TD n°1. Espaces métriques

1 Notions et techniques de base

Remarque. Bien garder à l'esprit qu'« ouvert » et « fermé » sont des concepts *relatifs* à un espace ambiant souvent sous-entendu. Dans l'absolu, « être ouvert » n'a pas de sens ; il faudrait dire « être ouvert dans (X, d) ». En pratique, on se contente souvent de « ouvert dans X », voire même de « ouvert ». Attention !

Exercice 1. Dessiner (sans preuve) l'intérieur, l'adhérence, la frontière des parties suivantes du plan :

a) le disque unité fermé ; b) la droite $\{y = 0\}$; c) leur réunion.

Exercice 2. Montrer que les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts (au sens de la topologie usuelle). Déterminer leur adhérence.

$$A = \{(x, y) : x > 0\}, \qquad B = \{(x, y) : x > 0 \text{ et } y < 0\}, \qquad C = \{(x, y) : x + 2y > 0 \text{ et } y^2 > x\}$$

Exercice 3. Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par les équations $x + y = 0$, $y + z = 0$ est fermé dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des solutions d'un système linéaire est fermé.

Exercice 4. Montrer que dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle : $\mathbb{N}$ est fermé mais pas ouvert, $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé. On démontrera chaque point deux fois : une fois par des boules, une fois par des suites.

Exercice 5 (vrai ou faux ?)**.** Si la proposition suggérée est vraie, la démontrer. Si elle est fausse, la réfuter. Dans un espace métrique...

a) toute intersection de boules ouvertes est une boule ouverte.
b) toute intersection de boules ouvertes est un ouvert.
c) toute intersection d'ouverts est un ouvert.
d) toute union finie de boules fermées est un fermé.
e) Tout ouvert est union de boules ouvertes.
f) Toute partie est ouverte ou fermée.
g) Les seuls ouverts fermés sont $\emptyset$ et X.
h) Tout singleton est fermé.
i) Toute partie finie est fermée.

Exercice 6. Soient (X, d) un espace métrique, $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in X$.

a) Traduire chacune des propriétés suivantes en symboles mathématiques :
   - pour toute boule ouverte B de centre ℓ, si l'on attend assez longtemps, la suite restera dans B ;
   - pour tout ouvert U contenant ℓ, si l'on attend assez longtemps, la suite restera dans U ;
   - pour tout voisinage V de ℓ, si l'on attend assez longtemps, la suite restera dans V.
b) Montrer que ces propriétés sont équivalentes. (Si c'est le cas, on dit que la suite converge vers ℓ.)
c) Montrer que si la limite existe, elle est unique.
d) Montrer que si $u_n \to \ell$, alors $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est fermé dans X.

Exercice 7. Soient $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique et $\ell \in X$.

a) Traduire en symboles mathématiques les propriétés suivantes :
   - pour toute boule ouverte B de centre ℓ, la suite finit toujours par revenir dans B ;
   - pour toute boule ouverte B de centre ℓ, la suite passe infiniment souvent dans B ;
   - il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers ℓ.
b) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est $\cap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_k : k \geq n\}}$.

2 Plus théorique

Exercice 8. Soit (X,d) un espace métrique. Soient $B_o(a,r)=\{x\in X : d(a,x)<r\}$ la boule *ouverte* de centre a et rayon r, et $B_f(a,r)=\{x\in X : d(a,x)\leq r\}$ la boule *fermée.*

a) Montrer que la boule fermée est un fermé de X.

b) Montrer que $\overline{B_o(a,r)}\subseteq B_f(a,r)$ et $B_o(a,r)\subseteq \overset{\circ}{\widehat{B_f(a,r)}}$.

c) Soit à présent la fonction $\delta(x,y) : X^2\to\mathbb{R}$ qui vaut 0 si $x=y$ et 1 sinon. Montrer que δ est une distance (la « distance discrète ») et déterminer les δ-boules ouvertes et fermées de rayon $\frac{1}{2}$, 1, 2.

d) En déduire qu'en général, $\overline{B_o(a,r)}$ et $B_f(a,r)$ peuvent ne pas coïncider.

Morale : la « boule fermée » n'est pas toujours l'adhérence de la « boule ouverte ». (Dans le cas des espaces vectoriels normés étudiés plus tard, on aura toutefois égalité.)

Exercice 9.

a) Déterminer dans $\mathbb{R}$ usuel l'intérieur, l'adhérence, et la frontière de $[0,1[$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b) Déterminer dans $\mathbb{R}^2$ usuel l'intérieur, l'adhérence, et la frontière de $[0,1[\times\mathbb{N}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

c) Soient (X,d) un espace métrique et $A,B\subseteq X$. Démontrer les formules suivantes :

i) $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}=\mathring{A}\cap\mathring{B}$ ii) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ iii) $\mathring{A}\cup\mathring{B}\subseteq\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$

iv) $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$ v) $\overset{\circ}{\widehat{A\setminus B}}=\mathring{A}\setminus\overline{B}$ vi) $\partial\partial\partial A=\partial\partial A$

Pour (iii) et (iv), donner un contre-exemple à l'égalité.

