TD n°6. Différentiabilité

Exercice 1. a) Chacune des formules suivantes définit une fonction f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que l'on prolonge en posant $f(0,0) = 0$. Pour chacune des fonctions obtenues, répondre aux questions suivantes : Est-elle continue en $(0,0)$? L'application admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$? Des dérivées directionnelles ? Est-elle différentiable en $(0,0)$? Est-elle de classe C^1 au voisinage de $(0,0)$?

$$(i)\ \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad (ii)\ \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad (iii)\ \frac{x^3y}{x^4+y^2} \qquad (iv)\ \frac{xy^3}{x^4+y^2}.$$

Aides : on pourra utiliser que $x^4 + y^2 \geq 2x^2|y|$ et, pour (iii), on pourra étudier la dérivée de $f \circ \lambda$, où $\lambda(t) = (t, t^2 \sin(1/t))$ si $t \neq 0$ et $\lambda(0) = (0,0)$.

b) On note r et θ les coordonnées polaires sur le plan (ce sont des fonctions de x et y). Soit f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{r}{\theta} & \text{si } \theta \in]0,\pi[\\ \frac{-r}{\theta+\pi} & \text{si } \theta \in]-\pi, 0[\\ 0 & \text{si } \theta = 0 \text{ ou } \pi. \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ selon tout vecteur. Montrer cependant que f n'est pas continue en $(0,0)$.

c) Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces vectoriels normés, E de dimension finie, et x_0 un point de E. Quels liens logiques y a-t-il entre les propriétés suivantes ?

(i) f est différentiable en x_0,
(ii) f admet en x_0 des dérivées directionnelles suivant tout vecteur (non nul),
(iii) f admet des dérivées partielles en x_0,
(iv) f est continue en x_0,
(v) f est de classe C^1 sur un voisinage de x_0.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

a) Prouver que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et que $Df(x,y)$ est bijective en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

b) L'application f est-elle injective ?

Exercice 3.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 1 en un point x_0. En déduire l'expression de la différentielle $Df(x_0)$ à l'aide de $f'(x_0)$.

b) Rappeler la formule donnant la différentielle de $(g \circ f)$ à l'aide des différentielles de f et g. Ecrire la formule pour f, g deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et retrouver ainsi la formule donnant la dérivée de $g \circ f$ à l'aide de celles de f et de g.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ différentiable telle que $f(0) = 0$. Si Df_0 ne possède aucun valeur propre égal à 1, alors il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^m$ tel que $f(x) \neq x$ pour chaque $x \in U \setminus \{0\}$.

Exercice 5. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\phi(f(x)) = 0$ pour chaque $x \in U$. Montrer que si $a \in U$ est tel que $\operatorname{grad.} \phi(b) \neq 0$, où $b = f(a)$, alors $\det Df(a) = 0$.

Exercice 6. a) Soit $p : (0, 2\pi) \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$ la fonction « coordonnées polaires »

$$(\theta, r) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Montrer que p définit un difféomorphisme entre $(0,2\pi) \times \mathbb{R}_{>0}$ et un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

b) Justifier l'énoncé suivant trouvé dans une livre de physique : « On écrit la fonction $z = f(x,y)$ en coordonnées polaires et on trouve

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta. \text{ »}$$

Exercice 7. Soit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ qui sont inversibles et soit $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ la fonction $X \mapsto X^{-1}$. On veut montrer que f est différentiable et calculer sa dérivée.

a) Rappeler que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathbb{R}^{n^2}$.

b) Montrer que si X est une matrice $n \times n$ telle que $\|X\| < 1$, alors $I - X$ est inversible et son inverse est $\sum_0^\infty X^k$.

c) Écrire

$$\begin{aligned}(A+V)^{-1} &= \left((I + VA^{-1}) \cdot A\right)^{-1} \\ &= A^{-1} \cdot (I + VA^{-1})^{-1},\end{aligned}$$

et, à l'aide de la question précédente, trouver une candidate pour $Df(A)$.

d) Montrer que f est différentiable.

