TD n°2. Complétude

1 Suites de Cauchy, diamètre

Exercice 1.

a) Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy (on pourra minorer le terme $u_{2n} - u_n$). Conclusion ?

b) Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$, quels sont les intervalles complets ?

Exercice 2. Vrai ou faux ?

a) Toute suite de Cauchy est bornée.

b) Toute suite convergente dans $\mathbb{Q}$ est de Cauchy.

c) Puisque $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers 0, la suite $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour la distance usuelle dans $\mathbb{R}$.

d) Si $f : X \to Y$ est continue et si $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans X alors $(f(u_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans Y.

Exercice 3. Montrer que toute série réelle absolument convergente est convergente.
Indication : montrer que la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy.

Exercice 4. Le *diamètre* d'une partie A d'un espace métrique (X, d) est

$$\mathrm{Diam}(A) = \sup_{(x,y)\in A} d(x, y).$$

Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy si et seulement si la suite $(\mathrm{Diam}(\{u_k | k \geq n\}))_{n\geq 0}$ tend vers 0.
On pourra penser à ce critère comme une indication dans plusieurs des exercices qui suivent.

Exercice 5. Soient d et δ deux distances équivalentes sur un ensemble X.

a) Montrer qu'une suite est de Cauchy pour l'une si et seulement si elle est de Cauchy pour l'autre.

b) En déduire que (X, d) est complet si et seulement si (X, δ) l'est.

Exercice 6. Sur $X =]0, +\infty[$, on considère la distance

$$\delta(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

a) Vérifier que δ est bien une distance.

b) Montrer que (X, δ) n'est pas complet (on pourra considérer la suite définie par $x_n = n$).

c) Montrer que la distance δ induit la même topologie que la distance usuelle sur X, que l'on notera d. La distance δ est-elle équivalente à d ?

d) Soit $Y =]0, 1]$. Montrer que (Y, δ) est complet.

e) On dit que la complétude est une propriété métrique et non pas topologique. Pouvez-vous expliquer ?

Exercice 7 (Théorème des fermés emboîtés)**.** Soit (X, d) un espace métrique. On considère la propriété suivante : toute suite $(F_n)_{n\geq 0}$ décroissante de fermés non-vides de X dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non-vide. Montrer que (X, d) est complet si et seulement si cette propriété est vérifiée.

Exercice 8. Soient (X, d), (Y, δ) deux espaces métriques ; on suppose (X, d) complet. Soit $f : X \to Y$ continue. Soit (F_n) une suite décroissante de fermés non-vides de X dont le diamètre tend vers 0. Montrer que $f(\bigcap_n F_n) = \bigcap_n f(F_n)$. Donner un contre-exemple lorsque X n'est pas complet.

Exercice 9. Soit (X, d) un espace métrique. Pour une suite (x_n) d'éléments de X, on s'intéresse à la propriété :

$$(*) : \quad \forall n \in \mathbb{N}\ d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}.$$

a) Montrer qu'une suite satisfaisant $(*)$ est de Cauchy.

b) Montrer que si (x_n) est de Cauchy, elle a une sous-suite satisfaisant $(*)$.

c) Montrer que E est complet ssi toute suite ayant $(*)$ converge.

2 Quelques exemples importants d'espaces complets ou non

Exercice 10. Soit ℓ_∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la distance uniforme, définie de la façon suivante : pour $x = (x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $y = (y(k))_{k\in\mathbb{N}}$ dans ℓ_∞, on pose

$$d(x, y) = \sup_{k\geq 0} |x(k) - y(k)|.$$

Comme dans la feuille précédente, on note les éléments de ℓ_∞ comme des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, pour clarifier les notations concernant les suites de suites.

a) Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0 \dots\right).$$

Autrement dit, $x_n \in \ell_\infty$ est définie par $x_n(k) = \frac{1}{k}$ si $k \leq n$, et $x_n(k) = 0$ sinon.
Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente, et donner sa limite.

b) Montrer que (ℓ_∞, d) est complet.

c) Soit c_0 le sous-espace de ℓ_∞ formé des suites qui convergent vers 0. Montrer que c_0 est fermé dans ℓ_∞, puis que c_0 est complet.

d) Soit c_{00} le sous-espace de ℓ_∞ formé des suites qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls. Est-il complet ?

Exercice 11. On munit $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la distance

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

a) Montrer que d_1 est effectivement une distance sur X.

b) On définit la fonction $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = 1$ si $x \geq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = nx$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, d_1).

c) Montrer que (X, d_1) n'est pas complet.

Exercice 12. On munit l'espace $\mathcal{C}^1([0, 1], [0, 1])$ de la distance $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.
Cet espace est-il complet ?

