i_1} \times M \hookrightarrow \Delta^2 \times M$  les inclusions, et soit  $\mathcal{F}_{i_1, i_2}$  la restriction de  $f^*\mathcal{F}$  à  $K_{i_1, i_2}$ . Ce feuilletage est transverse à  $\{t\} \times M$ , il définit donc un 2-simplexe  $c_{i_1, i_2}$ . De même,  $j_{i_1}^*(f^*\mathcal{F})$  est un 2-simplexe  $c_{i_1} = c_{i_1, m-i_1}$ , et on obtient finalement une 2-chaine  $\tilde{c} = \sum_{0 \leq i_1, i_2 \leq m} c_{i_1, i_2}$ .

Il est alors immédiat que  $\partial\tilde{c} = \partial c$ , car l'application  $f$  préserve le bord de  $\Delta^2 \times M$ . On vérifie de plus que  $\text{supp}(c_{i_1, i_2}) \subseteq U_{i_1+1} \cup U_{i_2+1}$  : en effet, si  $x \notin U_{i_1+1} \cup U_{i_2+1}$ , on a les égalités  $\mu_{i_1}(x) = \mu_{i_1+1}(x)$  et  $\mu_{i_2}(x) = \mu_{i_2+1}(x)$ , donc l'application  $f$  est l'identité sur le carré  $K_{i_1, i_2}$  (car l'identité sur les 4 sommets), ce qui signifie bien que  $x \notin \text{supp}(c_{i_1, i_2})$ . Enfin, si  $U_{i_1+1} \cap U_{i_2+1} = \emptyset$ , alors  $\partial c_{i_1, i_2} = 0$ . Ceci achève donc la preuve du lemme.

*e. Injectivité de  $\rho_*$ .*

Soit  $z$  un 1-cycle dans  $B\overline{G}_U$  qui borde une 2-chaine dans  $B\overline{G}$  (ie  $\rho_*[z] = 0$  ou bien encore  $z$  représente une somme d'isotopies à support dans  $U$  qui borde une somme de familles à deux paramètres de difféomorphismes de  $M$ ), on veut donc prouver que  $z$  borde un 2-chaine dans  $B\overline{G}_U$  (ie  $[z] = 0$  ou bien encore on peut choisir les familles de difféomorphismes à deux paramètres à support dans  $U$ ).

Soit  $c = \sum_j c^j$  une 2-chaine dans  $B\overline{G}$  telle que  $\partial c = z$ . Par subdivision, on suppose que chaque  $c^j$  est proche de l'identité. Soit  $\tilde{c}^j = \sum_{i_1, i_2} \tilde{c}_{i_1, i_2}^j$  la 2-chaine construite dans le lemme précédent à partir du 2-simplexe  $c^j$ . La construction donne  $\partial c^j = \partial \tilde{c}^j$ , donc en posant  $\tilde{c} = \sum_j \tilde{c}^j$ , on a les deux propriétés suivantes :

(i)  $\partial\tilde{c} = \partial c = z$

(ii)  $\partial\tilde{c}_{i_1, i_2}^j = 0$  si  $U_{i_1+1} \cap U_{i_2+1} = \emptyset$

Il est alors naturel de définir  $\{\tilde{c}_{i_1, i_2}^j\}$  le sous-ensemble des 2-simplexes  $\tilde{c}_{i_1, i_2}^j$  vérifiant  $U_{i_1+1} \cap U_{i_2+1} \neq \emptyset$  et  $\bar{c} = \sum \tilde{c}_{i_1, i_2}^j$ . On obtient alors  $z = \partial\bar{c}$ , autrement

dit  $z$  borde une 2-chaine constituée de 2-simplexes, chacun ayant support dans une intersection de deux ouverts de  $\mathcal{U}$ .

Soit  $\mathcal{V}$  un recouvrement ouvert de  $M$  par des boules géodésiques convexes (après choix d'une métrique), si  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ , alors  $V_i \cup V_j \in \mathcal{V}$ . Choisissons maintenant notre recouvrement ouvert  $\mathcal{U}$  de tel sorte que si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , alors  $U_i \cup U_j \subseteq V_l$ . Ainsi  $z$  borde une 2-chaine  $\bar{c} = \sum_j \bar{c}_j$  avec  $\text{supp}(\bar{c}_j) \subseteq V_j$  (après réindexation).

Pour  $k = 0, 1, 2$ , notons  $\partial_k$  l'opérateur de face. On a

$$z = \partial \bar{c} = \sum_{k,j} (-1)^k \tau_j^k$$

avec  $\tau_j^k = \partial_k \bar{c}_j$ . Par transitivité de  $\text{Diff}_0^\infty(M)$ , on trouve  $h_j^k \in \text{Diff}_0^\infty(M)$  qui envoie le support de  $\tau_j^k$  dans  $U$  (si  $\text{supp}(\tau_j^k) \subseteq U$ , on définit  $h_j^k$  comme étant l'identité).

Ainsi  $\bar{\tau}_j^k = h_j^k \tau_j^k (h_j^k)^{-1}$  est une isotopie à support dans  $U$  (ie un 1-simplexe de  $\overline{BG_U}$ ) et on a

$$z = \sum_{k,j} (-1)^k \bar{\tau}_j^k.$$

Prenons maintenant  $g_j \in \text{Diff}_0^\infty(M)$  tel que  $g_j(V_j) \subseteq U$ . La preuve sera alors terminée si l'on parvient à démontrer que les 1-cycles  $\sum_k (-1)^k \bar{\tau}_j^k$  et  $\partial(g_j \bar{c}_j g_j^{-1})$  sont homologues dans  $\overline{BG_U}$ , puisqu'alors  $z$  borderait la 2-chaine  $\sum_j g_j \bar{c}_j g_j^{-1} \in \overline{BG_U}$ .

Notons  $\tilde{h}_j^k, \tilde{g}_j$  les restrictions de  $h_j^k, g_j$  à la boule  $V_j$ . Ce sont deux plongements préservant l'orientation de  $V_j$  dans  $U \cong \mathbb{R}^2$ , donc ils sont isotopes. Notons  $H_j^k \in \text{Diff}_0^\infty(U)$  tel que  $H_j^k \tilde{h}_j^k(V_j) = \tilde{g}_j(V_j)$ . On a alors d'une part

$$\begin{aligned} g_j \tau_j^k g_j^{-1} &= \tilde{g}_j \tau_j^k \tilde{g}_j^{-1} \\ &= (H_j^k \tilde{h}_j^k) \tau_j^k ((\tilde{h}_j^k)^{-1} (H_j^k)^{-1}) \\ &= H_j^k (\tilde{h}_j^k \tau_j^k (\tilde{h}_j^k)^{-1}) (H_j^k)^{-1} \\ &= H_j^k \bar{\tau}_j^k (H_j^k)^{-1} \end{aligned}$$

et d'autre part,  $H_j^k \bar{\tau}_j^k (H_j^k)^{-1}$  est homologue à  $\bar{\tau}_j^k$  dans  $\overline{BG_U}$  par le lemme de la partie a.

Autrement dit,  $g_j \tau_j^k g_j^{-1}$  est homologue à  $\bar{\tau}_j^k$ , ce qui nous donne alors que  $\partial(g_j \bar{c}_j g_j^{-1}) = \sum_k (-1)^k g_j \tau_j^k g_j^{-1}$  est homologue à  $\sum_k (-1)^k \bar{\tau}_j^k$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

# Chapitre 3

## Groupe de difféomorphismes conservatifs

Soit  $M$  une surface compacte orientable et  $\omega$  une forme volume, ie  $\omega$  est une 2-forme différentielle sur  $M$  qui ne s'annule pas. On dit qu'une application lisse  $g : M \rightarrow M$  préserve l'aire si on a  $g^*\omega = \omega$ . On note alors  $Diff^\infty(M, \omega)$  le groupe des difféomorphismes préservant l'aire, et  $Diff^\infty(M, \partial M, \omega)$  son analogue dans le cas à bord.

Comme précédemment, on s'intéresse aux propriétés algébriques de ces groupes, cependant la différence majeure est que les groupes  $Diff_0^\infty(M, \omega)$  et  $Diff_0^\infty(M, \partial M, \omega)$  ne sont pas simples en général.

### 3.1 Morphisme de flux et cycles asymptotiques

On considère  $Diff_0^\infty(M, \omega)$  pour  $M$  une surface fermée. Rappelons que par un théorème de Moser, les propriétés algébriques de  $Diff_0^\infty(M, \omega)$  ne dépendent pas du choix de  $\omega$  car deux formes volumes distinctes nous donne des groupes conjugués dans  $Diff_0^\infty(M)$ .

On note  $\widetilde{Diff}_0^\infty(M, \omega)$  le revêtement universel de  $Diff_0^\infty(M, \omega)$ . Un élément de  $\widetilde{Diff}_0^\infty(M, \omega)$  est une classe d'homotopie (à extrémités fixes) de chemins  $t \mapsto \varphi^t \in Diff_0^\infty(M, \omega)$  avec  $\varphi^0 = 1$ . On peut définir une structure de groupe sur  $\widetilde{Diff}_0^\infty(M, \omega)$  de deux manières équivalentes : soit  $\Phi = (\varphi^t)_{t \in [0,1]}$  et  $\Psi = (\psi^t)_{t \in [0,1]}$  deux isotopies, alors on définit le produit  $\Phi \cdot \Psi$  soit en composant les difféomorphismes, ie

$$\Phi \cdot \Psi : t \mapsto \varphi^t \circ \psi^t$$

soit en juxtaposant les chemins

$$\Phi.\Psi : t \mapsto \begin{cases} \psi^{2t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \varphi^{2t-1} \circ \psi^1 & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Prenons  $\Phi = (\varphi^t)_{t \in [0,1]}$  une isotopie, ie un chemin dans  $Diff_0^\infty(M, \omega)$  qui part de l'identité, et soit  $X_t$  le champ de vecteurs défini par  $\dot{\varphi}^t = X_t \circ \varphi^t$ . Puisque  $X_t$  préserve l'aire, sa divergence est nulle donc la 1-forme  $i_{X_t}\omega$  est fermée  $\forall t$ . Définissons alors le flux de  $\Phi$  par la classe de cohomologie  $\int_0^1 [i_{X_t}\omega] dt$ .

**Proposition.** Le flux définit un morphisme de groupe surjectif

$$Flux : \widetilde{Diff}_0^\infty(M, \omega) \rightarrow H^1(M, \mathbb{R}) : [\Phi] \mapsto \int_0^1 [i_{X_t}\omega] dt$$

**Preuve.** Il faut avant tout vérifier que l'application est bien définie, ie  $Flux(\Phi)$  ne dépend que de la classe d'homotopie  $[\Phi]$ , et pour cela on va donner une interprétation plus géométrique du morphisme de flux. En identifiant  $H^1(M, \mathbb{R}) = Hom(\pi_1(M), \mathbb{R})$ , regardons l'action de  $Flux(\Phi)$  sur  $[\gamma] \in \pi_1(M)$ . On obtient

$$Flux(\Phi).\gamma = \int_0^1 \int_\gamma i_{X_t}\omega dt = \int_0^1 \int_0^1 \omega(X_t(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s)) dt ds = \int_{\Phi \circ \gamma} \omega$$

où  $\Phi \circ \gamma$  est le 2-simplexe défini par  $\Phi \circ \gamma(s, t) = \varphi_t(\gamma(s))$ . Ainsi  $Flux(\Phi).\gamma$  représente l'aire balayée par le chemin  $\gamma$  sous l'isotopie  $\Phi$  (voir la figure 3.1). Cette expression montre alors que  $Flux(\Phi).\gamma$  ne dépend que de la classe d'homotopie  $[\Phi]$  (voir [MS] pour une preuve formelle). L'application est donc bien définie.

C'est clairement un morphisme de groupes : il suffit de considérer la loi de groupe dans  $\widetilde{Diff}_0^\infty(M, \omega)$  comme la juxtaposition des chemins puis d'utiliser la linéarité de l'intégrale pour obtenir

$$Flux(\Phi.\Psi).\gamma = Flux(\Psi).\gamma + Flux(\Phi).( \psi^1(\gamma) )$$

et on conclut en remarquant que  $\psi^1$  préserve l'aire.

