TD n°3. Compacité

1 Exemples d'espaces compacts

Exercice 1. Déterminer si les sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ suivants sont compacts :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant e^x,\ x \geqslant 0,\ x+y \leqslant 2\},$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > e^x,\ x \geqslant 0,\ x+y \leqslant 2\}.$$

Exercice 2. Soient K et L deux parties compactes d'un espace métrique X. Montrer que $K \cup L$ est une partie compacte.

Exercice 3. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$, qu'on identifie à $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrer que $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I\}$ est compact.

Exercice 4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite notée x, d'un espace métrique X. Montrer que $A := \{x\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie compacte de X.

Exercice 5. Soit A et B deux fermés de $\mathbb{R}^n$. Soit $A + B = \{a+b, (a,b) \in A \times B\}$.

a) Montrer que, si A et B sont compacts, $A + B$ est compact.

b) Montrer que, si A est compact et B est fermé, $A + B$ est fermé.

c) $A + B$ est-il nécessairement fermé pour A et B fermés quelconques ?

2 Propriétés des espaces compacts

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique dont toute boule fermée $B_f(x, r) = \{y \in X,\ \ d(x,y) \leqslant r\}$ est compacte.

a) Montrer que X est complet.

b) Montrer que les parties compactes de X sont les sous-ensembles fermés bornés.

Exercice 7. On se place dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues qu'on munit de la métrique

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

On veut montrer que la boule unité fermée n'est pas compacte. Pour cela on donne deux exemples de suites sans valeur d'adhérence. Formaliser et comparer à l'exercice précédent.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Dessiner une fonction continue $f_n : [0,1] \to [0,1]$, qui s'annule en dehors de l'intervalle $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ et qui prend la valeur 1 au milieu de l'intervalle. Que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $g_n(x) = x^n$. Pour n fixé, que vaut $d_\infty(g_n, g_m)$ lorsque m est très grand ?

Exercice 8. Soit X un espace métrique et A un sous-espace compact non vide de X. Montrer qu'il existe un ensemble dénombrable dense dans A.
Indication : Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on considère un recouvrement avec des boules de rayon $\frac{1}{n}$.

Exercice 9. Soit (E, d) un espace métrique compact et soit (x_n) une suite d'éléments de E admettant une unique valeur d'adhérence x. Montrer que (x_n) converge vers x.

Exercice 10. Si (X, d) est un espace métrique non vide compact. On note $\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,y\in X} d(x,y) \in [0, +\infty]$.

a) Montrer que $\operatorname{diam}(X)$ est fini et il existe $x, y \in X$ tels que $\operatorname{diam}(X) = d(x,y)$.

b) Montrer que, si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de X, alors $F := \bigcap_n F_n$ est un compact non vide de X et $\operatorname{diam}(F) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n)$.

c) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite décroissante de fermés d'un espace complet, $F := \bigcap_n F_n$ est-il nécessairement non vide ?

Exercice 11. Soit (X, d) un espace métrique et soit F un fermé non vide de X et $F \neq X$.

a) Soit K un compact non vide tel que $K \cap F = \emptyset$. Montrer que $d(K, F) := \inf_{x \in K, y \in F} d(x, y)$ est strictement positif. Ce résultat est-il vrai si F est seulement supposé

b) Soit $\varepsilon > 0$. On définit $K_\varepsilon := \{x \in X, \ \ d(x, K) < \varepsilon\}$. Soit Ω un ouvert de X, $\Omega \neq X$, tel que $K \subset \Omega$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon \subset \Omega$.

c) Montrer que, si F est compact, alors il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $d(K, F) = d(x, y)$.

Exercice 12. On note E l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$.

a) Soit F un fermé non borné de E et $f : F \to \mathbb{R}$ une application continue telle que :

$$\lim_{x \in F, \|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer qu'il existe x dans F vérifiant $f(x) = \inf_{y \in F} f(y)$.

b) En déduire une démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss : montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$.
Indication : Si $|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| > 0$, contruire un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z)| < |P(z_0)|$.

c) Soit K est un compact de E et soit F est un fermé de E. Montrer qu'il existe $x \in K$, $y \in F$ vérifiant : $d(x, y) = d(K, F)$. Ce résultat reste-t-il vrai si E est un espace vectoriel normé de dimension infinie ?

Exercice 13. a) Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques avec (X, d) compact. Soit $f : X \to Y$ bijective et continue. Montrer que Y est compact et que f est un homéomorphisme. *On peut reformuler cette propriété comme suit : si f est continue et injective, définie sur un espace compact, alors f est un homéomorphisme sur son image.*

b) Soit $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{it}$. Montrer que f est continue et injective. Montrer que la réciproque n'est pas continue. Comparer à la question précedente.