Exercice 8.

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (\sin(x+y), 2xy^3, ye^x)$.
(i) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ en un point (x_0, y_0) et écrire la matrice jacobienne.
(ii) Rappeler le lien entre dérivées partielles et différentielle et donner la valeur de $Df(x_0,y_0)(\vec{h})$ pour un vecteur $\vec{h} = (h_x, h_y)$ quelconque.
(iii) Ecrire l'approximation de $f(x_0 + \vec{h})$ fournie par la différentielle et donner la version matricielle.

b) Mêmes questions pour la fonction définie par $g(a,b,c) = (2a + ab^2c^3, ae^b)$.

c) Comment obtient-on la matrice de l'application linéaires $D(f \circ g)(a,b,c)$ à partir de celles de Df et Dg ?

Exercice 9. Montrer que la boule ouverte unitaire de $\mathbb{R}^n$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Exercice 10. Montrer que le système suivant admet une unique solution.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos(x+y) \\ y = \frac{1}{2}\sin(x-y) \end{cases}$$

Aide : on pourra penser à utiliser l'inégalité des accroissements finis puis le théorème de point fixe de Picard.

Exercice 11. Soit $X = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que l'application

$$f \mapsto \int_0^1 f^3(t)dt$$

de X dans $\mathbb{R}$ est différentiable, et calculer sa différentielle.

Exercice 12. a) Soit $\phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire. Montrer que ϕ est différentiable partout et que

$$D\phi(a,b) \cdot (v,w) = \phi(v,b) + \phi(a,w).$$

Rémarquer que la preuve donnée se généralise facilement au cas de fonctions multilinéaires. (On pourra démontrer et utiliser que $|\phi(u,v)| \leq C \cdot |u| \cdot |v|$.)

b) Soit $\delta : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n} \to \mathbb{R}$ le déterminant. Utiliser la question précédente pour calculer

$$D\delta(A_1, \ldots, A_n) \cdot (V_1, \ldots, V_n) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \delta}{\partial x_{ij}}(A).$$

c) Utiliser la question précédente pour montrer que si $\alpha : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une fonction différentiable telle que $\det \alpha(t) = 1$, alors $\operatorname{Tr} \alpha'(t_0) = 0$, où $\alpha(t_0) = I$.

Exercice 13. a) Montrer que l'application $\alpha : x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$, de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, est différentiable en tout x_0 non nul, et donner sa différentielle.

b) Montrer que α n'est pas différentiable en 0.

c) Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ une application de classe C^1. Donner une formule pour la dérivée de la fonction qui associe à t la distance de 0 à $\gamma(t)$. Interpréter géométriquement l'annulation de cette dérivée.

Exercice 14. Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ a mesure nulle si pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement dénombreable de K par de cubes $C_i = [a_i, b_i] \times \cdots \times [a_i, b_i]$ tels que $\Sigma_i (b_i - a_i)^n < \epsilon$. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, et $K \subset U$ un compact avec mesure nulle. Montrer $f(K)$ a également mesure nulle. On pourra procéder comme suit.

a) Montrer pour chaque $a \in K$, il existe une boule ouverte B_a centrée en a, un $k_a \geq 0$ tels que $\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq k_a \|x - y\|_\infty$ pour tout $x, y \in B_a$. (Ici $\|x\|_\infty = \max |x_i|$.)

b) Montrer que $f(K \cap B_a)$ a mesure nulle.

c) Montrer que $f(K)$ peut être couvert par une réunion finie d'ensembles de mesure nulle et conclure.

Utiliser ce résultat pour montrer si $N > n$, alors l'image d'une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^N$ ne peut pas contenir une boule ouverte.