Enfin, si  $\alpha \in H^1(M, \mathbb{R})$ , la non-dégénérescence de  $\omega$  nous donne un unique champ de vecteurs autonome tel que  $i_X\omega = \alpha$ , son flot  $(\phi^t)_{t \in [0,1]}$  vérifie alors  $Flux((\phi^t)_{t \in [0,1]}) = \alpha$ , ce qui démontre la surjectivité.  $\square$

Donnons maintenant une autre construction, équivalente au morphisme de



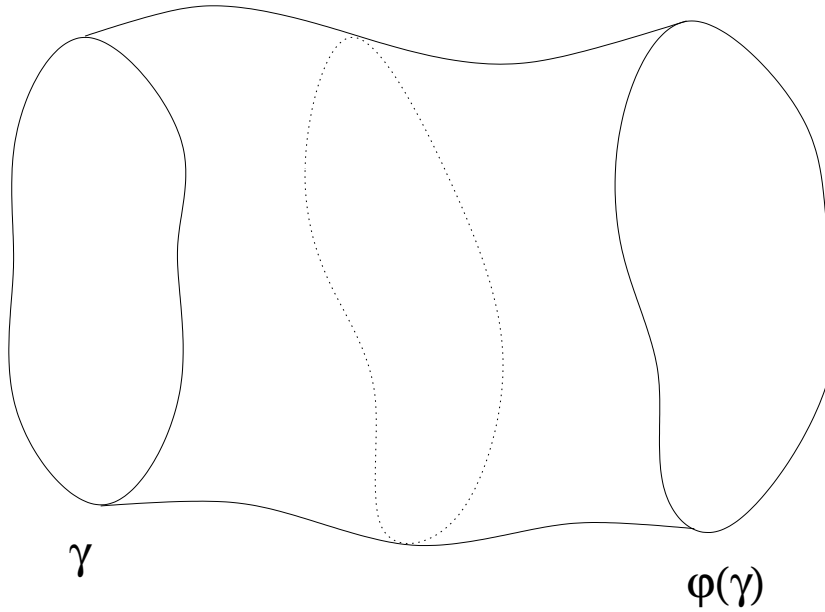


FIG. 3.1 – Interprétation géométrique de  $Flux(\Phi).\gamma$ .

flux, à valeurs cette fois ci dans le  $H_1(M, \mathbb{R})$ . C'est la notion de cycle asymptotique de Schwartzman (voir [Sc]).

Pour  $\Phi \in \widetilde{Diff}_0^\infty(M, \omega)$ , définissons  $Sch(\Phi) \in H_1(M, \mathbb{R})$  par son action sur les 1-formes différentielles fermées. Prenons  $x \in M$ , et notons  $\gamma_x$  le chemin de  $x$  à  $\varphi(x)$  obtenu en suivant l'isotopie. Soit  $\alpha \in H^1(M, \mathbb{R})$  une 1-forme différentielle, on peut l'intégrer le long de la courbe  $\gamma_x$  pour obtenir une fonction de  $x$  puis faire la moyenne sur  $M$ . On pose

$$Sch(\Phi).\alpha = \int_M \left( \int_{\gamma_x} \alpha \right) \omega$$

On vérifie sans peine que  $Sch(\Phi)$  est une forme linéaire sur  $H^1(M, \mathbb{R})$  et donc  $Sch(\Phi) \in H_1(M, \mathbb{R})$ .

Ceci définit un morphisme  $Sch : \widetilde{Diff}_0^\infty(M, \omega) \rightarrow H_1(M, \mathbb{R})$ .

Le lien entre les deux constructions s'obtient par dualité de Poincaré :

$$\begin{aligned}
 \int_M Flux(\Phi) \wedge \alpha &= \int_M \left( \int_0^1 i_{X_t} \omega dt \right) \wedge \alpha \\
 &= \int_M \int_0^1 i_{X_t} \omega \wedge \alpha dt \\
 &= \int_M \int_0^1 i_{X_t} \alpha \wedge \omega dt \\
 &= \int_M \left( \int_0^1 i_{X_t} \alpha dt \right) \omega \\
 &= \int_M \left( \int_{\gamma_x} \alpha \right) \omega
 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne bien

$$\int_M Flux(\Phi) \wedge \alpha = Sch(\Phi). \alpha$$

On peut encore donner une interprétation plus dynamique de l'invariant de Schwartzman, lorsque  $\Phi = (\varphi^t)$  est un flot, ie  $\varphi^t \varphi^s = \varphi^{t+s}$ , qui justifie l'emploi du terme vecteur de rotation moyen que l'on utilise parfois.

Notons  $\gamma_t(x)$  le segment d'orbite entre  $x$  et  $\varphi^t(x)$ , et  $\tilde{\gamma}_t(x)$  le lacet obtenu en fermant le chemin  $\gamma_t(x)$  par une géodésique minimale entre  $x$  et  $\varphi^t(x)$  (on verra que c'est indépendant du choix d'une métrique riemannienne).

Alors  $\tilde{\gamma}_t(x) \in H_1(M, \mathbb{R})$ , et la limite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \tilde{\gamma}_t(x)$ , si elle existe, représente le « déplacement homologique moyen » de l'orbite de  $x$ . On la définit par

$$\left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \tilde{\gamma}_t(x) \right). \alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{\tilde{\gamma}_t(x)} \alpha$$

Nous allons montrer que cette limite existe pour presque tout  $x$  (au sens de la mesure définie par  $\omega$ , ie  $\mu(A) = \int_A \omega$ ) et qu'en notant

$$\rho(\Phi, \omega) = \int_M \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \tilde{\gamma}_t(x) \right) d\mu(x)$$

on a l'égalité  $Sch(\Phi) = \rho(\Phi, \omega) \in H_1(M, \mathbb{R})$ .

Pour vérifier ceci, on regarde l'action sur  $\alpha \in H^1(M, \mathbb{R})$ . On a

$$\rho(\Phi, \omega). \alpha = \int_M \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{\tilde{\gamma}_t(x)} \alpha \right) d\mu(x)$$

Or

$$\int_{\tilde{\gamma}_t(x)} \alpha = \int_{\gamma_t(x)} \alpha + \int_c \alpha$$

où  $c$  est une géodésique minimale entre  $x$  et  $\varphi^t(x)$ , donc  $|\int_c \alpha| < K$  avec une constante  $K$  qui ne dépend ni de  $x$ , ni de  $t$ .

De plus,

$$\frac{1}{t} \int_{\gamma_t(x)} \alpha = \frac{1}{t} \int_0^t \alpha(X(\varphi^s(x))) ds$$

donc par le théorème ergodique de Birkhoff (le membre de droite est une moyenne orbitale de la fonction  $i_X \alpha$ ), on a pour  $\mu$ -presque tout  $x$  la convergence de la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{\gamma_t(x)} \alpha$$

et donc celle de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{\tilde{\gamma}_t(x)} \alpha$$

De plus, le théorème de Birkhoff nous donne la valeur moyenne de cette limite

$$\rho(\Phi, \omega) \cdot \alpha = \int_M \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{\tilde{\gamma}_t(x)} \alpha \right) d\mu(x) = \int_M i_X \alpha(x) d\mu(x)$$

Enfin, on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} Sch(\Phi) \cdot \alpha &= \int_M \left( \int_{\gamma_x} \alpha \right) \omega \\ &= \int_M \left( \int_0^1 \alpha(X(\varphi^s(x))) ds \right) d\mu(x) \\ &= \int_0^1 \left( \int_M \alpha(X(\varphi^s(x))) d\mu(x) \right) ds \\ &= \int_0^1 \left( \int_M \alpha(X(x)) d\mu(x) \right) ds \\ Sch(\Phi) \cdot \alpha &= \int_M i_X \alpha(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

Tout ceci montre bien que  $Sch(\Phi) = \rho(\Phi, \omega)$

**Remarque.** Dans le dernier chapitre, on donnera encore d'autres interprétations de ce morphisme, valable dans un cadre topologique. On peut déjà remarquer que l'on peut définir  $\rho(\Phi, \mu)$  pour une mesure invariante  $\mu$  arbitraire, et pas seulement pour une forme volume.

Définissons le groupe  $\Gamma = Flux(\pi_1(Diff_0^\infty(M, \omega))) \subseteq H^1(M, \mathbb{R})$ .  
On obtient ainsi un morphisme surjectif

$$Flux : Diff_0^\infty(M, \omega) \rightarrow H^1(M, \mathbb{R})/\Gamma$$

qu'on appelle encore morphisme de flux (et que l'on note encore de la même manière). On définit de même

$$Sch : Diff_0^\infty(M, \omega) \rightarrow H_1(M, \mathbb{R})/\Gamma'$$

où  $\Gamma' = Sch(\pi_1(Diff_0^\infty(M, \omega)))$ .

Voyons ce que cela donne sur des exemples.

Pour la sphère  $S^2$ , son premier groupe de cohomologie est trivial donc il en est de même du morphisme de flux.

Pour les surfaces de genre supérieur  $\Sigma_g$ , le groupe  $Diff_0^\infty(\Sigma_g, \omega)$  est contractile, ainsi on a  $Flux : Diff_0^\infty(\Sigma_g, \omega) \rightarrow H^1(\Sigma_g, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2g}$ .

Enfin pour le tore  $\mathbb{T}^2$ , on a  $\pi_1(Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2, \omega)) \cong \mathbb{T}^2$ , on a alors  $\Gamma \cong H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$  et on obtient finalement  $Flux : Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2, \omega) \rightarrow H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})/H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{T}^2$ . Prenons  $\varphi \in Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2, \omega)$ , temps 1 d'une isotopie  $\Phi$ . Soit  $\tilde{\varphi}$  un relevé de  $\varphi$  obtenu en relevant l'isotopie, et  $\tilde{x}$  un relevé de  $x \in \mathbb{T}^2$ . On souhaite donner une expression plus simple de  $Sch(\varphi) \in \mathbb{T}^2$ . Pour cela, soit  $dx_1, dx_2$  la base canonique de  $H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ , on a alors

$$\left( \int_{\gamma_x} dx_1, \int_{\gamma_x} dx_2 \right) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}) - \tilde{x} \in \mathbb{R}^2$$

ce qui nous donne  $Sch(\Phi) = \int_M (\tilde{\varphi}(\tilde{x}) - \tilde{x})\omega$ , et donc en éliminant la dépendance vis-à-vis du choix de l'isotopie  $\Phi$  (et donc de  $\tilde{\varphi}$ ), on a

$$Sch(\varphi) = \int_M (\tilde{\varphi}(\tilde{x}) - \tilde{x})\omega \in \mathbb{T}^2$$

ce qui correspond bien à la notion de vecteur de rotation associé à la mesure  $\omega$ . Il est clair que cette expression a encore un sens si  $\varphi \in Homeo_0(\mathbb{T}^2)$  préserve une mesure.

On en déduit facilement que pour une surface fermée, si  $H^1(M)$  est non trivial (ie si  $M \neq S^2$ ), le groupe  $Diff_0^\infty(M, \omega)$  n'est pas simple, le noyau du morphisme de flux étant un sous-groupe distingué non trivial.

La question suivante est donc d'examiner de plus près le noyau de ce morphisme et de savoir si il est simple ou non.

## 3.2 Difféomorphismes hamiltoniens

On suppose encore que  $M$  est fermée. Soit  $\varphi \in \text{Diff}_0^\infty(M, \omega)$ , alors par définition il existe une isotopie  $t \mapsto \varphi^t$  dans  $\text{Diff}_0^\infty(M, \omega)$  tel que  $\varphi^0 = id$  et  $\varphi^1 = \varphi$ . Soit  $X_t$  le champ de vecteurs non autonome défini par  $\dot{\varphi}^t = X_t \circ \varphi^t$ . On sait que la 1-forme  $i_{X_t}\omega$  est fermée. Puisque  $\omega$  n'est rien d'autre qu'une forme symplectique, il est naturel de se demander si  $X_t$  est un gradient symplectique, ie si  $i_{X_t}\omega = dH_t$  avec  $H_t \in C^\infty(M)$ .

**Définition :** On dit qu'une isotopie est hamiltonienne si la 1-forme  $i_{X_t}\omega$  est exacte  $\forall t$ . Un élément  $\varphi \in \text{Diff}_0^\infty(M, \omega)$  est hamiltonien si il existe une isotopie hamiltonienne  $\Phi = (\varphi^t)_{t \in [0,1]}$  avec  $\varphi^1 = \varphi$ .

Fixons les notations. Soit  $H_t$  l'unique primitive de  $i_{X_t}\omega$  vérifiant  $\int_M H_t \omega = 0$  pour tout  $t$ , on dit que  $H = H(t, x)$  est la fonction hamiltonienne normalisée qui engendre l'isotopie hamiltonienne  $\Phi_H = (\varphi_H^t)_{t \in [0,1]}$  et le difféomorphisme hamiltonien  $\varphi = \varphi_H^1$ . On note  $\mathcal{A}$  le sous-espace vectoriel de  $C^\infty(M)$  constitué des fonctions de moyenne nulle, et

$$\mathcal{H} = \{H \in C^\infty(M \times [0, 1]) \mid \forall t H_t \in \mathcal{A}\}$$

l'espace des hamiltoniens normalisés.

