MM049 **2011-2012**
Université Paris 6

Équations différentielles : examen

16 mai 2012

Exercice 1.— On considère le champ de vecteurs défini sur le plan par

$$X(x, y) = (\cos(y), \sin(y)).$$

1. Est-il complet ?

2. Donner un paramétrage d'une droite qui est solution de l'équation différentielle $P' = X(P)$. Déterminer toutes les droites dont un paramétrage est solution de cette équation différentielle. Dessiner quelques-unes de ces droites, avec des flèches indiquant le sens de parcourt de la solution.

3. Déterminer les vecteurs $\vec{u}$ pour lesquels la translation $T_{\vec{u}} : (x, y) \mapsto (x, y) + \vec{u}$ laisse le champ invariant, c'est-à-dire vérifie $T_{\vec{u}}^* X = X$.

4. Trouver un ensemble compact K vérifiant : pour tout t, $\Phi^t(K) \cap K \neq \emptyset$, où $(\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot associé à X.

5. En déduire qu'il n'existe pas de difféomorphisme $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ redressant globalement le champ X, c'est-à-dire tel que le champ $\Psi^* X$ soit un champ de vecteurs constant.

Exercice 2.— (4) Soit $X : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs défini sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de classe C^1. Soit $\gamma : I \to U$ une solution maximale de l'équation différentielle associée. On suppose qu'il existe un $t_0 > 0$ tel que l'intervalle I contient 0 et t_0, et $\gamma(t_0) = \gamma(0)$. Montrer que γ est définie sur $\mathbb{R}$, et périodique.

Exercice 3.— (4) Soit Φ l'application du plan dans lui-même définie par $\Phi(x, y) = (y, y^2 - x)$, et X le champ de vecteur constant $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que Φ est un difféomorphisme.

2. Calculer le champ image du champ X par le difféomorphisme Φ.