Exercice 10. Montrer que $\overline{A}=\cap_{\varepsilon>0}\cup_{a\in A} B(a,\varepsilon)$.

Exercice 11. On identifie $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$ muni de la distance d_∞. Pour chacun des ensembles remarquables suivants, dire (et démontrer) s'il est ouvert ou fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.

a) L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles ;

b) L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1 :

c) L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales (M est orthogonale si $M\cdot M^t=I_n$) ;

d) L'ensemble $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de déterminant 1 ;

e) L'ensemble des matrices de rang $\geq k$.

Exercice 12 (parties denses)**.**

a) Rappeler ce que signifie « A est dense dans X », en termes de fermés, et en termes d'ouverts.

b) Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 13.

a) Soient (X,d) et (Y,δ) des espaces métriques et $f : X\to Y$ une fonction. Montrer que f est continue ssi pour toute partie $A\subseteq X$, on a $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$.

b) En déduire que l'image d'une partie dense par une surjection continue est dense.

c) Application. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Q}$. Montrer que $\{e^{inx} : n\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$.

3 Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 14. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union *dénombrable* d'intervalles (indice : « intervalles à bornes rationnelles »). En déduire que le cardinal de l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est celui de $\mathbb{R}$.

Exercice 15 (l'espace de Cantor)**.** Soit $F_0=[0,1]$ et pour chaque $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+1}=\frac{1}{3}F_n\cup\frac{1}{3}(2+F_n)$. Soit enfin $F_\infty=\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n$.

a) Faire un dessin, puis montrer que F_∞ est un fermé de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F_∞ ne contient aucun ouvert non-vide.

c) En déduire $\mathring{F_\infty}, \overline{F_\infty}, \partial F_\infty$.

d) Plus dur : déterminer le cardinal de F_∞.

Exercice 16 (homéomorphismes)**.**

a) Montrer que $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes, mais que $[0,1]$ et $\mathbb{R}$ ne sont *pas* homéomorphes.

b) Montrer qu'un carré et un disque (ouverts) du plan sont homéomorphes.

Nous verrons dans la suite du semestre divers moyens de décider si deux espaces sont homéomorphes.

Exercice 17 (difficile)**.** Soit $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ fermé sans point isolé (si $a \in A$ et $a \in U$ ouvert de $\mathbb{R}$, alors $U \cap A$ contient d'autres points que a). Montrer que A est de cardinal continu.

4 Fonctions et continuité

Exercice 18. Trouver une fonction continue et un ouvert $O \subseteq X$ tels que $f(O) \subseteq Y$ ne soit pas ouvert. Même question avec un fermé.

Exercice 19. Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une fonction continue.

a) Soit $A \subseteq X$ un sous-ensemble. Montrer que $f_{|A} : (A, d_{|A}) \to (Y,\delta)$ est continue (le démontrer topologiquement, sans passer par les distances).

b) Application : montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 20 (distance à un sous-ensemble)**.**

a) Rappelons qu'une fonction $f : (X,d) \to (X',d')$ est k-lipschitzienne si $\forall (x,y) \in X^2, d'(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$. Montrer qu'une fonction k-lipschitzienne est continue.

b) Soient (X,d) un espace métrique, $A \subseteq X$ un sous-ensemble. On pose $d_A(x) = \inf_{y\in A} d(x,y)$. Montrer que cela a toujours un sens. Donner un exemple où la borne inférieure n'est pas atteinte.

c) Montrer que d_A est une fonction 1-lipschitzienne (donc continue).

d) Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

e) Soient F_1, F_2 fermés *disjoints*. Montrer qu'il existe des ouverts *disjoints* U_1, U_2 tels que $F_i \subseteq U_i$. (On pourra considérer $\frac{d_{F_1}}{d_{F_1}+d_{F_2}}$.)

f) Donner un exemple de fermés disjoints $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tels que $\inf\{d(x,y) : (x,y) \in F_1 \times F_2\} = 0$.

Exercice 21. Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une fonction quelconque. On note L l'ensemble des points où f est continue.

a) Soit $D_{n,m} = \{a \in X : B(a, \frac{1}{m}) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \frac{1}{n}))\}$. Montrer que $L = \bigcap_n \bigcup_m D_{n,m}$.

b) Soit $E_{n,m} = \{a \in X : \forall x,y \in B(a, \frac{1}{m}), d(f(x),f(y)) \leq \frac{1}{n}\}$. Montrer que $L = \bigcap_n \bigcup_m E_{n,m}$.

c) Soit U_n l'union de tous les ouverts U tels que $\mathrm{diam}(f(U)) \leq \frac{1}{n}$. Montrer que $L = \bigcap_n U_n$.

d) Montrer que $\bigcup_m E_{n,m}$ est un ouvert de X (attention, ne marche pas avec $\bigcup_m D_{n,m}$). Lien avec U_n ?

L'ensemble de continuité de f est donc une intersection dénombrable d'ouverts (on dit que c'est un G_δ).