Soit  $\text{Ham}(M, \omega)$  l'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens, que l'on munit de la topologie  $C^\infty$ . On va montrer que c'est un sous-groupe normal de  $\text{Diff}_0^\infty(M, \omega)$ , ce qui n'est à priori pas clair puisqu'il ne préserve aucune structure.

**Proposition :**  $\text{Ham}(M, \omega)$  est un sous-groupe normal de  $\text{Diff}_0^\infty(M, \omega)$ , connexe par arcs.

**Preuve :** Soit  $\Phi_H$  et  $\Psi_K$  des isotopies hamiltoniennes engendrées par les fonctions  $H, K \in \mathcal{H}$ , et  $\phi \in \text{Diff}_0^\infty(M, \omega)$ , on pose :

$$-(H \# K)(t, x) = H(t, x) + K(t, (\varphi_H^t)^{-1}(x))$$

$$-(\bar{H})(t, x) = -H(t, \varphi_H^t(x))$$

$$-(\phi^* H)(t, x) = H(t, \phi(x))$$

Les fonctions  $H\#K, \bar{H}$  et  $\phi^*H$  sont clairement dans  $\mathcal{H}$ . On a alors

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\varphi_H^t \circ \psi_K^t) &= \dot{\varphi}_H^t \circ \psi_K^t + (d\varphi_H^t \circ \psi_K^t) \cdot \dot{\psi}_K^t \\
 &= X_H \circ \varphi_H^t \circ \psi_K^t + (d\varphi_H^t \circ \psi_K^t) \cdot (X_K \circ \psi_K^t) \\
 &= X_H \circ \varphi_H^t \circ \psi_K^t + (d\varphi_H^t \circ (\varphi_H^t)^{-1} \circ \varphi_H^t \circ \psi_K^t) \cdot (X_K \circ (\varphi_H^t)^{-1} \circ \varphi_H^t \circ \psi_K^t) \\
 &= X_H \circ \varphi_H^t \circ \psi_K^t + X_{K \circ (\varphi_H^t)^{-1}} \circ \varphi_H^t \circ \psi_K^t \\
 &= X_{H+K \circ (\varphi_H^t)^{-1}} \circ \varphi_H^t \circ \psi_K^t
 \end{aligned}$$

On montre ainsi que  $H\#K$  engendre  $\Phi_H \cdot \Psi_K : t \mapsto \varphi_H^t \circ \psi_K^t$ . Un calcul similaire nous donne que  $\bar{H}$  engendre  $t \mapsto (\varphi_H^t)^{-1}$  et que  $\phi^*H$  engendre  $t \mapsto \phi \circ \varphi_H^t \circ \phi^{-1}$ . En prenant le temps 1 de ces isotopies, cela prouve que  $Ham(M, \omega)$  est un sous-groupe normal.

Pour la connexité par arcs, si  $\Phi_H$  est une isotopie hamiltonienne avec  $\varphi = \varphi_H^1$ , on vérifie facilement que chaque  $\varphi_H^s$  pour  $0 < s < 1$  est aussi un difféomorphisme hamiltonien pour le reparamétrage de  $H$  donné par  $H'_t = sH_{st}$ . Ceci termine la preuve.  $\square$

**Remarque.** On peut voir  $Diff^\infty(M)$  (resp.  $Diff^\infty(M, \omega)$ ) comme un groupe de Lie de dimension infinie, son algèbre de Lie s'identifiant à l'algèbre des champs de vecteurs (resp. à divergence nulle) munie du crochet de Lie entre champs de vecteurs.

Regardons ce qui se passe pour le groupe  $Ham(M, \omega)$ . Si l'on poursuit l'analogie, l'algèbre de Lie de  $Ham(M, \omega)$  est donc l'algèbre des champs de vecteurs hamiltoniens (autonome), ie les champs de vecteurs de la forme  $X_H$  tel que  $i_{X_H}\omega = dH$ , pour  $H \in C^\infty(M)$ . Cet espace est en bijection avec l'espace de fonctions  $\mathcal{A} = \{H \in C^\infty(M) \mid \int_M H\omega = 0\}$  : l'application  $X_H \mapsto H$  est surjective par définition et la normalisation nous assure l'injectivité. Le crochet de Lie dans  $\mathcal{A}$  n'est rien d'autre que le crochet de Poisson et il n'est pas difficile de vérifier que l'action adjointe de  $Ham(M, \omega)$  sur  $\mathcal{A}$  est l'action classique (à droite) des difféomorphismes sur les fonctions, à savoir  $H \mapsto H \circ \varphi$ . Cette description plus explicite de l'algèbre de Lie de  $Ham(M, \omega)$  nous sera utile dans la suite.

Donnons maintenant quelques exemples (voir [Po]).

**Exemple 1.** Le groupe  $H^1(S^2, \mathbb{R})$  est trivial, donc  $Ham(S^2, \omega) = Diff_0^\infty(S^2, \omega)$  ou  $\omega$  désigne la forme volume canonique de  $S^2$ .  $SO(3)$  agit par rotations sur  $S^2$ , donc  $SO(3) \hookrightarrow Ham(S^2, \omega)$ . On peut ainsi remarquer que l'action d'une rotation  $A = exp(a)$  avec  $a \in so(3)$  est donnée (de manière infinitésimale) par

l'action du gradient symplectique de la fonction hauteur  $H_a(x) = \langle a, x \rangle$  après identification  $so(3) \cong \mathbb{R}^3$ .

**Exemple 2.** Le groupe  $Ham(\mathbb{T}^2, \omega)$  est un sous-groupe propre de  $Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2, \omega)$ . Par exemple la translation  $(p, q) \mapsto (p + \alpha, q)$  avec  $\alpha$  irrationnel est dans  $Diff_0^\infty(\mathbb{T}^2, \omega)$  mais n'est pas hamiltonienne.

Soit  $\varphi$  un difféomorphisme hamiltonien temps 1 d'une isotopie  $\Phi_H$ , il est alors immédiat que  $[\Phi_H]$  est dans le noyau du morphisme de flux  $Flux : \widetilde{Diff}_0^\infty(M, \omega) \rightarrow H^1(M, \mathbb{R})$ . La réciproque est encore vraie (voir [MS] pour une preuve).

**Théorème.** Soit  $M$  une surface fermée. Alors le noyau du morphisme de flux est exactement le groupe des difféomorphismes hamiltoniens  $Ham(M, \omega)$ .

Avec des arguments analogues (mais plus techniques) à ceux utilisés pour la preuve de la simplicité du groupe  $Diff_0^\infty(M)$ , Banyaga a démontré le théorème suivant (voir [Ba]).

**Théorème (Banyaga).** Soit  $M$  une surface fermée. Le groupe  $Ham(M, \omega)$  est simple.

Pour une surface fermée  $M$ , la structure du groupe  $Diff_0^\infty(M, \omega)$  est donc bien comprise. Regardons alors ce qu'il en est des surfaces à bord.

### 3.3 Invariant de Calabi

On passe maintenant au cas des surfaces compactes orientables à bord. On s'intéresse à  $Diff^\infty(M, \partial M, \omega)$ , le groupe des difféomorphismes préservant l'aire et qui sont l'identité sur un voisinage du bord. On impose aux isotopies d'être à support compact inclus dans l'intérieur de  $M$ . Les difféomorphismes hamiltoniens sont définis de manière analogue, et on normalise la fonction hamiltonienne par  $H_{t|\partial M} = 0$  pour tout  $t$ . On a également les morphismes

$$Flux : Diff^\infty(M, \partial M, \omega) \rightarrow H^1(M, \partial M, \mathbb{R})/\Gamma$$

$$Sch : Diff^\infty(M, \partial M, \omega) \rightarrow H_1(M, \partial M, \mathbb{R})/\Gamma'$$

dont le noyau coïncide avec le groupe des difféomorphismes hamiltoniens. En revanche, on va voir que dans ce cas, le groupe des difféomorphismes hamiltoniens n'est pas simple.

Dans le cas du disque  $D^2$ , puisque son premier groupe de cohomologie est trivial, on a  $Diff^\infty(D^2, \partial D^2, \omega) = Ham(D^2, \partial D^2, \omega)$ . On va alors construire un morphisme de groupes, appelé invariant de Calabi

$$Cal : Ham(D^2, \partial D^2, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

Prenons  $\varphi \in Ham(D^2, \partial D^2, \omega)$ , et choisissons  $\lambda$  une primitive de la forme d'aire  $d\lambda = \omega$ . On vérifie facilement que la 1-forme  $\varphi^*\lambda - \lambda$  est fermée, donc exacte (d'ailleurs  $Flux(\Phi) = [\varphi^*\lambda - \lambda] = 0$ ). Soit  $h_{\varphi, \lambda}$  l'unique primitive de  $\varphi^*\lambda - \lambda$  qui s'annule sur le bord (par hypothèses,  $\varphi$  est l'identité sur un voisinage du bord donc une primitive de  $\varphi^*\lambda - \lambda$  est nécessairement constante sur le bord). On pose

$$Cal(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{D^2} h_{\varphi, \lambda} \omega$$

Si  $\lambda' = \lambda + df$  est une autre primitive, on vérifie que  $h_{\varphi, \lambda'} = h_{\varphi, \lambda} + f \circ \varphi - f$  de telle sorte que  $Cal(\varphi)$  ne dépende effectivement que de  $\varphi$ . Enfin en écrivant  $(\varphi_1 \varphi_2)^* - \lambda = \varphi_2^* \varphi_1^* \lambda + \varphi_1^* \lambda - \varphi_1^* \lambda - \lambda$ , on obtient  $h_{\varphi_1 \varphi_2, \lambda} = h_{\varphi_2, \varphi_1^* \lambda} + h_{\varphi_1, \lambda}$  et après intégration ceci montre que l'invariant de Calabi est un morphisme de groupes.

**Proposition.** L'application  $Cal : Ham(D^2, \partial D^2, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  est un morphisme de groupes.

Il reste maintenant à s'assurer que ce morphisme est non trivial. Pour cela, on va en donner une autre définition.

Prenons  $t \mapsto \varphi^t \in Diff_0^\infty(D^2, \partial D^2, \omega)$  une isotopie avec  $\varphi^1 = \varphi$ . On sait alors que cette isotopie est engendrée par une fonction hamiltonienne  $H_t : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposition.** On a  $Cal(\varphi) = \int_0^1 \int_{D^2} H_t \omega dt$ .

**Preuve.** Il s'agit de calculs avec les formes différentielles. Il faut prouver la relation suivante pour  $s = 1$

$$Cal(\varphi^s) = \int_0^s \int_{D^2} H_t \omega dt.$$

Puisque l'invariant de Calabi est un morphisme, il suffit de prouver cette relation pour un temps  $s$  arbitrairement petit, ie il suffit de prouver la relation

$$\frac{d}{ds} Cal(\varphi^s)|_{s=0} = \int_{D^2} H_0 \omega$$



Calculons le terme de gauche. On remarque que  $\frac{d}{ds}\varphi^s|_{s=0} = X_H$  n'est autre que le gradient symplectique de la fonction  $H = H_0$ . Puisque  $dh_{\varphi^s, \lambda} = \varphi^{s*}\lambda - \lambda$ , la dérivée en 0 donne alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(dh_{\varphi^s, \lambda})|_{s=0} &= \mathcal{L}_{X_H}\lambda \\ &= i_{X_H}d\lambda + di_{X_H}\lambda \\ &= d(H + i_{X_H}\lambda) \end{aligned}$$

puis après intégration on obtient

$$\frac{d}{ds}Cal(\varphi^s)|_{s=0} = \frac{1}{2} \int_{D^2} (H + i_{X_H}\lambda)$$

et il suffit donc de prouver que  $\int_{D^2}(i_{X_H}\lambda)\omega = \int_{D^2} H\omega$ .