3 Théorème de prolongement, complété

Exercice 13 (Théorème de plongement)**.** Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On suppose que (Y, δ) est complet, et on considère une partie $A \subset X$ dense dans X. Soit $f \colon A \to Y$ une fonction uniformément continue.
Montrer qu'il existe une unique fonction continue $g \colon X \to Y$ qui prolonge f, et vérifier que g est uniformément continue.

Exercice 14. Le théorème de prolongement demande de la continuité uniforme. Pouvez-vous donner un exemple de fonction continue, définie sur $\mathbb{R}^*$, qui n'admet pas de prolongement continu à $\mathbb{R}$? De même, donner une fonction continue sur $\mathbb{Q}$ qui n'admet pas de prolongement continu à $\mathbb{R}$.

L'exercice suivant est tout à fait hors programme. Si (X, d) et (Y, δ) sont deux espaces métriques, on dit que $f \colon X \to Y$ est une application isométrique *si pour tout $(x, x') \in X^2$, $\delta(f(x), f(x')) = d(x, x')$. Si en plus f est surjective on dira que c'est une* isométrie.

Exercice 15 (Complété d'un espace métrique)**.** Soit (X, d) un espace métrique. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy dans X.

a) i) Soient $U = (u_n)_{n\geq 0}$ et $V = (v_n)_{n\geq 0}$ deux éléments de $\mathcal{C}$. Montrer que la suite $(d(u_n, v_n))_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{R}_+$. On note $\delta(U, V)$ sa limite.

ii) Montrer que δ est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire (on dit que δ est une *pseudo-distance* sur $\mathcal{C}$).

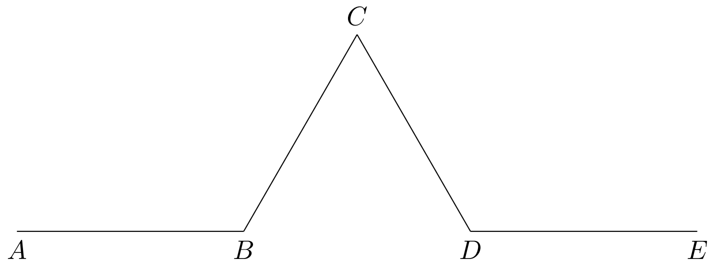
b) On pose, dans $\mathcal{C}$, la relation suivante : $U \sim V$ si $\delta(U,V) = 0$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

On note $\hat{X} = \mathcal{C}/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence. Montrer que si $U \sim U'$ et $V \sim V'$ alors $\delta(U,V) = \delta(U',V')$. En déduire que δ définit une distance (qu'on notera encore δ) sur $\hat{X}$.

c) Exhiber une application isométrique naturelle $i\colon X \to \hat{X}$, d'image dense. Montrer que $\hat{X}$ est complet.

d) Soit $f\colon X \to Y$ une application isométrique d'image dense dans un espace Y complet. Montrer que f s'étend en une isométrie $\hat{f}\colon \hat{X} \to Y$ (on pourra utiliser l'exercice 13).

4 Théorème de point fixe de Picard



L'exercice suivant propose une construction de la courbe "en flocon de neige", appelée aussi courbe de Von Koch. Il s'agit d'un exemple de courbe fractale, qui n'admet pas de tangentes.

Exercice 16. On considère le dessin ci-dessus, où $A = (0,0)$, $B = (1/3,0)$, $D = (2/3,0)$, $E = (1,0)$ et où BCD est équilatóral. Soit X l'ensemble des courbes du plan qui joignent les points $A = (0,0)$ et $E = (1,0)$:

$$X = \{\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \mid \gamma(0) = A, \gamma(1) = E, \gamma \text{ continue}\}.$$

Cet ensemble est muni de la distance uniforme,

$$d(\gamma_1,\gamma_2) = \sup_{t\in[0,1]} d_{\mathbb{R}^2}(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$$

où $d_{\mathbb{R}^2}$ représente la distance euclidienne sur le plan.

a) Montrer, à l'aide du cours, que (X,d) est complet.

Soit h l'homothétie du plan de centre $(0,0)$ et de rapport $1/3$. On remarque que h envoie le segment $[AE]$ sur le segment $[AB]$ (voir le dessin) et multiplie les distances par $1/3$: autrement dit, pour tous points M,N du plan, on a

$$d_{\mathbb{R}^2}(h(M),h(N)) = \frac{1}{3} d_{\mathbb{R}^2}(M,N).$$

On considère alors quatre transformations du plan, H_1,H_2,H_3,H_4, vérifiant les propriétés suivantes.
- $H_1 = h$,
- H_2 envoie le segment $[AE]$ sur le segment $[BC]$,
- H_3 envoie le segment $[AE]$ sur le segment $[CD]$,
- H_4 envoie le segment $[AE]$ sur le segment $[DE]$,
- H_1,H_2,H_3,H_4 multiplient les distances par $1/3$.

b) En utilisant la transformation h et des isométries (translations et rotations), construire H_2, H_3 et H_4 ayant les propriétés voulues.

