Proposition. *Un produit de deux espaces complets est complet.*

Preuve. Montrons qu'un produit de deux espaces complets est complet.
On pose $Z = X_1 \times X_2$. De même

$$\begin{aligned} d_\infty &= ((x(1), x(2)), (y(1), y(2))) \\ &:= \max(d_{X_1}(x(1), y(1)), d_{X_2}(x(2), y(2))). \end{aligned}$$

Montrons que l'espace métrique (Z, d_∞) est complet.

Considérons une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de l'ensemble produit $Z = X_1 \times X_2$, alors il existe une suite $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $i \in \{1, 2\}$ tel que $x_n = (x_n(1), x_n(2))$.

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$d_{X_1}(x_n(1), x_m(1)) \leqslant d_\infty(x_n, x_m).$$

On en déduit que la suite $(x_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X_1 est de Cauchy dans (X_1, d_∞).

Par complétude de X_1, cette suite converge dans X_1.

On définit $x(1)$ comme étant la limite de cette suite $(x_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$.

De même, par complétude de X_2, la suite $(x_n(2))_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers un point que l'on note $x(2)$.

On construit ainsi une élément $x = (x(1), x(2))$ de $X_1 \times X_2$.

Alors, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend bien vers x dans dans $X_1 \times X_2$ d'après la caractérisation des suites convergentes dans un espace produit.

Finalement, (Z, d_∞) est bien un espace complet car on a montré que toute suite de Cauchy est convergente.

□