La 3-forme  $\lambda \wedge \omega$  est nulle, donc  $i_{X_H}\lambda \wedge \omega = 0$ , donc  $i_{X_H}\lambda\omega = \lambda \wedge i_{X_H}\omega = \lambda \wedge dH$ , or puisque  $d(\lambda \wedge H) = H\omega - \lambda \wedge dH$ , on obtient finalement

$$\int_{D^2} (i_{X_H}\lambda)\omega = \int_{D^2} H\omega + \int_{\partial D^2} H\lambda$$

et la dernière intégrale est nulle puisque  $H$  est nulle près du bord.  $\square$

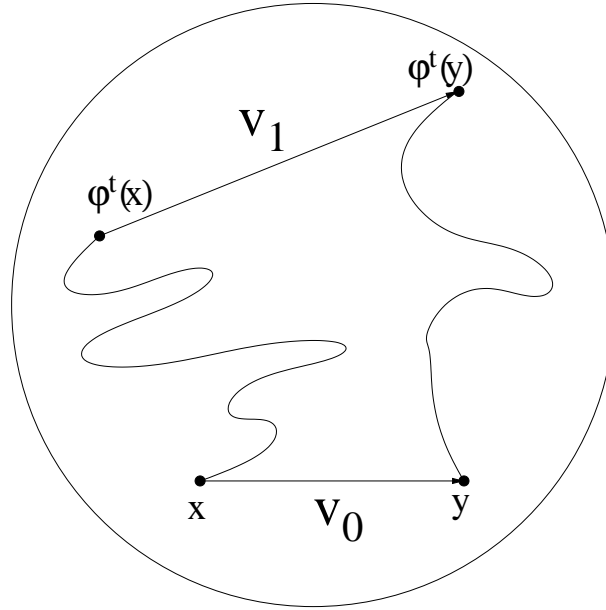
**Remarque.** Cette nouvelle expression permet de définir l'invariant de Calabi sur le revêtement universel du groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface à bord quelconque, puis d'obtenir un morphisme

$$Cal : Ham(M, \partial M, \omega) \longrightarrow \mathbb{R}/\Lambda$$

Ainsi  $Cal(\varphi)$  n'est autre que la valeur moyenne de la fonction  $H_t$ , où  $\varphi$  est le temps 1 de l'isotopie engendrée par  $H_t$  (ceci prouve au passage que la valeur moyenne de  $H_t$  ne dépend que de la classe d'homotopie  $[\varphi^t]$ ).

Le morphisme de Calabi est donc surjectif : il est facile de trouver un hamiltonien autonome dont la valeur moyenne est arbitraire.

L'invariant de Calabi est clairement continu si l'on muni  $Dif f_0^\infty(D^2, \partial D^2, \omega)$  de la topologie  $C^1$ . Une conséquence de la proposition précédente est que l'invariant de Calabi n'est plus continue pour la topologie  $C^0$  : on peut construire une suite de hamiltoniens autonome  $H_n : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de moyenne 1 et telles que la suite  $\varphi_{H_n}^1$  converge uniformément vers l'identité (voir [GG]).


 FIG. 3.2 – Variation angulaire de  $v_t$ 

Donnons enfin une dernière interprétation, plus visuelle, de l'invariant de Calabi. Prenons une isotopie  $\Phi = (\varphi^t)_{t \in [0,1]}$  avec  $\varphi^1 = \varphi$ . Soit  $x, y \in D^2$  deux points distincts, alors  $\varphi^t(x) \neq \varphi^t(y) \forall t$  et on obtient un vecteur non nul  $v_t = \varphi^t(y) - \varphi^t(x)$ . Posons  $Ang_\varphi(x, y)$  la variation angulaire de  $v_t$  lorsque  $t$  varie entre 0 et 1 (voir la figure 3.2). On peut montrer que cela ne dépend pas du choix de  $\Phi$  (essentiellement parce que le groupe  $Diff_0^\infty(D^2, \partial D^2, \omega)$  est contractile) et que l'on a

$$Cal(\varphi) = \int_{D^2 \times D^2} Ang_\varphi(x, y) \omega^2$$

A priori, cette construction n'utilise pas de différentiabilité et on serait donc tenté de l'étendre aux homéomorphismes. Cependant, la fonction  $Ang_\varphi$  est définie et continue sur le complémentaire de la diagonale  $D^2 \times D^2 - \Delta$ , et si  $\varphi$  est seulement un homéomorphisme, la fonction  $Ang_\varphi$  n'est plus nécessairement intégrable.

Ainsi  $Diff_0^\infty(D^2, \partial D^2, \omega)$  n'est pas un groupe simple car le noyau de l'invariant de Calabi, constitué des difféomorphismes hamiltoniens engendrés par des fonctions hamiltoniennes de moyenne nulle, est un sous-groupe normal propre. Signalons qu'un autre théorème de Banyaga affirme que le noyau de ce second invariant de Calabi est aussi simple (voir [Ba]).

**Théorème (Banyaga).** Soit  $M$  une surface compacte à bord. Alors le noyau de l'invariant de Calabi

$$Cal : Ham(M, \partial M, \omega) \longrightarrow \mathbb{R}/\Lambda$$

est un groupe simple.

*CHAPITRE 3. GROUPE DE DIFFÉOMORPHISMES CONSERVATIFS*42

# Chapitre 4

## Métrieque de Hofer

Dans ce chapitre, on poursuit l'étude du groupe des difféomorphismes hamiltoniens. Plus précisément, on y introduit une métrieque bi-invariante appelé métrieque de Hofer. Elle est liée à un certain invariant symplectique, la capacité de Hofer-Zehnder, qui trouve son origine dans la recherche d'orbites périodiques pour les systèmes hamiltoniens.

Cependant, le but de ce chapitre est seulement de donner quelques définitions et propriétés élémentaires de la métrieque de Hofer dont on aura besoin dans le chapitre suivant.

Pour cette partie, on pourra consulter les références [MS], [HZ] et [Po].

### 4.1 Distances bi-invariantes sur $Ham(M, \omega)$

Soit  $\varphi$  un difféomorphisme hamiltonien. Si l'on considère  $\varphi$  comme un « mouvement mécanique », une question naturelle est alors de savoir quelle est l'« énergie minimale » nécessaire pour engendrer  $\varphi$ .

Par définition, il existe un hamiltonien  $H \in \mathcal{H}$  qui engendre une isotopie  $\Phi_H = (\varphi_H^t)_{t \in [0,1]}$  avec  $\varphi_H^1 = \varphi$ . Choisissons une norme  $\|\cdot\|$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{A}$ . Cela permet de mesurer l'« énergie » d'un hamiltonien  $H$  par  $\int_0^1 \|H_t\| dt$ . On définit alors l'« énergie » de  $\varphi$  par

$$E(\varphi) = \inf \left\{ \int_0^1 \|H_t\| dt \mid \varphi_H^1 = \varphi, H \in \mathcal{H} \right\}$$

et ceci permet de donner une réponse à la question posée.

On peut considérer l'énergie de  $\varphi$  comme une distance à l'identité, et en décrétant l'invariance à gauche, on obtient une application

$$d : Ham(M, \omega) \times Ham(M, \omega) \rightarrow [0, +\infty]$$

définie par

$$d(\psi, \varphi) = d(1, \psi^{-1}\varphi) = E(\psi^{-1}\varphi)$$

Voici une autre manière de comprendre cette distance  $d(\psi, \varphi)$ .

On rappelle qu'une structure de Finsler sur une variété  $N$  est la donnée, pour tout  $x \in N$ , d'une norme  $\|\cdot\|_x$  sur  $T_x N$  qui dépend de manière lisse du point  $x$  (c'est donc une notion un peu plus générale que celle de métrique riemannienne). Maintenant, si l'on considère  $Ham(M, \omega)$  comme un groupe de Lie,  $\mathcal{A}$  s'identifie à son espace tangent à l'identité et la norme  $\|\cdot\|$  s'étend par invariance à gauche en une structure de Finsler sur  $Ham(M, \omega)$ . Comme dans le cas riemannien, on peut ainsi définir la longueur des courbes dans  $Ham(M, \omega)$  (en particulier,  $\int_0^1 \|H_t\| dt$  n'est rien d'autre que la longueur de la courbe  $t \mapsto \varphi_H^t$ ) puis définir la distance  $d(\psi, \varphi)$  comme la longueur minimale d'une courbe reliant  $\psi$  et  $\varphi$ .

Pour les groupes de Lie de dimension finie, il est toujours plus utile d'avoir un distance bi-invariante. On sait que cela revient à demander l'invariance de  $\|\cdot\|$  sous l'action adjointe, dans notre cas on veut donc  $\|H\| = \|H \circ \phi\| \forall \phi \in Ham(M, \omega)$ . Remarquons qu'une telle propriété impose ici un sévère restriction sur le choix de  $\|\cdot\|$ , à savoir la nature  $C^0$  de  $\|H\|$ , qui ne doit pas faire intervenir de dérivés de  $H$ .

Il n'est alors pas difficile de vérifier les propriétés suivantes.

**Proposition.** L'application  $d : Ham(M, \omega) \times Ham(M, \omega) \rightarrow [0, +\infty]$  ainsi définie vérifie les propriétés suivantes, pour tout  $\varphi, \psi, \phi \in Ham(M, \omega)$  :

- (i)  $\varphi = \psi \implies d(\varphi, \psi) = 0$
- (ii)  $d(\varphi, \psi) = d(\psi, \varphi)$
- (iii)  $d(\varphi, \theta) \leq d(\varphi, \psi) + d(\psi, \theta)$
- (iv)  $d(\varphi, \psi) = d(\theta\varphi\theta^{-1}, \theta\psi\theta^{-1})$ .

En particulier,  $d$  définit seulement une pseudo-distance sur  $Ham(M, \omega)$ , on ne peut pas dire de manière générale si  $d$  est non dégénérée, ie si

$$d(\varphi, \psi) = 0 \implies \varphi = \psi.$$

Cela va dépendre du choix de  $\|\cdot\|$  sur  $\mathcal{A}$ . Voici deux exemples que l'on étudiera plus en détail par la suite :

(1) la norme  $L^p$ ,  $p < \infty$  définie par

$$\|H\|_p = \left( \int_M |H(x)|^p \omega(x) \right)^{1/p}$$

(2) la norme  $L^\infty$ , ou norme d'oscillation

$$\|H\|_\infty = \sup_{x \in M} H(x) - \inf_{x \in M} H(x)$$

On note  $d_p$  et  $d_\infty$  les pseudo-distances définies par ces normes. La pseudo-distance  $d_\infty$  est appelé métrique de Hofer. On verra par la suite qu'elle est effectivement non dégénérée, ce qui n'est pas le cas de  $d_p$ .

Associée à la norme  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathcal{A}$ , on définit la norme de Hofer d'un hamiltonien  $H \in \mathcal{H}$  par

$$\|H\|_{\text{Hofer}} = \int_0^1 (\sup_{x \in M} H_t(x) - \inf_{x \in M} H_t(x)) dt$$

de telle sorte que  $d_\infty(1, \varphi) = \inf\{\|H\|_{\text{Hofer}} \mid \varphi_H^1 = \varphi, H \in \mathcal{H}\}$ .

On aurait pu choisir d'autres normes sur  $\mathcal{H}$ , comme par exemple

$$\|H\| = \left( \sup_{(x,t) \in M \times [0,1]} H_t(x) - \inf_{(x,t) \in M \times [0,1]} H_t(x) \right)$$

qui était la définition originale de Hofer, ou bien encore

$$\|H\| = \sup_{t \in [0,1]} (\sup_{x \in M} H_t(x) - \inf_{x \in M} H_t(x))$$

mais toutes deux fournissent des distances équivalentes.

Dans la suite, on écrira simplement  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\text{Hofer}}$  pour la norme de Hofer.

**Remarque.** Pour  $d$  une pseudo-distance bi-invariante sur  $Ham(M, \omega)$ , on considère  $H = \{\varphi \in Ham(M, \omega) \mid d(1, \varphi) = 0\}$ . Par les propriétés d'invariances de  $d$ , il est immédiat que  $H$  est un sous-groupe normal de  $Ham(M, \omega)$ . Si  $M$  est fermée,  $Ham(M, \omega)$  est simple par un théorème de Banyaga, donc  $H = 1$  ou  $H = Ham(M, \omega)$ . En particulier pour prouver la non dégénérescence de  $d$  sur une variété fermée donnée, il suffirait seulement d'exhiber un difféomorphisme non trivial  $\varphi$  vérifiant  $d(1, \varphi) > 0$ .

## 4.2 Énergie de déplacement et non dégénérescence.

On s'intéresse à la non dégénérescence d'une pseudo-distance bi-invariante  $d$  sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens  $Ham(M, \omega)$ .

