M2 **2013-2014**
Université Paris 6

Systèmes dynamiques I : éléments de corrigé

19 décembre 2013 Durée : 3h

Exercice 1.—(6)

1. (2) Soient X un espace métrique compact, et f_1, f_2 deux homéomorphismes de X tels que $f_1 f_2 = f_2 f_1$. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité invariante par f_1 et f_2.

Le théorème de Krilov-Bogolioubov nous fournit une mesure μ invariante par f_1. On forme alors la suite

$$\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{2*}^n \mu.$$

Par compacité, elle admet une valeur d'ahérence ν. On vérifie que ν est invariante par f_2 ; elle est aussi invariante par f_1 puisque toutes les mesures μ_N le sont et l'ensemble des mesures invariantes par f_1 est fermé.

2. (2) Soit F un homéomorphisme croissant du cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, f un relevé de F. On pose $\delta_f(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - \tilde{x}$; ceci définit une fonction périodique sur $\mathbb{R}$, qui induit une fonction $\Delta_f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$. Soit μ une mesure de probabilité invariante par F, on pose

$$\rho(\mu, f) = \int_{\mathbb{S}^1} \Delta_f(x) d\mu(x).$$

Montrer que $\rho(\mu, f)$ est égal au nombre de rotation de f.

Soit $x \in \mathbb{S}^1$ et $\tilde{x}$ un relevé de x. Pour tout N, la Nième moyenne de Birkhoff de la fonction Δ_f au point x est égale à

$$\frac{1}{N} f^N(\tilde{x}) - \tilde{x}.$$

La fonction $(\Delta_f)_*$ fournie par le théorème de Bikhoff n'est donc rien d'autre que $\rho(f)$. D'après ce théorème l'intégrale de $(\Delta_f)_*$ est égale à l'intégrale de Δ_f, d'où le résultat.

3. (2) On considère maintenant deux homéomorphismes croissants F_1, F_2 du cercle tels que $F_1 F_2 = F_2 F_1$. En utilisant les questions précédentes, montrer que le nombre de rotation de $F_1 F_2$ est la somme du nombre de rotation de F_1 et de celui de F_2.

Soit ν une mesure invariante pour F_1 et F_2 fournie par la première question. Choisissons deux relevés f_1, f_2. Alors $f_1 f_2$ est un relevé de $F_1 F_2$, et d'après la deuxième question les nombres de rotations sont

$$\rho(f_1) = \rho(\nu, f_1), \quad \rho(f_2) = \rho(\nu, f_2), \quad \rho(f_1 f_2) = \rho(\nu, f_1 f_2).$$

Le résultat se réduit donc à montrer l'égalité

$$\rho(\nu, f_1 f_2) = \rho(\nu, f_1) + \rho(\nu, f_2)$$

qui s'obtient en écrivant

$$\delta_{f_1 f_2}(\tilde{x}) = \delta_{f_1}(f_2(\tilde{x})) + \delta_{f_2}(\tilde{x})$$

et en utilisant l'invariance de ν par f_2.

Exercice 2.— Soit α un nombre irrationnel, et R_α la rotation du cercle $\mathbb{S}^1$ d'angle α modulo 1. On note $\pi : x \mapsto x \bmod 1$ la projection de $\mathbb{R}$ dans le cercle, et on considère les deux intervalles

$$I_0 = \pi\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right) \text{ et } I_1 = \pi\left(\left]\frac{1}{2}, 0\right[\right)$$

dont les adhérences seront notées $\overline{I_0}, \overline{I_1}$. On note X l'ensemble des points qui ne sont ni dans l'orbite de 0 ni dans l'orbite de 1/2.

On dit qu'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ est un *itinéraire* pour un point $x \in \mathbb{S}^1$ si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$R_\alpha^n x \in \overline{I_{\varepsilon_n}}.$$

On note Y l'ensemble des itinéraires des points du cercle.

1. *Montrer qu'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ne peut pas être un itinéraire pour x et pour y si $x \neq y$.*

Soient $x \neq y$, notons $]xy[$ l'intervalle le plus court d'extrémités x et y (s'ils sont à distance 1/2, on choisit n'importe lequel des deux intervalles). Par minimalité de R_α, il existe un entier n tel que $R_\alpha^n(0)$ appartient à $]xy[$. Alors l'un des deux points $R_\alpha^{-n}(x)$ et $R_\alpha^{-n}(y)$ est dans I_0 et l'autre est dans I_1, tout itinéraire du premier vérifie $\varepsilon_{-n} = 0$ alors que tout itinéraire du second vérifie $\varepsilon_{-n} = 1$.

2. *Montrer que Φ est injective et continue.*

L'injectivité suit immédiatement de la question 1. Fixons un point $x \in X$ et entier $\ell > 0$, et considérons le cylindre C déterminé par $w_{-\ell} = \varepsilon_{-\ell}(x), \ldots, w_\ell = \varepsilon_\ell(x)$. $\Phi^{-1}(C)$ est l'ensemble des points y de X tels que $\varepsilon_n(y) = w_n$ pour tout n entre $-\ell$ et ℓ, c'est-à-dire

$$X \cap \bigcap_{n=-\ell}^{\ell} R_\alpha^{-n}(I_{w_n}).$$

C'est un ouvert de X : tout point y assez proche de x a un itinéraire proche de celui de x.