On considère maintenant la transformation $T : X \to X$ construite de la façon suivante : pour toute courbe $\gamma \in X$, la courbe $\gamma' = T(\gamma)$ est définie par

$$\gamma'(t) = \begin{cases} H_1(\gamma(4t)) & \text{pour } t \in [0,\frac{1}{4}] \\ H_2(\gamma(4t-1)) & \text{pour } t \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \\ H_3(\gamma(4t-2)) & \text{pour } t \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}] \\ H_4(\gamma(4t-3)) & \text{pour } t \in [\frac{3}{4},1] \end{cases} .$$

c) Soit γ_0 l'élément de X défini par $\gamma_0(t) = (t, 0)$. Dessiner γ_0 et $\gamma_1 = T(\gamma_0)$ (on pourra commencer par déterminer $\gamma_1(t)$ pour les valeurs $t = 0{,}1/4$, $1/2$, $3/4$, 1).

d) Montrer que T est une transformation contractante, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'hypothèse du théorème de point fixe de Picard, avec $k = 1/3$.

e) Expliquer pourquoi il existe une unique courbe γ_∞ telle que $T(\gamma_\infty) = \gamma_\infty$.

f) Dessiner (rapidement) $\gamma_2 = T \circ T(\gamma_0)$, $\gamma_3 = T \circ T \circ T(\gamma_0)$. Donner une majoration de la distance $d(\gamma_\infty, \gamma_3)$.

Exercice 17. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes : f est de classe C^1, sa dérivée est strictement comprise entre -1 et 1, et le graphe de f ne rencontre pas la droite d'équation $x = y$.

a) Dessiner l'allure du graphe d'une telle fonction.

b) Montrer que f n'a pas de point fixe.

c) Montrer que f est contractante : pour tous réels $x \neq y$, on a $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

d) f est-elle k-lipschitzienne pour un réel $k \in]0, 1[$?

Exercice 18. Soit (X, d) un espace métrique complet et $f \colon X \to X$ une application telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ et $p \geq 1$ tels que f^p, la composée p fois de f, soit k-lipschitzienne. Montrer que f admet un unique point fixe.

5 Pour aller plus loin...

Dans les exercices qui suivent, on pourra utiliser le théorème de Baire : *dans un espace métrique complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Exercice 19. Traduire le théorème de Baire en termes d'union de fermés. En déduire qu'on ne peut pas recouvrir le plan, ni même l'espace $\mathbb{R}^n$, par une famille dénombrable de droites.

Exercice 20. Un nombre réel z est appelé *nombre de Liouville* s'il est irrationnel, et possède la propriété que pour tout entier $n > 0$ il existe des entiers p et q tels que $q > 1$ et

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

a) Montrer que le nombre

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$$

est un nombre de Liouville.

b) Écrire l'ensemble $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels comme une intersection dénombrable d'ouverts denses.

c) Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}$ des nombres de Liouville est une intersection dénombrable d'ouverts denses.

d) En déduire que tout intervalle contient une infinité de nombres de Liouville.

Exercice 21. Démontrer le théorème de Baire.
Indication. Être dense, c'est rencontrer tout ouvert non vide. Soit (U_n) une suite d'ouverts denses, et V un ouvert. Il existe une boule fermée B_1 incluse dans $U_1 \cap V$. Il existe une boule fermée B_2 incluse dans $U_2 \cap B_1$. Et ainsi de suite... Compléter cette preuve à l'aide du théorème des fermés emboîtés (exercice 7).

Exercice 22 (Distance de Hausdorff)**.** Soit (X, d) un espace métrique. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés bornés non vides de X. Pour tout F de $\mathcal{F}$ et tout $\varepsilon > 0$ on appelle ε-voisinage de F l'ensemble

$$V_\varepsilon(F) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in F} \mathring{B}(x, \varepsilon).$$

Pour $F, F' \in \mathcal{F}$, on pose

$$\delta(F, F') = \inf\{\varepsilon > 0 \mid F \subset V_\varepsilon(F') \text{ et } F' \subset V_\varepsilon(F)\}.$$

a) Faire un dessin illustrant la définition d'un ε-voisinage.

b) Montrer que δ est une distance sur $\mathcal{F}$.

c) On suppose que (X, d) est complet. Montrer que $(\mathcal{F}, \delta)$ est complet.