Pour cela, on introduit la notion d'énergie de déplacement d'une partie  $A \subseteq M$ , définie par

$$e_d(A) = \begin{cases} \inf\{d(1, \varphi)\} & \text{si il existe } \varphi \text{ tel que } \varphi(A) \cap A = \emptyset \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

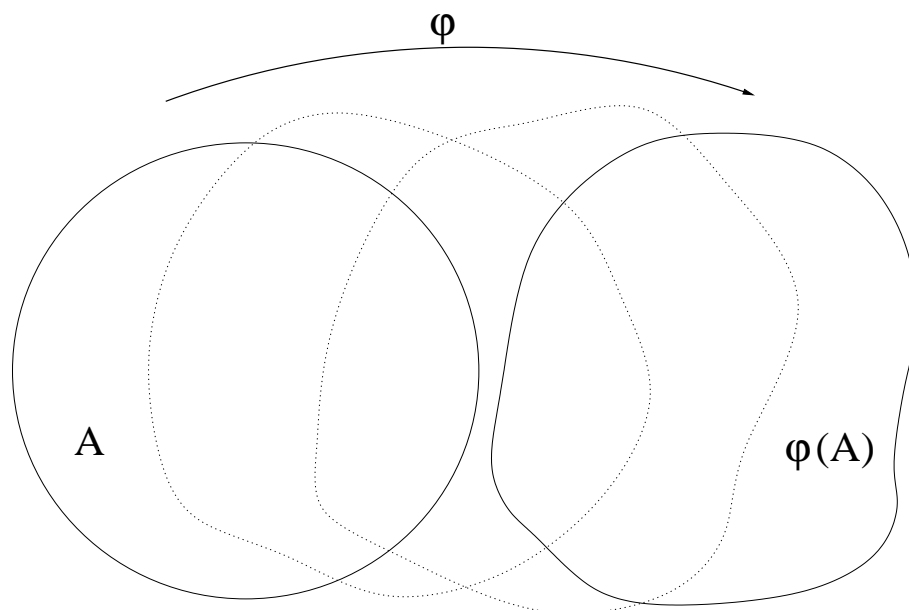


FIG. 4.1 – Energie de déplacement.

Cette quantité représente donc l'énergie minimale nécessaire pour déformer  $A$  par un difféomorphisme hamiltonien en un ensemble qui lui soit disjoint, d'où le terme énergie de déplacement (voir la figure 4.1). L'intérêt de cette notion réside dans le théorème suivant.

**Théorème.** La pseudo-distance  $d$  est non dégénérée si et seulement si  $e_d(A) > 0$  pour tout ouvert  $A$  non vide.

**Preuve.** Supposons que  $e_d$  charge les ouverts non vides. Si  $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$  est différent de l'identité, il existe  $x \in M$  tel que  $\varphi(x) \neq x$  et alors par continuité  $\varphi$  déplace une petite boule  $A$  centrée en  $x$ , on a ainsi  $d(1, \varphi) \geq e_d(A) > 0$  et donc  $d$  est non dégénérée.

Pour la réciproque, on procède en deux étapes.

*Assertion 1.* Soit  $A$  un ouvert non vide, il existe  $\varphi, \psi \in \text{Ham}(M, \omega)$  à support dans  $A$  telles que  $\varphi\psi \neq \psi\varphi$ .

Commençons par remarquer que si deux hamiltoniens autonomes  $H$  et  $K$  engendrent des flots qui commutent, alors  $\{H, K\} = 0$ . Soit  $x \in A$ , choisissons deux vecteurs  $\xi, \eta \in T_x A$  tels que  $\omega(\xi, \eta) \neq 0$ . En prenant des coordonnées symplectiques au voisinage de  $x$ , on trouve deux germes de fonctions  $H$  et  $K$  vérifiant  $X_H(x) = \xi$  et  $X_K(x) = \eta$ , puis on étend ces fonctions sur  $M$



par une fonction plateau. Quitte à ajouter une constante pour normaliser, on trouve des hamiltoniens qui vérifient  $\{H, K\} \neq 0$ , donc leur flots, qui sont à support dans  $A$ , ne commutent pas. Ceci prouve l'assertion.

*Assertion 2.* Soit  $A$  un ouvert non vide,  $\varphi, \psi \in \text{Ham}(M, \omega)$ , alors on a  $e_d(A) \geq 1/4 d(1, [\varphi, \psi])$ .

Le théorème est alors une conséquence immédiate de ces deux assertions. Il nous reste donc à démontrer cette seconde assertion. On peut supposer  $e_d(A) < \infty$  (sinon l'inégalité serait triviale), il existe alors  $h \in \text{Ham}(M, \omega)$  qui déplace  $A$ . Notons  $\theta = [\varphi, h^{-1}]$ . On peut alors vérifier que  $[\varphi, \psi] = [\theta, \psi]$ . Ainsi

$$\begin{aligned} d(1, [\varphi, \psi]) &= d(1, [\theta, \psi]) \\ &= d(\theta^{-1}, \psi\theta\psi^{-1}) \\ &\leq d(1, \theta^{-1}) + d(1, \psi\theta\psi^{-1}) \\ &= 2d(1, \theta) \\ &\leq 4d(1, h) \end{aligned}$$

En minimisant sur les  $h$  qui déplace  $A$ , on obtient l'inégalité voulue.  $\square$

Ce théorème va nous être fort utile pour étudier la dégénérescence ou non des pseudo-distances  $d_\infty$  et  $d_p$ .

Commençons par évoquer la non dégénérescence de la métrique de Hofer.

**Théorème.** On a  $e_{d_\infty}(A) > 0$  pour tout ouvert  $A$  non vide. La métrique de Hofer est donc non dégénérée.

Ce théorème est très difficile, et il semble que les preuves existantes restent encore mal comprises (voir la discussion dans [Po]). On le doit à Hofer dans le cas  $M = \mathbb{R}^{2n}$  (voir [HZ]) et à Lalonde-McDuff dans le cas général (voir [MS]).

Notons une conséquence immédiate de ce théorème, qui sera fondamentale dans la suite pour définir une notion d'homéomorphisme hamiltonien.

**Corollaire.** Soit  $H_i, H \in \mathcal{H}$  des hamiltoniens lisses, et  $\varphi$  un homéomorphisme. On fait les hypothèses suivantes :

(i)  $\|H_i - H\| \rightarrow 0$  pour la norme de Hofer dans  $\mathcal{H}$

(ii)  $\varphi_{H_i}^1 \rightarrow \varphi$  pour la norme  $C^0$

Alors  $\varphi = \varphi_H^1$ .

**Preuve.** Par l'absurde, supposons que  $\varphi \neq \varphi_H^1$ , et posons  $\psi = \varphi_H^1 \varphi^{-1}$ . Ainsi  $\psi \neq 1$ , donc on peut trouver une petite boule  $A$  telle que  $A \cap \psi(A) = \emptyset$ . Puisque  $\psi$  est limite uniforme de  $\psi_i = \varphi_{H_i}^1 \varphi^{-1}$ , on a  $A \cap \psi_i(A) = \emptyset$  pour  $i$  suffisamment grand. On a donc d'une part

$$d_\infty(1, \psi_i) \geq e_{d_\infty}(A) > 0$$

et d'autre part

$$d_\infty(1, \psi_i) \leq \|H_i - H\| \longrightarrow 0$$

ce qui est absurde.  $\square$

Enfin terminons cette partie par l'étude des pseudo-distances  $d_p$ , définies par  $d_p(1, \varphi) = \inf\{\int_0^1 (\int_M |H_t|^p \omega)^{1/p} dt \mid \varphi_H^1 = \varphi, H \in \mathcal{H}\}$ .

**Théorème (Eliashberg-Polterovich).** La pseudo-distance  $d_p$  est dégénérée pour tout  $p$  finie. De plus, si  $M$  est fermée, alors  $d_p$  est identiquement nulle.

**Preuve.** Soit  $A$  une boule suffisamment petite plongée dans  $M$ . En prenant des coordonnées symplectiques au voisinage de  $A$ , on trouve un flot hamiltonien « horizontal » qui déplace  $A$ , ie il existe un hamiltonien autonome  $H \in C^\infty(M)$  telle que  $\varphi_H^1(A) \cap A = \emptyset$ . Posons  $S_t = \varphi_H^t(\partial A)$ , et soit  $U_t$  un voisinage de  $S_t$  (voir figure 4.2). A l'aide d'une fonction plateau, on construit  $K \in C^\infty(M \times [0, 1])$  qui vérifie

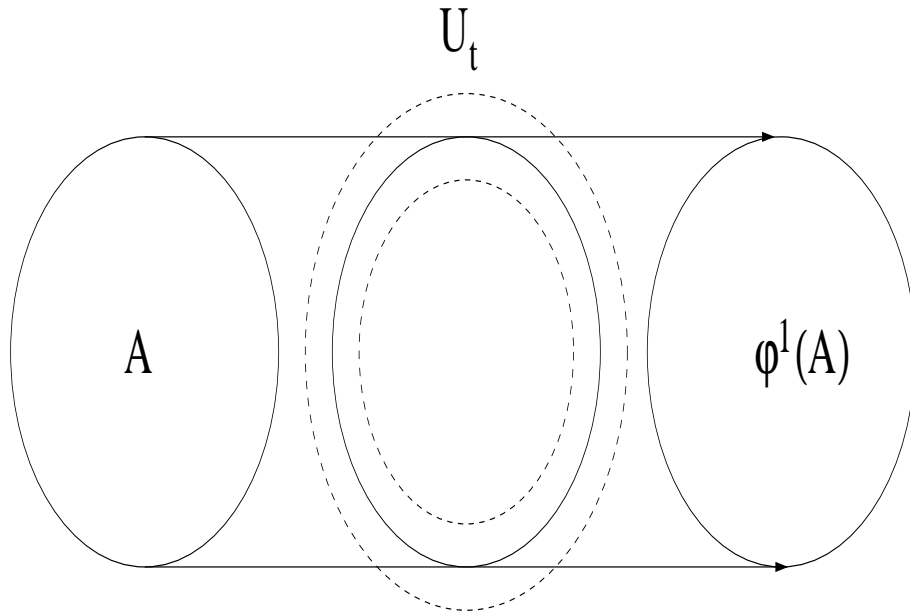
$$K_t = \begin{cases} H & \text{sur } S_t \\ 0 & \text{sur } M - U_t \end{cases}$$

Quitte à rajouter une constante  $c_t$  pour normaliser, on suppose que  $K \in \mathcal{H}$ . Notons  $\psi_K^1$  le difféomorphisme hamiltonien engendré par  $K$ . Puisque  $K$  coïncide avec  $H$  sur  $S_t$ , il est immédiat que  $\psi_K^1(A) \cap A = \emptyset$ .

En prenant des voisinages  $U_t$  arbitrairement petits, on peut s'assurer que la norme  $\|K\|_p = \int_0^1 (\int_{U_t} |K_t|^p \omega)^{1/p} dt$  soit aussi petite que l'on veut. Ainsi  $e_{d_p}(A) = 0$ , ce qui prouve la dégénérescence de la métrique  $d_p$ .

Enfin, si  $M$  est fermée, la dernière conclusion résulte du théorème de Banyaga.  $\square$

**Remarque.** Dans le cas du disque  $D^2$  (ou plus généralement d'une variété symplectique non fermée), si on note  $G_p = \{\varphi \in Ham(D^2, \partial D^2, \omega) \mid d_p(1, \varphi) = 0\}$ , le second théorème de Banyaga permet aussitôt de conclure que  $G_p$

FIG. 4.2 – Construction de la fonction  $K_t$ .

contient le noyau du morphisme de Calabi. Un autre résultat d'Eliashberg-Polterovich nous donne la relation suivante

$$d_p(1, \varphi) = \text{vol}(M)^{\frac{1-p}{p}} |\text{Cal}(\varphi)|$$

avec les conventions  $(+\infty)^0 = 1$  et  $(+\infty)^{-c} = 0$ .



# Chapitre 5

## Groupe d'homéomorphismes conservatifs

Soit  $M$  une surface,  $\mu$  une mesure borélienne de masse 1 sur  $M$ . On dit qu'une application continue  $g : M \rightarrow M$  préserve la mesure si pour tout borélien  $A$ , on a  $\mu(A) = \mu(g^{-1}(A))$ , ie si  $\mu = g_*\mu$  où  $g_*\mu$  désigne la mesure image.

On note  $Homeo(M, \mu)$  le groupe des homéomorphismes préservant la mesure, et dans le cas à bord,  $Homeo(M, \partial M, \mu)$  le groupe des homéomorphismes qui sont l'identité sur un voisinage du bord, et préservant une mesure qui ne charge pas le bord.

