TD n°4. Connexité

Exercice 1. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles connexes par arcs ? connexes ?

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x|\leq 1,\, |y|\leq 1\},\quad \mathbb{R}^2\backslash\{0\},\quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2=1\},$$

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | |x|>1 \text{ et } |y|>1\},\quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x=1 \text{ ou } x=-1 \text{ ou } y=1 \text{ ou } y=-1\}$$

Exercice 2. Soient X et Y deux espaces métriques. Un homéomorphisme $X\to Y$ est une bijection continue d'inverse continue (s'il existe un tel homéomorphisme, on dit que X et Y sont homéomorphes).

a) Montrer que les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x>0\,\text{et}\,y>0\}\quad \text{et}\quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x<0\,\text{et}\,y>0\}.$$

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y=e^{-x}\}\quad \text{et}\quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x=\cos y\}.$$

b) Montrer que $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $[0,1[$, $[0,1]$ et $\mathbb{S}^1:=\{z\in\mathbb{C},|z|=1\}$ sont deux à deux non homéomorphes.

c) Classer les lettres de l'alphabet (en majuscule) par classe d'homéomorphisme.

Exercice 3. Montrer qu'un plan privé d'un nombre fini de points est connexe.

Exercice 4. Soit $\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C}||z|=1\}$. Soit $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $z\in\mathbb{S}$ tel que $f(z)=f(-z)$. *Indication : On pourra étudier le signe de la fonction $z\mapsto f(z)-f(-z)$.*

Exercice 5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ une application continue. Montrer que f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Exercice 6. Quelles sont les composantes connexes par arcs de $\mathbb{Q}$? Quelles sont les composantes connexes par arcs de $\{0,1\}$? de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$?
Indication : On pourra montrer que pour tout $i\in\mathbb{N}$, l'application P_i qui a une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe x_i est continue.

Exercice 7. Soit F un fermé non-vide et non connexe de X espace métrique. Montrer qu'il existe deux fermés non-vides et disjoints F_1 et F_2 tel que $F=F_1\cup F_2$.

Exercice 8. Soit X un espace métrique. Soient A et B deux parties fermées de X.

a) On suppose que $A\cup B$ et $A\cap B$ sont connexes, montrer que A et B sont connexes.
Indication : On pourra decomposer $A=F_1\cup F_2$ comme à l'exo précedent. En utilisant $A\cap B$ connexe, montrer que $F_1\cap B$ (ou $F_1\cap B$) vide. En déduire que $F_1=\emptyset$.

b) On suppose que $A\cup B$ et $A\cap B$ sont connexes par arcs, montrer que A et B sont connexes par arcs.

c) Les propriétés précedentes restent-elles vraies si A ou B ne sont pas fermés ?

Exercice 9. Soit X un espace métrique compact. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés connexes. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n$ est un fermé connexe.

Exercice 10. Soit X et Y deux espaces métriques non vides.

a) Montrer que $X\times Y$ est connexe par arcs si et seulement si X et Y sont connexes par arcs.
Indication : On pourra commencer par montrer que $\{x\}\times Y$ est connexe par arcs pour tout $x\in X$.

b) Montrer que les composantes connexes par arcs de $X\times Y$ sont de la forme $A\times B$ où A et B sont des composantes connexes par arcs de X et de Y.

Exercice 11. Soit $X:=\{(x,\sin(\frac{1}{x}))\}_{x\in]0,\infty[}\cup\{(0,y)\}_{y\in[-1,1]}\subset\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que X est connexe.

b) Montrer que X n'est pas connexe par arcs.
Indication : On suppose qu'il existe $\gamma:[0,1]\to X$ continue, $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, tq $\gamma(0)=(\frac{1}{\pi},0)$ et $\gamma(1)=(0,0)$. On note $t_0=\sup\{t>0 \text{ tq } x(t)>0\}$. On montre que $x(t_0)=0$ et que $\forall z\in[-1,1]$, il existe $r_n\to t_0$ tq $0<x(r_n)\to x(t_0)$ et $y(r_n)=z$. Ceci permet de contredire la continuité de y.

