

TD n°5. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues

1 Généralités sur les espaces normés

Exercice 1 (Vrai ou faux?). Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, et suivant le cas, en donner une preuve ou trouver un contre-exemple.

- L'application $N : (x, y) \mapsto |2x + 7y|$ est une norme sur \mathbb{R}^2 ;
- L'application $N : P \mapsto |P(0)| + |P(1)| + |P(2)| + |P(3)|$ est une norme sur l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3 ;
- Dans un espace vectoriel normé E , pour tout $v \in E$, l'application $x \mapsto x + v$ est continue.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé, et $a \in E$. Démontrer que, pour tout $r > 0$, l'adhérence de la boule ouverte $B_o(a, r)$ est la boule fermée $B_f(a, r)$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

- Montrer que \bar{F} est un sous-espace vectoriel de E .
- Montrer que si F n'est pas d'intérieur vide, alors F est dense dans E .

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé, $F \subset E$ un sous-espace de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E .

Exercice 5 (Identité du parallélogramme). Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. On dit que la norme $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallélogramme si

$$\forall x, y \in E, \quad \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

- On suppose que $\forall x, y \in E, \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Montrer que $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallélogramme.
- Montrer que si la norme $\|\cdot\|$ dérive d'un produit scalaire sur E , elle vérifie l'identité du parallélogramme.
- (plus difficile) Montrer que réciproquement, si $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallélogramme, elle dérive d'un produit scalaire.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel, d une métrique sur E . Montrer qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que d est la métrique associée à $\|\cdot\|$ si et seulement si d est telle que :

- $\forall x, y, z \in E, \quad d(x + z, y + z) = d(x, y)$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in E, \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$.

Exercice 7. On définit une application sur $M_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad N(A) = n \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{i,j}|.$$

Démontrer que N est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme *sous-multiplicative*, c.-à-d.

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \quad N(AB) \leq N(A)N(B).$$

Exercice 8 (Exponentielle matricielle). On admet qu'il existe des normes sous-multiplicatives sur $M_n(\mathbb{C})$ (voir l'exercice précédent).

- Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} M^k$ est convergente. On note $\exp(M)$ sa limite.
- Démontrer que, pour toute $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp(M)$ s'écrit comme un polynôme en M . En particulier, M et $\exp(M)$ commutent.
- Démontrer que :
 - Pour toute $M \in M_n(\mathbb{C})$, ${}^t \exp(M) = \exp({}^t M)$;
 - Pour toute $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp(M)$ est inversible, d'inverse $\exp(-M)$;
 - Pour $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PNP^{-1}$, alors $\exp(M) = P \exp(N) P^{-1}$;
 - Pour $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, si $MN = NM$, on a $\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$.
- Comment définirait-on le « cosinus » d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$?

2 Autour des applications linéaires continues

Exercice 9. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $\ell : E \rightarrow F$ une application linéaire.

a) Si ℓ est continue, montrer que

$$\|\ell\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\ell(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|\ell(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E < 1} \|\ell(x)\|_F = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\ell(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

b) Montrer que ℓ est continue si et seulement s'il existe un réel M tel que pour tout x dans E , on ait $\|\ell(x)\|_F \leq M\|x\|_E$; et que dans ce cas, $\|\ell\| = \inf \{M \geq 0 : \forall x \in E, \|\ell(x)\|_F \leq M\|x\|_E\}$.

Exercice 10 (Exercice de rédaction). Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et $\ell : E \rightarrow F$. On suppose que l'image par ℓ de toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 est bornée. Montrer que ℓ est continue. On raisonnera par contraposée en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $x_n \in E \setminus \{0\}$ tel que $\|\ell(x_n)\| \geq n\|x_n\|$. À partir de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on construira une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que $\|\ell(y_n)\|$ n'est pas bornée.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel normé, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E , à valeurs dans E .

a) Montrer que, pour tous $T, U \in \mathcal{L}(E)$, on a $\|U \circ T\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|U\|_{\mathcal{L}(E)}\|T\|_{\mathcal{L}(E)}$, c.-à-d. la norme d'opérateur est *sous-multiplicative*.

b) En déduire que, si $U \in \mathcal{L}(E)$ est fixé, les deux applications

$$\mathcal{L}(E) \ni T \mapsto U \circ T \in \mathcal{L}(E) \quad ; \quad \mathcal{L}(E) \ni T \mapsto T \circ U \in \mathcal{L}(E)$$

sont des applications linéaires continues.

c) Existe-t-il nécessairement sur $\mathcal{L}(E)$ des normes *multiplicatives*, c.-à-d. telles que $\|U \circ T\|_{\mathcal{L}(E)} = \|U\|_{\mathcal{L}(E)}\|T\|_{\mathcal{L}(E)}$, pour tous $T, U \in \mathcal{L}(E)$?

Exercice 12 (Quelques normes matricielles). On munit l'espace vectoriel \mathbb{R}^n des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, respectivement définies par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n (que l'on voit comme l'espace des applications linéaires (continues) sur \mathbb{R}^n), et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices symétriques d'ordre n .

a) Déterminer les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $M_n(\mathbb{R})$, subordonnées respectivement aux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{R}^n .

b) Démontrer que la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ n'est autre que le *rayon spectral*, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\|_2 = \rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Spec}(A)} |\lambda|,$$

où le *spectre* d'une matrice A — $\text{Spec}(A)$ — désigne l'ensemble de ses valeurs propres.