Précisons tout de suite quelle type de mesure on va considérer. On dit qu'une mesure est bonne si elle n'a pas d'atomes et si elle charge les ouverts non vides. Par un théorème de Von Neumann-Oxtoby-Ulam (voir [Fa]), si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont deux telles mesures sur une variété compacte, il existe alors un homéomorphisme  $h$  tel que  $h_*\mu_1 = \mu_2$ . Ainsi les propriétés algébriques et topologiques du groupe  $Homeo(M, \mu)$  ne dépendent pas du choix d'une bonne mesure  $\mu$ . En pratique, on se fixe une forme volume lisse  $\omega$ , et on prend la mesure d'aire  $\mu(A) = \int_A \omega$ , qui vérifie clairement les hypothèses. On notera parfois  $Homeo(M, \omega)$  les homéomorphismes préservant l'aire.

Le but de chapitre est d'étudier la simplicité des groupes  $Homeo_0(M, \omega)$  et  $Homeo(M, \partial M, \omega)$ .

### 5.1 Invariant de Fathi.

Pour simplifier, on considère  $M$  une surface fermée. Rappelons que pour le groupe  $Diff_0^\infty(M, \omega)$ , nous avons construit un morphisme surjectif  $Sch : Diff_0^\infty(M, \omega) \rightarrow H_1(M, \mathbb{R})/\Gamma'$  qui avait permis de conclure à la non-simplicité

du groupe  $Diff_0^\infty(M, \omega)$  lorsque le  $H_1(M, \mathbb{R})$  est non trivial.

Nous allons exposer maintenant une construction de A. Fathi (voir [Fa]), qui généralise ce morphisme au groupe  $Homeo(M, \mu)$ , qu'il appelle morphisme de « flot de masse ».

Comme pour le morphisme de flux, on commence par le définir sur le revêtement universel  $\widetilde{Homeo}_0(M, \mu)$ . Notons  $[M, S^1]$  l'ensemble des classes d'homotopies d'applications de  $M$  dans  $S^1$ . Alors  $[M, S^1]$  a clairement une structure de groupe abélien et on a un isomorphisme  $Hom([M, S^1], \mathbb{R}) \cong H_1(M, \mathbb{R})$ .

Prenons donc  $[\Phi] \in \widetilde{Homeo}_0(M, \omega)$  et  $[f] \in [M, S^1]$ . Alors  $h_t = f\varphi^t - f : M \rightarrow S^1$  est une homotopie entre  $h_0 = 0$  et  $h_1 = f\varphi^1 - f$ .

Par la théorie des revêtements, il existe une unique homotopie  $\overline{h_t} = \overline{f\varphi^t - f} : M \rightarrow \mathbb{R}$  qui relève  $h_t$  et qui vérifie  $\overline{h_0} = 0$ . On pose finalement

$$\Theta(\Phi).f = \int_M \overline{f\varphi^1 - f} d\mu$$

**Théorème (Fathi).** On obtient ainsi un morphisme de groupes

$$\Theta : \widetilde{Homeo}_0(M, \mu) \longrightarrow H_1(M, \mathbb{R})$$

**Preuve.** Il y a plusieurs vérifications à faire. Soit  $f, g \in C^0(M, S^1)$ , alors on a l'égalité

$$(f + g)\varphi^t - (f + g) = (f\varphi^t - f) + (g\varphi^t - g)$$

qui passe aux relèvements

$$\overline{(f + g)\varphi^1 - (f + g)} = \overline{(f\varphi^1 - f)} + \overline{(g\varphi^1 - g)}$$

donc  $\Theta(\Phi) : C^0(M, S^1) \longrightarrow \mathbb{R}$  est un morphisme de groupes par linéarité de l'intégrale.

Montrons maintenant que  $\Theta(\Phi)$  est bien définie sur  $[M, S^1]$ . Prenons  $f : M \rightarrow S^1$  homotope à une constante, et soit  $\bar{f}$  le relevé de  $f$  obtenu en relevant l'homotopie. On a alors  $\overline{f\varphi^t - f} = \bar{f}\varphi^t - \bar{f}$ , et donc

$$\Theta(\Phi).f = \int_M \bar{f}\varphi^1 d\mu - \int_M \bar{f} d\mu = 0$$

Ainsi  $\Theta(\Phi) \in Hom([M, S^1], \mathbb{R}) \cong H_1(M, \mathbb{R})$ .

Vérifions que  $\Theta : \widetilde{Homeo}_0(M, \mu) \longrightarrow H_1(M, \mathbb{R})$  est bien définie. Soit  $\Psi = (\psi^t)_{t \in [0,1]}$  homotope à  $\Phi$ , ie il existe  $H_s^t$  tel que  $H_0^t = \psi^t$  et  $H_1^t = \varphi^t$ . On dispose

alors d'une famille à deux paramètres  $fH_s^t - f$  qui se relève en  $\overline{fH_s^t - f}$  et on obtient ainsi  $\overline{f\varphi^1 - f} = \overline{f\psi^1 - f}$ , ce qui prouve que  $\Theta(\Phi)$  ne dépend que de  $[\Phi]$ .

Enfin, il reste à prouver que  $\Theta : \widetilde{Homeo_0}(M, \mu) \longrightarrow H_1(M, \mathbb{R})$  est bien un morphisme, ce qui résulte facilement de l'égalité

$$f\varphi^t\phi^t - f = (f\varphi^t - f)\phi^t + (f\phi^t - f)$$

et du fait que  $\phi^1$  préserve  $\mu$ .  $\square$

En notant  $\Gamma' = \Theta(\pi_1(Homeo_0(M, \mu))) \subseteq H_1(M, \mathbb{R})$ , on obtient un morphisme

$$\Theta : Homeo(M, \mu) \longrightarrow H_1(M, \mathbb{R})/\Gamma'$$

Avec un peu plus de travail, on pourrait également montrer que  $\Theta$  est surjectif et continue.

Vérifions maintenant que l'invariant de Fathi restreint au groupe  $Dif_0^\infty(M, \omega)$  coïncide avec l'invariant de Schwartzman introduit dans le chapitre 3.

Comparons les deux expressions :

$$Sch(\Phi).\alpha = \int_M \left( \int_{\gamma_x} \alpha \right) \omega$$

$$\Theta(\Phi).f = \int_M \overline{f\varphi^1 - f} d\mu$$

Prenons donc  $\sigma$  une forme volume sur  $S^1$ , il faut ainsi prouver

$$\int_{\gamma_x} f^* \sigma = \int_0^1 f^* \sigma(X_s(\varphi^s(x))) ds = \overline{f\varphi^1(x) - f(x)}$$

ie il faut montrer

$$\overline{f\varphi^t - f} = \int_0^t f^* \sigma(X_s \circ \varphi^s) ds$$

D'une part, les expressions coïncident en  $t = 0$ .

D'autre part, on a pour  $x$  fixé

$$\begin{aligned} f^* \sigma(X_s(\varphi^s(x))) &= f^* \sigma\left(\frac{d}{ds} \varphi^s(x)\right) \\ &= \sigma\left(\frac{d}{ds} (f \circ \varphi^s)(x)\right) \end{aligned}$$

Ainsi l'application  $t \mapsto \int_0^t f^* \sigma(X_s(\varphi^s(x))) ds$  est bien un relevé de  $t \mapsto f\varphi^t(x) - f(x)$  qui s'annule en 0, donc  $\Theta(\Phi) = Sch(\Phi)$ .

**Exemple.** Prenons  $M = \mathbb{T}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^2$  et considérons le flot d'un champs de vecteurs constant  $\varphi^t(x) = x + t\alpha$ .

On a l'identification  $Hom([\mathbb{T}^2, S^1], \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$  : en effet, un élément de  $[\mathbb{T}^2, S^1]$  est représenté par une fonction  $f = f_{a_1, a_2} : (z_1, z_2) \mapsto a_1 z_1 + a_2 z_2$  avec  $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ , donc tout élément de  $Hom([\mathbb{T}^2, S^1], \mathbb{R})$  est de la forme  $f_{a_1, a_2} \mapsto a_1 x_1 + a_2 x_2$  pour un certain  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Dans ces conditions, on vérifie sans difficulté que  $\Theta(\Phi) = \alpha$ , ce qui correspond bien évidemment au vecteur de rotation.

**Remarque.** Si  $\Phi$  est un flot, une application du théorème ergodique de Birkhoff analogue à celle du chapitre 3 nous donne la relation suivante

$$\Theta(\Phi).f = \int_M \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \overline{(f\varphi^t - f)} d\mu$$

où la limite existe pour  $\mu$ -presque tout  $x \in M$ .

Dans le cas où  $M = S^2$ , le premier groupe d'homologie est trivial donc cet invariant ne nous renseigne en rien sur la structure algébrique de  $Homeo(S^2, \mu)$ . En revanche, pour les surfaces de genre supérieurs, le noyau  $Ker(\Theta)$  forme un sous-groupe normal non trivial de  $Homeo(M, \mu)$ , par conséquent ce dernier n'est pas simple.

Il est alors naturel de s'intéresser à la structure de  $Ker(\Theta)$ , ce qui inclus en particulier le cas du groupe  $Homeo(S^2, \mu)$ .

En dimension  $n \geq 3$ , on a le résultat suivant de Fathi ([Fa]).

**Théorème (Fathi).** Pour  $n \geq 3$ , le groupe  $Ker(\Theta)$  est simple.

En revanche, dans le cas qui nous intéresse, à savoir  $n = 2$ , le problème reste ouvert.

On va alors tenter une autre approche dans la section suivante.

## 5.2 Homéomorphismes hamiltoniens

Rappelons que dans le cas lisse, on a identifié le noyau du morphisme de flux

$$Flux : Diff_0^\infty(M, \omega) \rightarrow H^1(M, \mathbb{R})/\Gamma$$

au sous-groupe des difféomorphismes hamiltoniens, que l'on sait simple par un théorème de Banyaga.

Puisque l'invariant de fathi est une extension (à dualité près) du morphisme



de Flux et que l'on cherche à comprendre la structure algébrique du groupe  $Ker(\Theta)$ , il est donc naturel de tenter de définir un groupe d'homéomorphismes hamiltoniens pour le comparer à  $Ker(\Theta)$ , puis éventuellement d'en étudier les propriétés algébriques.

Une première idée serait tout simplement de prendre l'adhérence de  $Ham(M, \omega)$  dans  $Homeo_0(M, \omega)$  pour la topologie  $C^0$ . Cependant, dans le cas de la sphère  $S^2$  par exemple, on a  $Ham(S^2, \omega) = Diff_0^\infty(S^2, \omega)$  et l'on sait qu'en dimension 2, on peut approcher tout élément de  $Homeo(M, \omega)$  par des difféomorphismes préservant l'aire, donc par ce procédé on obtiendrait alors tout le groupe  $Homeo_0(M, \omega)$ .

Une autre idée, motivée par la nature  $C^0$  de la métrique de Hofer, consisterait alors à compléter le groupe  $Ham(M, \omega)$  vis-a-vis de cette métrique, ie à prendre des classes de suites de Cauchy d'éléments de  $Ham(M, \omega)$  pour la métrique de Hofer. Le souci de taille auquel on est rapidement confronté est de ne pas pouvoir représenter chaque classe par un homéomorphisme, ie on sort du groupe  $Homeo(M, \omega)$  (voir [Oh]).

On va alors chercher un compromis entre ces deux idées. Avant cela, rappelons le résultat suivant qui est une conséquence immédiate de la non dégénérescence de la métrique de Hofer.

**Théorème.** Soit  $H_i, H \in \mathcal{H}$  des hamiltoniens lisses, et  $\varphi$  un homéomorphisme.

On fait les hypothèses suivantes :

(i)  $\|H_i - H\| \rightarrow 0$  pour la norme de Hofer dans  $\mathcal{H}$

(ii)  $\varphi_{H_i}^1 \rightarrow \varphi$  pour la norme  $C^0$

Alors  $\varphi = \varphi_H^1$ .

Ainsi la topologie « produit » entre la topologie  $C^0$  et la topologie de Hofer sur  $Ham(M, \omega)$  nous donne une topologie intéressante.

Cependant, pour définir correctement une notion d'homéomorphisme hamiltonien et en faire un groupe, il va d'abord falloir raisonner sur l'espace des isotopies hamiltoniennes pour définir des isotopies hamiltoniennes topologiques. Commençons par préciser ce que l'on entend par topologie « produit » entre la topologie  $C^0$  et la topologie de Hofer, et introduisons à cet effet la notion de distance hamiltonienne.

**Définition.** Soit  $\Phi_H, \Psi_K$  deux isotopies hamiltoniennes engendrés par les fonctions  $H, K \in \mathcal{H}$ . On définit leur distance hamiltonienne par

$$d_{Ham}(\Phi_H, \Psi_K) = \bar{d}(\Phi_H, \Psi_K) + \|H - K\|$$

où  $\bar{d}(\Phi_H, \Psi_K) = \sup_{t \in [0,1]} d_{C^0}(\varphi_H^t, \psi_K^t)$

**Remarque** En prenant le temps 1 des isotopies, on définit de manière analogue une distance hamiltonienne sur le groupe  $Ham(M, \omega)$ . On peut d'ailleurs montrer que munie de cette topologie, le groupe  $Ham(M, \omega)$  reste un groupe topologique connexe par arcs.

