Jasiran Sivakumar LM360

Topologie et calcul différentiel 30/09/14

Exercice 1 : Toute partie compacte est fermé.

Soit A une partie compacte de $(X,d) \Rightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ convergent vers $a \in X$.

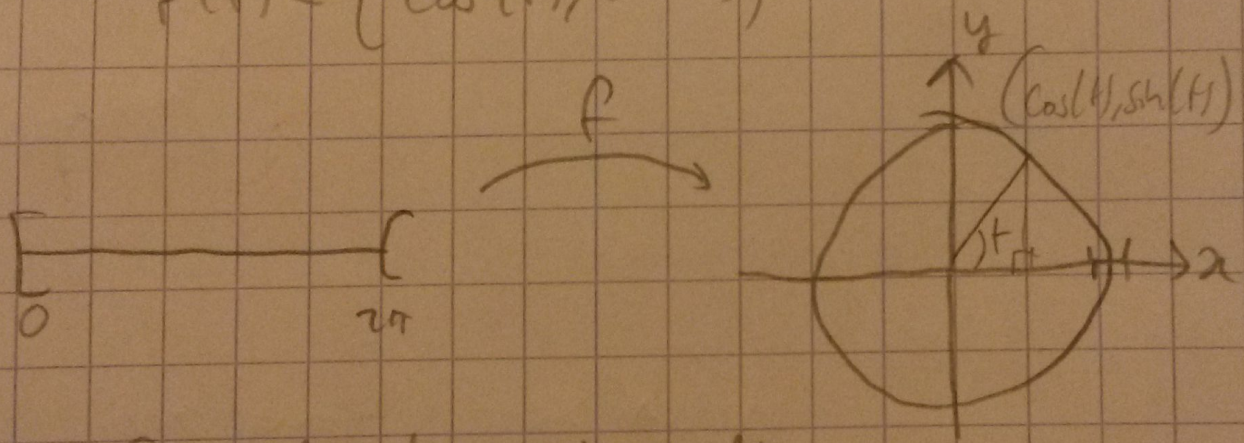
Par la compacité de A, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, notons-la $b \in A$. Il existe $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $(a_{n_k}) \rightarrow b \in A$. Mais puisque l'unique valeur d'adhérence d'une suite convergent est sa limite $\Rightarrow a = b \in A$ alors $a \in A$, alors $(a_n) \rightarrow a \in A$ donc A est fermé. ∎

oui

Exercice 5 : Une fonction continue et bijective dont l'inverse n'est pas continue.

$$f : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{S}_1$$

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t))$$



f est bijective et continue,

$$f^{-1} : \mathbb{S}_1 \longrightarrow [0, 2\pi[$$

$$f^{-1}((\cos(t), \sin(t))) = t$$ n'est pas continue car

$$\lim_{n \to +\infty} f^{-1}\left(\left(\cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)\right)\right) = 2\pi \neq 0$$

$$2\pi \neq 0 = f^{-1}((1,0)) = f^{-1}\left(\lim_{n \to +\infty}\left(\left(\cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)\right)\right)\right)$$