

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : EXAMEN PARTIEL

6 mars 2013

Durée : 2h

Comme d'habitude, on accordera un soin particulier à la rédaction des réponses, en indiquant le sens des calculs effectués et en précisant les liens logiques.

Exercice 1.— (2 pts) **Question de cours (sans documents, durée 10 minutes)**

Soit A une matrice carrée réelle, γ_1 une solution de l'équation différentielle $x' = Ax$, P une matrice inversible, et γ_2 la courbe $\gamma_2 = P\gamma_1$. Trouver une équation différentielle linéaire dont γ_2 est solution.

Exercice 2.— (8 pts) On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad y' = y^2 t + e^t.$$

1. Soit f_1 la solution maximale de (1) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$. On voudrait montrer que f_1 "explose en temps fini" : l'intervalle de vie de f_1 est du type $I =]a, b[$ avec b fini et on a $\lim_{t \rightarrow b^-} f_1(t) = +\infty$.

a. Déterminer la solution maximale g de l'équation différentielle $y' = y^2 t$ qui vérifie la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$. Quel est son intervalle de vie ?

b. Montrer que le graphe de g est une barrière montante pour l'équation différentielle (1).

c. En déduire l'explosion de f_1 .

2. On considère maintenant la solution f_{-1} de l'équation différentielle (1) vérifiant la condition initiale $y(0) = -1$. On voudrait montrer que f_{-1} explose aussi en temps fini.

a. Déterminer la solution h de l'équation différentielle $y' = e^t$ vérifiant la condition initiale $y(0) = -2$. Déterminer un réel $t_0 > 0$ tel que, en supposant que t_0 appartient à l'intervalle de vie de f_{-1} , on ait $f_{-1}(t_0) > 0$.

b. En utilisant une méthode analogue à celle de la question (1), montrer alors l'explosion de f_{-1} .

Exercice 3.— (7 pts)

1. Résoudre le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} y_1' &= -4y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= -6y_1 + 5y_2. \end{cases}$$

2. Déterminer toutes les conditions initiales pour lesquelles la solution tend vers $(0, 0)$. Expliquer le lien avec les vecteurs propres de la matrice du système.

3. Résoudre le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} y_1' &= -4y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= -6y_1 + 5y_2 + t. \end{cases}$$

Exercice 4.—(3 pts)

1. Expliquer ce que représentent les différentes courbes sur le dessin ci-dessous.
2. Expliquer en quoi ce dessin illustre la preuve du théorème de Cauchy-Peano.