On peut alors maintenant définir l'ensemble des isotopies hamiltoniennes topologiques en complétant l'espace des isotopies hamiltoniennes (lisses) par rapport à la distance hamiltonienne, puis définir les homéomorphismes hamiltoniens comme temps 1 d'isotopies hamiltoniennes topologiques.

Voici des définitions formelles.

**Définition.** Soit  $\Phi = (\varphi^t)_{t \in [0,1]}$  une isotopie dans  $Homeo(M)$ . On dit que  $\Phi$  est un isotopie hamiltonienne topologique si il existe une suite de hamiltoniens lisses  $H_i \in \mathcal{H}$  qui vérifie les deux conditions suivantes :

$$(i) \bar{d}(\Phi_{H_i}, \Phi) \longrightarrow 0$$

$$(ii) \|H_i - H_j\| \longrightarrow 0$$

Dans ce cas, on dit que  $\varphi = \varphi^1$  est un homéomorphisme hamiltonien, et on note  $Hameo(M, \omega)$  l'ensemble des homéomorphismes hamiltoniens.

Notons  $L^{1,\infty}$  le complété de  $\mathcal{H}$  pour la norme de Hofer. La suite  $H_i$  est de Cauchy pour la norme de Hofer sur  $\mathcal{H}$ , elle admet donc une limite  $H \in L^{1,\infty}$ , non nécessairement lisse, qui joue le rôle de fonction hamiltonienne pour  $\varphi$ . En particulier on a

$$d_{Ham}(\Phi_{H_i}, \Phi) = \bar{d}(\Phi_{H_i}, \Phi) + \|H_i - H\| \longrightarrow 0$$

**Remarque.** On a alors automatiquement  $\varphi^t \in Homeo(M, \omega)$  pour tout  $t$ , car les  $\varphi^t$  sont limite uniforme d'homéomorphismes préservant la mesure.

L'ensemble  $Hameo(M, \omega)$  est donc inclus dans le groupe  $Homeo(M, \omega)$ . On le munit de la topologie induite, ie de la topologie  $C^0$ .

Pour s'assurer que  $Hameo(M, \omega)$  est un bon analogue  $C^0$  du groupe  $Ham(M, \omega)$ , il faut vérifier d'une part que c'est un sous-groupe normal de  $Homeo(M, \omega)$  et d'autre part qu'il est connexe par arcs afin d'avoir l'inclusion  $Hameo(M, \omega) \subseteq Homeo_0(M, \omega)$ . C'est ce que l'on fait dans la proposition suivante.

**Proposition.**  $Hameo(M, \omega)$  est un sous-groupe normal de  $Homeo(M, \omega)$ , connexe par arcs.

**Preuve.** Commençons par vérifier que  $Hameo(M, \omega)$  est stable par composition. Soit  $\Phi = (\varphi^t)_{t \in [0,1]}$  et  $\Psi = (\psi^t)_{t \in [0,1]}$  deux isotopies hamiltoniennes

topologiques, définies par des suites de hamiltoniens  $H_i$  et  $K_i$  qui vérifient  $d_{Ham}(\Phi_{H_i}, \Phi) \rightarrow 0$  et  $d_{Ham}(\Psi_{K_i}, \Psi) \rightarrow 0$ . On veut prouver que  $\Phi \cdot \Psi : t \mapsto \varphi^t \psi^t$  est aussi une isotopie hamiltonienne topologique. Rappelons que l'isotopie  $\Phi_{H_i} \cdot \Psi_{K_i}$  est engendrée par la fonction  $H_i \# K_i$ , notons  $H, K \in L^{1,\infty}$  les limites de  $H_i, K_i$ . Il suffit alors de prouver que

$$d_{Ham}(\Phi_{H_i} \cdot \Psi_{K_i}, \Phi \cdot \Psi) = \bar{d}(\Phi_{H_i} \cdot \Psi_{K_i}, \Phi \cdot \Psi) + \|H_i \# K_i - H \# K\| \longrightarrow 0$$

Le premier membre tend clairement vers 0, car la composition d'homéomorphismes est continue pour la topologie  $C^0$  sur  $Homeo(M)$ . Pour le second membre, on écrit

$$\begin{aligned} \|H_i \# K_i - H \# K\| &= \|H_i - H + K_i \circ (\Phi_{H_i})^{-1} - K \circ \Phi^{-1}\| \\ &\leq \|H_i - H\| + \|K_i \circ (\Phi_{H_i})^{-1} - K \circ \Phi^{-1}\| \\ &\leq \|H_i - H\| + \|K_i \circ (\Phi_{H_i})^{-1} - K_i \circ \Phi^{-1}\| + \|K_i \circ \Phi^{-1} - K \circ \Phi^{-1}\| \\ &\leq \|H_i - H\| + \|K_i \circ (\Phi_{H_i})^{-1} - K_i \circ \Phi^{-1}\| + \|K_i - K\| \end{aligned}$$

Par hypothèses, les termes  $\|H_i - H\|$  et  $\|K_i - K\|$  tendent vers 0 quand  $i \rightarrow +\infty$ . Seul le terme du milieu mérite plus d'explications.

Fixons  $\varepsilon > 0$ . On trouve alors un entier  $i_0$  tel que

$$i \geq i_0 \implies \|K_i - K_{i_0}\| < \varepsilon/3.$$

Par uniforme continuité de  $K_{i_0}$ , on peut trouver  $\delta > 0$  tel que si

$$\bar{d}(\Phi_{H_i}, \Phi) < \delta \implies \sup_{(t,x)} |K_{i_0}(t, (\varphi_{H_i}^t)^{-1}(x)) - K_{i_0}(t, (\varphi^t)^{-1}(x))| < \varepsilon/6$$

ce qui nous donne  $\|K_{i_0} \circ (\Phi_{H_i})^{-1} - K_{i_0} \circ \Phi^{-1}\| < \varepsilon/3$ .

Enfin, on applique l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|K_i \circ (\Phi_{H_i})^{-1} - K_i \circ \Phi^{-1}\| &\leq \|K_i \circ (\Phi_{H_i})^{-1} - K_{i_0} \circ (\Phi_{H_i})^{-1}\| + \|K_{i_0} \circ (\Phi_{H_i})^{-1} - K_{i_0} \circ \Phi^{-1}\| \\ &\quad + \|K_{i_0} \circ \Phi^{-1} - K_i \circ \Phi^{-1}\| \\ &\leq \|K_i - K_{i_0}\| + \|K_{i_0} \circ (\Phi_{H_i})^{-1} - K_{i_0} \circ \Phi^{-1}\| + \|K_{i_0} - K_i\| \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

On montre de la même manière que  $Hameo(M, \omega)$  est stable par passage à l'inverse, et que c'est un sous-groupe normal.

Il nous reste donc à prouver que  $Hameo(M, \omega)$  est connexe par arcs pour la topologie  $C^0$ . Soit  $\varphi$  un homéomorphisme hamiltonien temps 1 d'une isotopie hamiltonienne topologique  $\Phi : t \mapsto \varphi^t$ . Il nous faut prouver que chaque

$\varphi^s$ , pour  $0 < s < 1$ , est un homéomorphisme hamiltonien. Fixons alors  $0 < s < 1$ , notons  $\Phi' : t \mapsto \varphi^{st}$  et reparamétrisons la suite  $H_i$  en la suite  $H'_i$ , ou  $H'_i(t, x) = sH_i(st, x)$ . L'isotopie engendrée par  $H'_i$  est donc  $\Phi'_i : t \mapsto \varphi_{H'_i}^{st}$ . Il suffit alors de montrer que  $d_{Ham}(\Phi'_i, \Phi') \rightarrow 0$ . Encore une fois la convergence  $C^0$  est immédiate, il reste donc à s'assurer que la suite  $H'_i$  est de Cauchy pour la norme de Hofer. Or un simple calcul nous donne  $\|H'_i - H'_j\| \leq \|H_i - H_j\|$ . Ainsi  $\varphi^s$  est le temps 1 de l'isotopie hamiltonienne topologique  $\Phi'$ , donc  $Hameo(M, \omega)$  est connexe par arcs.  $\square$

**Remarque.** On s'intéresse ici principalement au groupe  $Hameo(M, \omega)$  en tant que sous-groupe de  $Homeo(M, \omega)$ , et donc munie de la topologie induite. Cependant,  $Hameo(M, \omega)$  apparaît naturellement avec une topologie intrinsèque, la topologie hamiltonienne. Dans ce cadre, on peut montrer que  $Hameo(M, \omega)$  reste un groupe topologique connexe par arcs, mais c'est plus difficile (voir [OM]).

Avant de poursuivre, il faut d'abord s'assurer qu'on a défini une notion d'homéomorphisme hamiltonien qui n'est pas trivial, au sens où il existe effectivement des homéomorphismes hamiltoniens qui ne sont pas lisses. On reprend l'exemple donné dans [OM].

**Exemple.** On choisit une fonction  $\rho : ]0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ , qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $\rho(r) = 0$  pour  $r \in [1 - \varepsilon, 1]$
- (ii)  $\rho'(r) < 0$  pour  $r \in ]0, 1 - \varepsilon[$
- (iii)  $\lim_{r \rightarrow 0^+} r\rho'(r) = -\infty$

On munit le disque  $D^2$  de ses coordonnées polaires, et on définit une application  $\phi_\rho$  par

$$\phi_\rho : (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \rho(r))$$

Posons  $\phi_\rho(0, 0) = (0, 0)$ ,  $\phi_\rho$  est donc continue sur  $D^2$ , mais lisse seulement sur  $D^2 - (0, 0)$ . De plus,  $\phi_{-\rho}$  est clairement un inverse de  $\phi_\rho$ , donc c'est un homéomorphisme. Enfin, un calcul immédiat montre que  $\phi_\rho$  préserve la forme volume lisse  $\omega = r dr \wedge \theta$  sur  $D^2 - (0, 0)$ , d'où  $\phi_\rho \in Homeo_0(D^2, \omega)$ .

Intuitivement,  $\phi_\rho$  est un homéomorphisme qui préserve le feuilletage trivial du disque en cercles concentriques  $C_r$  de rayon  $r$ , et qui sur chaque cercle est une rotation d'angle  $\rho(r)$  (voir figure 5.1). Pour un choix convenable de la fonction  $\rho$ , on va montrer que  $\phi_\rho$  est un homéomorphisme hamiltonien, qui n'est donc pas lisse. Considérons le flot

$$t \in [0, 1] \mapsto \phi_{t\rho} \in Homeo_0(D^2, \omega)$$

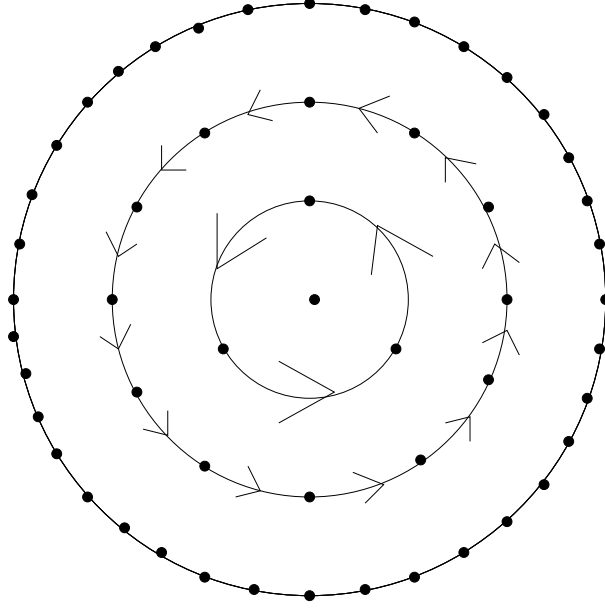


FIG. 5.1 – Homéomorphisme  $\phi_\rho$ .

engendré par le hamiltonien autonome  $H_\rho(r, \theta) = \int_r^1 s\rho(s)ds$ . La norme de Hofer de ce dernier vaut

$$\|H_\rho\| = \int_0^1 s\rho(s)ds$$

Choisissons la fonction  $\rho$  de telle sorte que  $\|H_\rho\| < \infty$ , par exemple  $\rho(r) \sim 1/\sqrt{r}$  au voisinage de 0. Par convolution, on trouve une suite de fonctions lisses  $\rho_n \rightarrow \rho$ , de telle sorte que les  $\phi_{\rho_n}$  soit des difféomorphismes préservant l'aire. Notons  $H_{\rho_n}$  les hamiltoniens correspondants. Alors  $d_{C^0}(\phi_{t\rho_n}, \phi_{t\rho}) \rightarrow 0$  uniformément en  $t$  et  $\|H_{\rho_n} - H_\rho\| \rightarrow 0$  car  $\|H_\rho\| < \infty$ , ce qui implique en particulier que la suite  $H_{\rho_n}$  est de Cauchy pour la norme de Hofer.