5 Gros espaces

Exercice 22. Soit $C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que $C([0,1],\mathbb{R})$ peut être muni d'une distance en posant : $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

a) Montrer que si $f_n \to f$ au sens de cette métrique, alors pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'ensemble des fonctions continues croissantes est fermé dans $C([0,1],\mathbb{R})$.

c) Montrer que l'ensemble des fonctions continues strictement croissantes n'est ni ouvert ni fermé.

d) Soit $C_0 = \{f \in C([0,1],R) : f(0) = 0\}$. Montrer que C_0 est une partie fermée.

e) Montrer que tout élément de C_0 est limite d'une suite d'éléments de son complémentaire.

f) En déduire que C_0 est d'intérieur vide.

g) Montrer de même que l'ensemble $C_{\geq 0}$ des fonctions positives est fermé.

h) Déterminer l'intérieur de $C_{\geq 0}$.

Remarque. Dans les espaces topologiques on utilise beaucoup de suites ; s'il s'agit d'espaces de suites, on maniera des suites de suites.
Il est prudent de repasser en notation fonctionnelle pour une suite : $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (les termes de la suite sont alors les $x(n)$). Du coup, on peut considérer une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de suites ; pour chaque $p \in \mathbb{N}$, $(x_p)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, et pour chaque n, $x_p(n)$ est un nombre complexe.

Exercice 23 (partiel 2011)**.** Soit $a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit X l'ensemble des suites $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes. Pour $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans X, on pose :

$$d_a(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot \frac{|x(n) - y(n)|}{1 + |x(n) - y(n)|}$$

a) Montrer que d_a est une distance sur X si et seulement si $\forall n \geq 0, a(n) > 0$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a(n) < \infty$.
b) Dans toute la suite on suppose que d_a est une distance sur X. Montrer que X est borné pour d_a.
c) Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. Démontrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{p\to\infty} x_p(n) = x(n)$, alors $\lim_{p\to\infty} d_a(x_p, x) = 0$.
d) Réciproquement, démontrer que si $\lim_{p\to\infty} d_a(x_p, x) = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{p\to\infty} x_p(n) = x(n)$.

6 Pour aller plus loin. . .

Exercice 24 (espaces ultramétriques, examen 2010)**.** Un espace ultramétrique est un espace métrique (X, d) où la distance d vérifie l'axiome supplémentaire : $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$. On suppose (X, d) ultramétrique.

a) Montrer que tout triangle est isocèle.
b) Montrer que toute boule ouverte ou fermée est ouverte et fermée, et que tout point en est le centre.
c) Montrer que si deux boules s'intersectent, l'une est incluse dans l'autre.

Ces espaces sont naturels et utiles lorsqu'on étudie certaines géométries (complètement hors-programme).

Exercice 25.

a) Rappeler la définition d'une topologie sur un ensemble X.
Soient $\mathcal{T}$ et Θ deux topologies sur X. On dit que $\mathcal{T}$ est plus fine que Θ si $\Theta \subseteq \mathcal{T}$, i.e. si tous les ouverts de Θ sont des ouverts de $\mathcal{T}$.
b) Soit $\mathcal{F} = \{O_i : i \in I\}$ une famille de parties de X. Montrer qu'il existe une topologie la moins fine sur X contenant $\mathcal{F}$ (on parle de « topologie engendrée par $\mathcal{F}$ »).
c) Application. Soient X un ensemble, (Y, Θ) un espace topologique, et $f : X \to Y$ une fonction. Décrire la topologie la moins fine rendant f continue.
d) Application. Soient $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ des espaces topologiques. Montrer qu'il existe une topologie la moins fine sur $\prod_{i\in I} X_i$ rendant les projections canoniques π_i continues. Donner une famille d'ouverts engendrant cette topologie.

On parle de « topologie produit » ou de « topologie de la convergence simple ».

Exercice 26 (topologie quotient)**.** Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. On veut munir $X/\!\sim$ d'une topologie. Le critère naturel est de prendre la topologie la plus fine qui rende la projection canonique $\pi : X \to X/\!\sim$ continue.

a) Soit $\Theta = \{V \subseteq X/\!\sim\ : \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$. Montrer que Θ est la plus fine topologie sur $X/\!\sim$ rendant π continue. Par construction, V est un ouvert de $X/\!\sim$ ssi $\pi^{-1}(V)$ est un ouvert de X.
b) Soit $f : X \to Y$ une fonction continue constante sur les classes modulo $\sim$. Montrer que f induit une fonction continue $X/\!\sim\ \to Y$.
c) Montrer qu'en général, si U est un ouvert de X, $\pi(U)$ n'est pas forcément un ouvert de $X/\!\sim$.
d) Le saturé de $Y \subseteq X$ est $\hat{Y} = \pi^{-1}(\pi(Y))$. Montrer que $\hat{Y}$ est saturé. Le saturé d'un ouvert est-il ouvert ? Montrer que les ouverts du quotient sont les projetés des ouverts saturés.