Exercice 15. Soit n un entier ≥ 1, on note $\|.\|_2$ la norme euclidienne standard sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On considère l'espace vectoriel E des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui sont de classe C^1. On munit E des deux normes définies de la façon suivante :

$$N_0(\gamma) = \mathrm{Sup}\{\|\gamma(t)\| \mid t \in [0, 1]\}$$

et

$$N_1(\gamma) = N_0(\gamma) + N_0(\gamma').$$

Etant donnée $\gamma \in E$, on définit la longueur de γ par la formule

$$\mathrm{Long}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2 \, dt.$$

a) On munit ici E de la norme N_1. Soit $\gamma_0 \in E$ un vecteur non nul. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$, $\gamma \mapsto \mathrm{Long}(\gamma)$ est différentiable en γ_0 et calculer sa différentielle.

b) On munit maintenant E de la norme N_0. On veut montrer qu'avec cette norme, l'application $\gamma \mapsto \mathrm{Long}(\gamma)$ n'est même pas continue. Soit $\gamma_0 : t \mapsto (t, 0, \ldots, 0)$.

   i) Soit $\varepsilon > 0$ et M un entier. Calculer la longueur de la courbe

   $$\gamma_{\varepsilon,M} : t \mapsto \gamma_0(t) + \varepsilon(\cos(Mt), \sin(Mt)).$$

   Dessiner cette courbe pour ε très petit et M très grand.

   ii) Conclure en choisissant des valeurs de ε et de M.

Exercice 16. *Difficile, mais très joli !* On souhaite démontrer le théorème de Liapounov.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, une application de classe C^1. On suppose que $f(0) = 0$ et on note $A = Df(0)$. Le but de l'exercice est de comparer le comportement des solutions du système différentiel non linéraire :

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x. \end{cases}$$

à celui du système linéarisé au voisinage du point d'équilibre 0 :

$$\begin{cases} z' = Az \\ z(0) = x. \end{cases}$$

On suppose que toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative. On note (.) le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $||.||$, la norme euclidienne correspondante.

a) Soient $\lambda_1, ..., \lambda_k$, les valeurs propres distinctes de A. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$||e^{tA}x|| \lesssim \Big(\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\Big)||x||.$$

Dans le cas général (A n'est plus supposée diagonalisable), on peut montrer (en utilisant la décomposition de $\mathbb{C}^n$ en sous-espaces caractéristiques de A) qu'il existe un polynôme P tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$||e^{tA}x|| \leqslant P(|t|)\Big(\sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_j)}\Big)||x||$$

b) En déduire le comportement de z(t) lorque $t \to +\infty$. On dit que l'origine est un point d'équilibre attractif.

c) Montrer que l'inégrale donnée ci-dessous définie une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$, et que la forme quadratique associée $q(x) = b(x, x)$ (appelée fonction de Liapounov) est définie positive.

$$b(x, y) = \int_0^{+\infty} (e^{tA}x.e^{tA}y)dt.$$

d) Vérifier l'égalité :

$$grad\ q(x).Ax = 2b(x, Ax) = -||x||^2$$

Dans la suite, on admet l'existence d'une solution $y(t)$ du problème initial, définie pour tout $t \geqslant 0$. On note $r(y) = f(y) - Ay$.

e) Vérifier l'égalité

$$q'(y) = -||y||^2 + 2b(y, r(y))$$

et montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que l'inégalité $q(y) \leqslant \alpha$ entraîne

$$-||y||^2 + 2b(y, r(y)) \leqslant -\beta q(y).$$

Aide : on pourra remarquer que la forme quadratique q définit une norme. On écrira la différentiabilité de f en 0.

f) En déduire que l'inégalité $q(x) < \alpha$ entraîne $q(y(t)) \leqslant \alpha$ pour tout $t \geqslant 0$, puis en déduire (par un argument de type Gronwall) l'inégalité suivante :

$$q(y(t)) \leqslant e^{-\beta t} q(x).$$

Moralité de l'histoire : On obtient au final que la solution du système non linéraire tend exponentiellement vite vers 0. Ainsi, sous l'hypothèse de valeurs propres à partie réelle strictement négative pour $A = Df(0)$, la propriété "l'origine est un point d'équilibre attractif" se transmet du système linéaire $z' = Az$ au système non linéaire $y' = f(y)$.