3. *Montrer que Y est l'adhérence de $\Phi(X)$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.*

Soit (ε_n) un itinéraire de 0. Supposons $\varepsilon_0 = 0$ (le raisonnement est analogue si $\varepsilon_0 = 1$). On choisit alors une suite (x_k) dans I_0 qui converge vers 0. On a bien sûr, pour tout k, $\varepsilon_0(x_k) = 0$. Soit n un entier non nul. En utilisant que $R_\alpha^n(x) \neq 0, 1/2$, on montre que pour tout k assez grand, $\varepsilon_n(x_k) = \varepsilon_n$ (comme pour la continuité de Φ). On conclut d'abord que la suite $\Phi(x_k)$ tend vers (ε_n) dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Ensuite pour tout entier n_0 fixé, la suite $(\Phi(R_\alpha^{n_0}(x_k)))_{k\in\mathbb{Z}}$ tend vers (ε_{n+n_0}), qui est l'un des deux itinéraires de $R^{n_0}(0)$. En faisant le même raisonnement pour 1/2, on voit que les itinéraires des points des orbites de 0 et 1/2 sont dans l'adhérence de $\Phi(X)$; ces itinéraires sont exactement les éléments de $Y \setminus \Phi(X)$, on a donc montré que l'adhérence de $\Phi(X)$ contient Y.

Montrons maintenant que l'adhérence de $\Phi(X)$ est incluse dans Y : soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans X telle que la suite image $(\Phi(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, il s'agit de voir que cet élément est dans Y. Quitte à extraire en utilisant la compacité du cercle, on peut supposer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un point x_∞. Pour n_0 fixé, la convergence de la suite $(\Phi(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ vers $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ implique que pour tout k assez grand, $\varepsilon_{n_0}(x_k) = \varepsilon_{n_0}$, autrement dit $R_\alpha^{n_0}(x_k) \in I_{\varepsilon_{n_0}}$. Par continuité de $R_\alpha^{n_0}$, on en déduit que $R_\alpha^{n_0}(x_\infty) \in \overline{I_{\varepsilon_{n_0}}}$. Autrement dit (ε_n) est un itinéraire de x_∞, et par définition (ε_n) appartient bien à Y.

4. *Montrer que Y est un espace de Cantor.*

On vient de voir que Y est fermé, puisque $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ est compact, c'est un espace compact ; il est aussi totalement discontinu puisque inclus dans un espace totalement discontinu. Il reste à voir que Y n'a pas de point isolé. Les points de $Y \setminus \Phi(X)$ ne sont clairement pas isolés dans Y. Le fait qu'un point de $\Phi(X)$ n'est pas isolé suit de l'injectivité et de la continuité de Φ et du fait que X n'a pas de point isolé.

5. *Montrer que Y est invariant par le décalage*

$$\sigma : (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (\varepsilon_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

En écrivant les définitions, on voit que (ε_n) est un itinéraire de x si et seulement si $\sigma((\varepsilon_n))$ est un itinéraire de $R_\alpha(x)$. Ceci montre que Y est invariant par σ.

6. *Quel est le lien entre R_α, Φ et σ ?* La même propriété entraine que $\Phi R_\alpha = T\Phi$; autrement dit, $\Phi : X \to \Phi(X)$ conjugue $R_{\alpha|X}$ et $T_{|\Phi(X)}$.

7. *On note $T : Y \to Y$ la restriction du décalage. Montrer que T n'a pas d'orbite périodique.*

Soit x un point dont l'itinéraire est périodique de période q, alors cet itinéraire est aussi un itinéraire pour le point $R_\alpha^q(x)$. Deux points ayant un itinéraire en commun coincident, donc x est périodique pour R_α, ce qui est absurde.

8. *En utilisant que $Y \setminus \Phi(X)$ est la réunion d'un nombre fini d'orbites de T, montrer que toute mesure de probabilité μ sur Y qui est invariante par T vérifie $\mu(\Phi(X)) = 1$.*

L'application T n'a pas de point périodique, et un point qui n'est pas périodique est de mesure nulle puisque la mesure est invariante et finie. On conclut par σ-additivité.

9. *Montrer que T est uniquement ergodique et expliciter la mesure invariante μ à l'aide de Φ.*

Soit μ une mesure invariante, on a vu que $\Phi(X)$ est de mesure totale. Par conjugaison, $\Phi_*^{-1}\mu$ est alors une mesure de probabilité invariante par la rotation R_α, c'est donc la mesure de Lebesgue. Donc $\mu = \Phi_* \mathrm{Leb}_{|X}$. (Notons que X est bien de mesure de Lebesgue 1).

10. *Montrer que μ est de support total dans Y, autrement dit que tout ouvert non vide a une mesure non nulle.*

Un ouvert non vide O de Y rencontre $\Phi(X)$, et $\Phi^{-1}(O)$ est alors un ouvert non vide de X, qui doit être de mesure de Lebesgue non nulle. Donc $\mu(O) > 0$.

11. *En déduire que T est minimal.* Soit maintenant F un fermé non vide invariant par T. Puisque F est compact, on peut appliquer le théorème de Krylov-Bogolioubov, et on trouve ainsi une mesure μ', supportée sur F et invariante par T. Par unique ergodicité on a $\mu' = \mu$, mais puisque le support de μ est Y, on en déduit que $F = Y$.

12. *Le système $(Y, \mathcal{B}, \mu, T)$ est-il mélangeant ? ($\mathcal{B}$ désigne la tribu des boréliens de Y).*

Non, puisqu'il est isomorphe à la rotation, qui n'est pas mélangeante.

13. *Quel est son spectre ?* Le même que celui de la rotation...
