M2 **2013-2014**
Université Paris 6

Systèmes dynamiques I

19 décembre 2013 Durée : 3h

Appareils électroniques interdits, documents de cours et de TD autorisés

---

Exercice 1.—($\simeq$ 6 pts)

1. Soient X un espace métrique compact, et f_1, f_2 deux homéomorphismes de X tels que $f_1 f_2 = f_2 f_1$. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité invariante par f_1 et f_2. *On pourra partir d'une mesure μ invariante par f_1 et lui appliquer le procédé classique de construction d'une mesure invariante pour f_2.*

2. Soit F un homéomorphisme croissant du cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, f un relevé de F. On pose $\delta_f(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - \tilde{x}$; ceci définit une fonction sur $\mathbb{R}$ qui est périodique de période 1 et qui induit donc une fonction $\Delta_f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$. Soit μ une mesure de probabilité invariante par F, on pose

$$\rho(\mu, f) = \int_{\mathbb{S}^1} \Delta_f(x) d\mu(x).$$

Montrer que $\rho(\mu, f)$ est égal au nombre de rotation de f.

3. On considère maintenant deux homéomorphismes croissants F_1, F_2 du cercle tels que $F_1 F_2 = F_2 F_1$. En utilisant les questions précédentes, montrer que le nombre de rotation de $F_1 F_2$ est la somme du nombre de rotation de F_1 et de celui de F_2.

Exercice 2.—($\simeq$ 4 pts) Soit X un espace métrique compact et $T : X \to X$ une application continue qui est uniquement ergodique. Si Y est un ouvert de X, montrer que la fonction τ définie par

$$\tau(y) = \min\{n \geq 1 \mid T^n(y) \in Y\}$$

est définie et majorée sur X. *On pourra utiliser l'existence d'une fonction continue f, positive ou nulle sur X, nulle en dehors de Y, et différente de la fonction nulle.*

Exercice 3.—($\simeq$ 15 pts) Soit α un nombre irrationnel, et R_α la rotation du cercle $\mathbb{S}^1$ d'angle α modulo 1. On note $\pi : x \mapsto x \bmod 1$ la projection de $\mathbb{R}$ dans le cercle, et on considère les deux intervalles

$$I_0 = \pi\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right) \text{ et } I_1 = \pi\left(\left]\frac{1}{2}, 0\right[\right)$$

dont les adhérences seront notées $\overline{I_0}, \overline{I_1}$. On note X l'ensemble des points qui ne sont ni dans l'orbite de $\pi(0)$ ni dans l'orbite de $\pi(1/2)$, c'est-à-dire l'ensemble des points dont tous les itérés appartiennent à $I_0 \cup I_1$. On dit qu'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ est un *itinéraire* pour un point $x \in \mathbb{S}^1$ si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$R_\alpha^n x \in \overline{I_{\varepsilon_n}}.$$

On note Y l'ensemble des itinéraires des points du cercle. On remarque que chaque point de X a un unique itinéraire, et que chaque point de $\mathbb{S}^1 \setminus X$ a exactement un itéré dans $\{0, 1/2\}$, et donc exactement deux itinéraires. On introduit également l'application $\Phi : X \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ qui associe à chaque point x de X son unique itinéraire noté $(\varepsilon_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$.

On rappelle que la topologie sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ est engendrée par les cylindres

$$C_{w_{-\ell},\dots,w_\ell} = \{(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \varepsilon_{-\ell} = w_{-\ell}, \dots, \varepsilon_{-\ell} = w_{-\ell}\}.$$

La question 3 n'est pas facile, mais on peut bien sûr l'admettre pour aborder les questions suivantes.

1. Montrer qu'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ne peut pas être un itinéraire pour x et pour y si $x \neq y$.

2. Montrer que Φ est injective et continue.

3. Montrer que Y est l'adhérence de $\Phi(X)$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. *On pourra commencer par voir que les deux itinéraires de* 0 *sont dans l'adhérence de* $\Phi(X)$.

4. Montrer que Y est un espace de Cantor.

5. Montrer que Y est invariant par le décalage

$$\sigma : (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (\varepsilon_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

6. Quel est le lien entre R_α, Φ et σ ?

7. On note $T : Y \to Y$ la restriction du décalage. Montrer que T n'a pas d'orbite périodique.

8. En utilisant que $Y \setminus \Phi(X)$ est la réunion d'un nombre fini d'orbites de T, montrer que toute mesure de probabilité μ sur Y qui est invariante par T vérifie $\mu(\Phi(X)) = 1$.

9. Montrer que T est uniquement ergodique et expliciter la mesure invariante μ à l'aide de Φ.

10. Montrer que μ est de support total dans Y, autrement dit que tout ouvert non vide a une mesure non nulle.

11. En déduire que T est minimal.

12. Le système $(Y, \mathcal{B}, \mu, T)$ est-il mélangeant ? ($\mathcal{B}$ désigne la tribu des boréliens de Y).

13. Que pensez-vous du spectre du système $(Y, \mathcal{B}, \mu, T)$?

Exercice 4.—($\simeq$ 4 pts) Soit F un homéomorphisme croissant du cercle. On suppose que 0 et ses cinq premiers itérés sont disposés sur le cercle dans l'ordre suivant :

$$0, F^2(0), F^4(0), F(0), F^3(0), F^5(0).$$

Que peut-on dire du nombre de rotation de F ?

On pourra commencer par choisir un relevé f de F, et déterminer la position de $f(0), \dots, f^5(0)$ par rapport aux nombres entiers.