Exercice 12. On se place dans $M_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble des matrices de taille $n \times n$.

a) Montrer que $GL_n(\mathbb{R}) := \{M \in M_n(\mathbb{R}) | \det(M) \neq 0\}$ est un ouvert non connexe de $M_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $GL_n(\mathbb{C}) := \{M \in M_n(\mathbb{C}) | \det(M) \neq 0\}$ est un ouvert connexe par arcs de $M_n(\mathbb{C})$. *Indication : on pourra utiliser le fait que le polynôme* $z \mapsto \det((1-z)A + zB)$ *admet un nombre fini de racines et l'exo 3.*

c) Montrer que $SL_n(\mathbb{R}) := \{M \in GL_n(\mathbb{R}) | \det(M) = 1\}$ est un fermé connexe par arcs de $M_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisable de $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercice 13. Montrer qu'un espace métrique (X, d) est connexe si et seulement si toute fonction continue $X \to \{0, 1\}$, où $\{0, 1\}$ est muni de la distance discrète ($\delta(x, y) = 1$ si $x \neq y$, 0 sinon) est constante. En déduire qu'une réunion quelconque de connexes ayant un point commun est connexe.

Exercice 14. Soient A et B deux parties connexes d'un espace métrique X. On suppose que $A \cap \bar{B}$ n'est pas vide. Montrer que $A \cup B$ est connexe. La conclusion reste-t-elle vraie si on suppose seulement $\bar{A} \cap \bar{B}$ non-vide ?

Exercice 15. Considérons les peignes de $\mathbb{R}^2$:

$$P_1 = (\mathbb{R} \times \{1\}) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \times [0, 1] \right),$$

$$P_1 = (\mathbb{R} \times \{-1\}) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x + \sqrt{2}\} \times [-1, 0] \right).$$

Montrer que $P_1 \cup P_2$ est connexe, mais n'est pas connexe par arcs.

Pour aller plus loin...

Exercice 16. Soit X un espace métrique connexe. Montrer que pour tout $x, y \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une ϵ-chaîne joignant x et y (i.e. il existe $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n \in X$ tels que $x_0 = x, x_n = y$ et $\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$).
Montrer qu'un espace métrique X compact bien enchaîné (i.e. $\forall\, x, y \in X$ et $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe une ε-chaîne joignant x et y) est connexe.

Exercice 17. Soient $A_n = \{(\frac{1}{n}, y, 0), 0 \leq y \leq 2n+1\}$, $B_n = \{(0, y, 0), 2n-1 \leq y \leq 2n+1\}$ et $C_n = \{(x, 2n, x(\frac{1}{n} - x), 0 \leq x \leq \frac{1}{n}\}$ et $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cup B_n \cup C_n) \subset \mathbb{R}^3$. Montrer que X est connexe mais n'est pas connexe par arc.

Exercice 18. Soit X un espace métrique compact et connexe. Montrer que l'ensemble des fermés non vides de X, muni comme dans l'exercice 11 de la feuille 3 de la distance

$$\delta(F_1, F_2) = \max(\sup_{x \in F_2} d(x, F_1), \sup_{x \in F_1} d(x, F_2)),$$

est connexe.

Exercice 19. Si (X, d) est un espace métrique, on munit l'espace $\Omega X := \{f \in \mathcal{C}([0, 1], X) | f(0) = f(1)\}$ de la distance uniforme

$$d(f_1, f_2) = \sup_{x \in [0,1]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

a) Montrer que si $f : X \to Y$ est une application continue, l'application $\Omega f : \Omega X \to \Omega Y$ qui à g associe $f \circ g$ est continue (on pourra commencer par montrer que si K est un compact de X, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in K$ et x' in X, $d(x, x') \leq \eta \implies d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$).

b) Montrer que $\Omega \mathbb{R}^n$ est connexe.

c) On considère $X_0 = \mathbb{C} \backslash 0$. Montrer que X_0 est localement connexe.

d) Si $n \in \mathbb{Z}$, on définit $f_n \in \Omega X_0$ par $f_n(x) = e^{2i\pi nx}$. Montrer que pour toute composante connexe de X_0, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f_n \in X_0$ (on pourra montrer que l'application $\{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C}) | f(1) - f(0) \in \mathbb{Z}\} \to \Omega X_0$ qui à f associe $e^{2i\pi f}$ est surjective).

e) En déduire que $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ ne sont pas homéomorphes.