Exercice 14. Soit X un espace métrique compact. On munit l'ensemble $X^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \to X\}$ de la distance suivante

$$\delta(u, v) = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \min(1, d(u(k), v(k))).$$

a) Vérifier que δ est effectivement une distance.

b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $X^{\mathbb{N}}$ et soit $u \in X^{\mathbb{N}}$. Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \delta(u_n, u) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \to \infty} d(u_n(k), u(k)) = 0.$$

c) Montrer que $(X^{\mathbb{N}}, \delta)$ est compact.

d) Montrer que U est un ouvert de $(X^{\mathbb{N}}, \delta)$ si et seulement si pour tout x dans U, il existe une partie finie J de $\mathbb{N}$ et un réel strictement positif α vérifiant :

$$\forall y \in X^{\mathbb{N}}, \forall j \in J, \quad d(y(j), x(j)) < \alpha \Rightarrow y \in U.$$

Exercice 15 (Partiels 2010, 2012)**.** Soit K un ensemble convexe et compact non vide d'un espace vectoriel normé. Soit $f : K \to K$ une application vérifiant :

$$\forall x, y \in K \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|.$$

Soit a dans K. Pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$ on considère l'application f_k définie par

$$f_k(x) = \frac{1}{k} f(a) + \left(1 - \frac{1}{k}\right) f(x).$$

a) Montrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, f_k envoie K dans K et admet un unique point fixe.
On note x_k ce point fixe.

b) Supposons un instant que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x. Montrer que $f(x) = x$.

c) En déduire que, dans le cas général, f admet un point fixe.

d) L'application f admet-elle un unique point fixe ? (Donner une démonstration ou un contre-exemple.)

Remarque : Toute application continue d'un convexe compact non vide K d'un espace de Banach à valeurs dans K admet un point fixe (théorème du point fixe de Schauder).

Exercice 16. Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et $f : E \to E$ une application vérifiant :

$$\forall x, y \in E, x \neq y, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

a) La fonction f admet-elle nécessairement un point fixe ? (Considérer $E = [1, \infty[$ et $f(x) = x + \frac{1}{x}$.). Dans la suite on suppose de plus que E est compact.

b) Montrer que f admet un unique point fixe a.
Indication : On pourra étudier la fonction $x \mapsto d(f(x), x)$.

c) Soit $x_0 \in E$ et soit $x_{n+1} := f(x_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) converge vers a quand n tend vers ∞.

Exercice 17. Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant :

$$\forall x, y \in E \quad d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y).$$

a) Montrer que f est une isométrie, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

On pourra procéder comme suit :

i) Fixer x et x' distincts tels que $d(f(x), f(x')) > d(x, x')$; montrer qu'il existe une extraction φ telle que $f^{\varphi(n)}(x)$ et $f^{\varphi(n)}(x')$ convergent.

ii) Poser $\varepsilon = \frac{d(f(x),f(x'))-d(x,x')}{2}$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(f^{\varphi(n_0+1)}(x), f^{\varphi(n_0)}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ et de même pour x'.

iii) Soit $n_1 = \varphi(n_0+1) - \varphi(n_0) \geqslant 1$. Montrer que $d(x, f^{n_1}(x)) < \varepsilon$, puis conclure à une contradiction en majorant $d(f(x), f(x'))$.

b) Montrer que f est bijective. Pour la surjectivité on pourra procéder comme suit :

i) Soit $x_0 \in E$. On pose $\alpha = \inf_{z \in Z} d(x_0, z)$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $d(x_0, x_n) \geqslant \alpha$ pour tout $n \geqslant 1$, puis que $d(x_n, x_m) \geqslant \alpha$ pour tout $n \neq m$.

ii) Montrer que $\alpha = 0$ et en déduire que $x_0 \in Z$.

Ainsi, un étirement d'un compact est une isométrie bijective. C'est évidemment faux si l'espace n'est pas compact !

c) Soit $g : E \to E$ une application bijective vérifiant :

$$\forall x, y \in E \quad d(g(x), g(y)) \leqslant d(x, y).$$

Montrer que g est une isométrie.

3 Pour aller plus loin. . .

Exercice 18. Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement s'il est précompact (c'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0$, X peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε) et complet.

Exercice 19. Soit (X, d) un espace métrique compact et soit Y l'ensemble des fermés non vides de X. Considérons $\delta : Y^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\delta(F_1, F_2) = \max\left(\sup_{x \in F_1} d(x, F_2), \sup_{x \in F_2} d(x, F_1)\right).$$

a) Montrer que pour tout $x \in X$ et $A, B \in Y$, $d(x, A) \leqslant d(x, B) + \delta(A, B)$. En déduire que δ est un distance.

b) Soit $\varepsilon > 0$ et $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que X est l'union des boules ouvertes de centre x_i et de rayon ε. Pour $I \subset \{1, \ldots, n\}$, on note $F_I = \{x_i\}_{i \in I} \in Y$. Montrer que Y est recouvert par les boules de centre F_I et de rayon ε quand I parcourt toutes les parties de $\{1, \ldots, n\}$.

c) Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (Y, δ). Montrer que F_n converge vers $\overline{\bigcup_n \bigcap_{k \geqslant n} F_k}$. En déduire que Y est compact.