Tout ceci prouve que  $\phi_\rho$  est un homéomorphisme hamiltonien du disque  $D^2$  qui n'est pas lisse. Cet exemple se généralise aussitôt pour une surface quelconque, en faisant cette construction sur un disque suffisamment petit (que l'on munit de coordonnées symplectiques) et en étendant l'homéomorphisme par l'identité sur le reste de la surface.

Rappelons que notre objectif est de comprendre la structure du groupe  $\text{Ker}(\Theta)$ , où

$$\Theta : \text{Homeo}(M, \mu) \longrightarrow H_1(M, \mathbb{R})/\Gamma$$

On sait que  $\Theta$  est continue, et que  $Ham(M, \omega) \subseteq Ker(\Theta)$ . Puisque les homéomorphismes hamiltoniens sont en particulier limites uniformes de difféomorphismes hamiltoniens, la proposition suivante est immédiate.

**Proposition.** On a  $Hameo(M, \omega) \subseteq Ker(\Theta)$

Cependant, la question qui nous intéresse vraiment est de savoir si l'inclusion est stricte. Oh conjecture le résultat suivant.

**Conjecture (Oh).**  $Hameo(M, \omega)$  est un sous-groupe propre de  $Ker(\Theta)$ .

En particulier, le groupe  $Homeo(S^2, \omega)$  ne serait pas simple.

Revenons à notre dernier exemple, où l'on a construit un homéomorphisme hamiltonien  $\phi_\rho$ . Une hypothèse importante était l'intégrabilité de la fonction  $r \mapsto r\rho(r)$  au voisinage de 0. Supposons maintenant que

$$\int_0^1 r\rho(r)dr = +\infty$$

La conjecture de Oh serait alors démontré pour  $M = S^2$  si l'on prouve que  $\phi_\rho$  n'est plus un homéomorphisme hamiltonien.

Dans tous les cas, la question suivante est aussi intéressante.

**Question.** Est ce que le groupe  $Hameo(M, \omega)$  est simple?

Dans le cas à bord (par exemple  $Hameo(D^2, \partial D^2, \omega)$ ), un moyen de répondre par la négative à la question précédente serait de définir une extension de l'invariant de Calabi.

# Annexe A

## Théorème d'inversion locale de Nash-Moser

Le théorème d'inversion locale dans les espaces de Banach affirme que si une application de classe  $C^1$  a une différentielle inversible en un point, alors cette application est un difféomorphisme local au voisinage de ce point.

Un tel résultat ne marche plus si l'on sort du cadre des espaces de Banach. En effet, si  $M$  est une variété compacte, l'application exponentielle (au sens des groupes de Lie)  $exp : \Gamma^\infty(TM) \rightarrow Diff^\infty(M)$  vérifie  $dexp(0) = id$ , mais en général elle n'est pas inversible au voisinage de 0, car il existe des difféomorphismes qui ne sont pas le temps 1 d'un flot : si  $v \in \Gamma^\infty(TS^1) = C^\infty(S^1)$  est sans zéros, alors le temps 1 de son flot est un difféomorphisme  $\varphi \in Diff_0^\infty(S^1)$  sans point fixe qui de plus est nécessairement  $C^\infty$ -conjuguée à une rotation, cependant on peut construire des difféomorphismes sans points fixes arbitrairement proches de l'identité qui ne sont pas  $C^\infty$ -conjuguée à une rotation, l'exponentielle n'est donc pas localement surjective. On peut aussi montrer qu'elle n'est pas localement injective.

Le but de cette partie est donc d'énoncer un théorème d'inversion locale dans des espaces vectoriels plus généraux que les espaces de Banach (voir [Bo],[Ha]).

**Définitions.** Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique localement convexe, métrisable et complet.

Une application  $f : E \supseteq U \rightarrow F$  entre espaces de Fréchet est de classe  $C^1$  si elle est continue et si il existe une application continue

$$Df : U \times E \rightarrow F : (x, h) \mapsto Df(x).h$$

ANNEXE A. THÉORÈME D'INVERSION LOCALE DE NASH-MOSER62

linéaire en  $h$  et telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + th) - f(x)) = Df(x).h$$

Par récurrence, on définit les applications de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ .

Remarquons que l'on impose ici une notion de différentiabilité plus faible que la notion classique.

Pour pouvoir énoncer le théorème de Nash-Moser, on doit se placer dans la catégorie des « bons » espaces de Fréchet et des « bonnes » applications entre bons espaces de Fréchet.

**Définitions.** Un espace de Fréchet est échelonné si sa topologie est définie par une suite croissante de semi-normes. Un bon espace de Fréchet est un espace de Fréchet échelonné  $(E, \|\cdot\|_{j \in \mathbb{N}})$  muni d'une famille d'applications linéaires continues,  $S_t : E \rightarrow E$ ,  $t > 1$  appelés opérateurs de lissage, qui vérifie : il existe  $C_{j,k} > 0$  tels que pour tous  $x \in E$ ,  $t > 1$  et  $j < k$ , on ait

$$\begin{cases} \|S_t x\|_k \leq C_{k,j} t^{k-j} \|x\|_j & \text{(régularisation)} \\ \|(Id - S_t)x\|_j \leq C_{j,k} t^{j-k} \|x\|_k & \text{(approximation de l'identité)} \end{cases}$$

On dit qu'une application  $f : E \supseteq U \rightarrow F$  entre bons espaces de Fréchet est bonne si  $\forall x_0 \in U$ ,  $\exists V$  un voisinage de  $x_0$ , un entier  $r > 0$  et des réels  $c_j > 0$  telles que

$$\|f(x)\|_j \leq c_j (1 + \|x\|_{j+r})$$

Une bonne application de classe  $C^k$  est une application qui est bonne ainsi que toutes ces différentielles.

L'archétype d'espace échelonné est l'espace de fonctions  $C^\infty(M)$  muni de la topologie  $C^\infty$ .

Les inégalités de bonnes applications compensent (en partie) le fait que, entre espaces de Banach, une application continue est automatiquement localement bornée. Cependant l'entier  $r$  indique une perte de différentiabilité (par analogie avec le cas où la bonne application est un opérateur différentiel) et les opérateurs de lissage seront alors fondamentaux pour pouvoir utiliser ces inégalités pour des passages à la limite.

Voici un exemple important. Soit  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel au dessus d'une variété compacte. Alors l'espace des sections  $\Gamma^\infty(E)$  est un bon espace de



ANNEXE A. THÉORÈME D'INVERSION LOCALE DE NASH-MOSER63

Fréchet. Il est immédiat que muni de la topologie  $C^\infty$ , c'est un espace de Fréchet échelonné, et on peut obtenir des opérateurs de lissage par convolution.

Donnons deux résultats pratiques pour s'assurer qu'une application est bonne :  
 (1) la composée de bonnes applications (de classe  $C^k$ ) est une bonne application (de classe  $C^k$ )

(2) on peut définir les notions de bonnes variétés fréchétiennes et de bons groupes de Lie fréchétiens, dans ce contexte,  $Diff^\infty(M)$  est un bon groupe de Lie fréchétienn et

$$\mathcal{I} : Diff^\infty(M) \longrightarrow Diff^\infty(M) : g \longmapsto g^{-1}$$

est un bon difféomorphisme  $C^\infty$ .

On peut alors énoncer le théorème d'inversion locale de Nash-Moser.

**Théorème (Nash-Moser).** Soit  $E$  et  $F$  des bons espaces de Fréchet,  $U \subseteq E$  un ouvert et  $f : U \rightarrow F$  une bonne application de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ . Soit  $x_0 \in U$  et  $y_0 = f(x_0)$ . On suppose qu'il existe un voisinage  $V_0$  de  $x_0$  tel que  $\forall x \in V_0$ ,  $df(x)$  soit inversible d'inverse une bonne application linéaire continue.

Alors  $f$  est un bon difféomorphisme local au voisinage de  $x_0$ .

Donnons une vague idée de la preuve. On suppose  $x_0 = y_0 = 0$ , et on veut résoudre

$$f(x) = y$$

où  $x$  est l'inconnue et  $y$  proche de 0.

Une preuve du théorème d'inversion locale classique utilisant un algorithme de Newton commencerait comme ceci : notons  $L(x)$  l'inverse de  $df(x)$ , on considère la suite

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{j+1} = x_j - \Delta x_j \end{cases}$$

où  $\Delta x_j = L(x_j)(f(x_j) - y)$ .

On démontre alors la convergence de cette suite, et que la limite  $x$  résout l'équation.

Cependant, cette méthode ne peut pas fonctionner ici : en effet, grâce aux inégalités de bonnes applications, on ne peut majorer  $\|\Delta x_j\|_k$  que par des expressions en les  $\|y\|_l$ , avec  $l$  arbitrairement grand lorsque  $j \rightarrow +\infty$ , donc on ne peut garantir la convergence de la suite. Comme on l'a déjà dit plus

ANNEXE A. THÉORÈME D'INVERSION LOCALE DE NASH-MOSER<sup>64</sup>

haut, on va utiliser les opérateurs de lissage pour remédier à ce problème. On considère un algorithme de Newton modifié

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{j+1} = x_j - \Delta x_j \end{cases}$$

avec  $\Delta x_j = S(t_j)L(x_j)(f(x_j) - y)$ , et  $t_j$  qui croît suffisamment vite (typiquement on choisit  $t_j = \exp(\frac{3}{2})^j$ ) pour compenser la perte de différentiabilité. On montre alors la convergence de ce procédé.

# Bibliographie

- [An] Anderson, R.D., *The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Amer. Jour. Math., 80 (1958) 955-963.
- [AK] Arnold, V.I. ; Khesin B.A., *Topological methods in hydrodynamics*, Applied Mathematical Sciences, 125 Springer Verlag, New-York, 1998.
- [Ba] Banyaga, A., *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its Applications, 400 Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
- [Bo] Bost, J.-B., *Tores invariants des systemes dynamiques hamiltoniens*, Sem. Bourbaki, exposé 639, Astérisque 133-134 (1986) 113-157
- [Ep] Epstein, D.B.A., *The simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Comp. Math., 22 (1970) 165-173.
- [EK] Edwards, R.D. ; Kirby R., *Deformations of spaces of imbeddings*, Ann. of math., 93 (1971) 63-88.
- [Fa] Fathi, A., *Structure of the group of homeomorphisms preserving a good measure on a compact manifold*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 13 (1980) 45-93.
- [Fi] Fisher, G.M., *On the group of all homeomorphisms of a manifold*, T.A.M.S., 97 (1960) 193-212.
- [GG] Gambaudo, J.-M. ; Ghys, E., *Enlacements asymptotiques*, Topology, 36-6 (1997) 1355-1379.
- [Ha] Hamilton, R.S., *The inverse function theorem of Nash and Moser*, B.A.M.S. (N.S.), 7-1 (1982) 65-222
- [He] Herman, M.R., *Sur le groupe des difféomorphismes du tore*, Ann. Inst. Fourier, 23-2 (1973) 75-86.
- [HZ] Hofer, H. ; Zehnder E., *Symplectic invariants and hamiltonian dynamics*, Birkhäuser Advanced Texts Verlag, Basel, 1994.
- [Le] Le Roux, F., *Etude topologique de l'espace des homéomorphismes de Brouwer*, Thèse, Institut Fourier, Grenoble, 1997

- [Ma] May, J.P., *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics, 1992
- [Mo] ] Moise, E.E, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, 1977
- [MS] McDuff, D. ; Salamon, D., *Introduction to symplectic topology*, 2nd edition, Oxford University Press, New-York, 1998.
- [OM] Oh, Y.-G. ; Müller S., *The group of hamiltonian homeomorphisms and  $C^0$ -symplectic topology*, ArXiv, math.SG/0402210.
- [Po] Polterovich, L., *The geometry of the group of symplectic diffeomorphisms*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [Sc] Schwartzman, S., *Asymptotic cycles*, Ann. Math. 66-2 (1957) 270-284.
- [Th] Thurston, W.P., *Foliations and group of diffeomorphisms*, B.A.M.S., 80 (1974) 304-307.