3 Pour aller plus loin, vers la dimension infinie

Exercice 13 (Hyperplans dans un espace vectoriel normé). Soit E un evn sur \mathbb{K} , avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On rappelle qu'un *hyperplan* de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .

a) Soit φ une forme linéaire non continue sur E . Construire une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers 0, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(y_n) = 1$.

b) Montrer qu'un hyperplan $H = \text{Ker}(\varphi)$ de E est soit fermé dans E , auquel cas l'application φ est continue, soit dense dans E , auquel cas φ n'est pas continue.

Exercice 14. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, sur lequel on définit l'application :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X], \quad \|P\|_\infty = \sup_{k=0, \dots, n} |a_k|.$$

- a) Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
 b) Soit $T : \mathbb{R}[X] \ni P \mapsto XP \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que T est une application linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 15. Sur l'espace $\mathbb{R}[X]$, on définit les applications :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k, \|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|; \|P\|_\infty = \max_{k=0, \dots, n} |a_k|; \|P\|_* = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

Montrer que ce sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$, et qu'elles sont deux à deux non équivalentes. On pourra à cet effet considérer les polynômes $P_n(t) = (t-1)^n$, et $Q_n(t) = 1 + t + \dots + t^n$.

3.1 Applications linéaires continues dans les espaces de suites et de fonctions

Exercice 16. Soit $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. On définit

$$\forall f \in X, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx; \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

- a) Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent deux normes sur X .
 b) Étudier la continuité de chacune des applications suivantes, et lorsqu'elles sont continues, calculer leur norme d'opérateur :

i)

$$T_1 : \begin{array}{ccc} (X, \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

ii)

$$T_2 : \begin{array}{ccc} (X, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

iii)

$$T_3 : \begin{array}{ccc} (X, \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (X, \|\cdot\|_\infty) \\ f & \longmapsto & f \end{array}$$

iv)

$$T_4 : \begin{array}{ccc} (X, \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (X, \|\cdot\|_1) \\ f & \longmapsto & \left[x \mapsto \int_0^x f(t) dt \right] \end{array}$$

v)

$$T_5 : \begin{array}{ccc} (X, \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt \end{array}$$

Exercice 17. Soit $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, sur lequel on définit l'application :

$$\forall f \in X, \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}.$$

- a) Montrer que $\|\cdot\|_2$ définit une norme sur X . On pensera à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 b) Soit $g \in X$. On définit une application $T : X \rightarrow X$ par $\forall f \in X, T(f) = gf$. Montrer que T est linéaire, continue, et calculer sa norme.

Exercice 18. Soit ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites bornées à valeurs dans \mathbb{R} , muni de la norme

$$\|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)|.$$

- a) Soit $T : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ l'application définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, (T(x))(k) = x(k+1)$. Montrer que T est une application linéaire continue sur ℓ^∞ et calculer sa norme.
 b) Soit $(a(k))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\sum_{k=0}^\infty |a(k)| < \infty$. Montrer que l'application $U : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \ell^\infty, U(x) = \sum_{k=0}^\infty a(k)x(k)$$

est une application linéaire continue et calculer sa norme.

3.2 Espaces de Banach

Exercice 19. Soit $X = \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continument dérivables sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles.

- a) Démontrer que l'application définie par : $\forall f \in X, \|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$ est une norme sur X .
 b) Montrer que la suite $(f_n) \in X^{\mathbb{N}}$, définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x - \frac{1}{n} \sin(nx) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

est une suite de Cauchy de X . En déduire que X , muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas complet.

- c) On définit

$$N(f) = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [-1, 1]} |f'(x)|.$$

Montrer que X , muni de la norme N est complet. *On considèrera une suite de Cauchy de E , et on se ramènera au cas de deux suites de Cauchy de $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, qui est complet. On utilisera enfin le fait que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, $f \in E$ et $f' = g$ si et seulement si $f(x) = \int_{-1}^x g(t) dt$.*

Exercice 20 (Inégalités de Hölder et de Minkowski). Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\ell^p = \left\{ (x_n)_{n \geq 0}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$, l'espace vectoriel des suites p -sommables.

- a) Démontrer l'inégalité de Young : si p, q sont deux entiers naturels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $a, b \in \mathbb{R}_+$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

On pourra utiliser la convexité de l'application $x \mapsto e^x$.

- b) Démontrer l'inégalité de Hölder : si p, q sont deux entiers naturels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

- c) Démontrer l'inégalité de Minkowski : si p, q sont deux entiers naturels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On pourra se ramener à l'inégalité de Hölder avec des exposants p, q , et des suites judicieusement choisis.

En déduire que l'écriture $\|(x_n)\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur ℓ^p .

Exercice 21 (Théorème de Volterra). (*difficile*) Soit $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $g \in X$, et $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et bornée telle que :

$$\forall s, t \in [0, 1], s > t \quad K(s, t) = 0.$$

Démontrer que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation intégrale de Volterra

$$\forall t \in [0, 1], f(t) + \lambda \int_0^1 K(s, t) f(s) ds = g(t),$$

admet une unique solution $f \in X$. *On pourra considérer l'espace X muni de la norme uniforme, qui est complet, et l'application $T_g : X \rightarrow X$, définie par $T_g(f) = f - \lambda \int_0^1 K(s, \cdot) f(s) ds - g$, montrer qu'il existe une puissance $n \in \mathbb{N}$ telle que T_g^n est contractante, et utiliser un corollaire du théorème de Picard.*