NOUR Elena LM360

Enoncé : Toute partie compacte dans $\mathbb{R}^N$ est fermée et bornée.

Preuve :

Soit (A, d) une partie de $(\mathbb{R}^N, d)$ où d est d_1, d_2 ou d_∞

* Montrons que A est fermée. Pour cela, utilisons le critère séquentiel des fermés. Soit donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A, qui converge vers $x \in \mathbb{R}^N$. Il faut montrer que $x \in A$. Comme A est compacte, la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence $y \in A$. Autrement dit, il existe une sous-suite de (x_n) telle qu'elle converge vers y. Comme une sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite, on en déduit que $x = y$, et donc que $x \in A$. Ainsi A est fermée dans $\mathbb{R}^N$.

* Montrons que (A, d) est bornée.

La définition choisie ici pour "A est bornée" est "A est incluse dans une boule de centre l'origine $O = (0, 0, \dots, 0)$" :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in A, \ x \in B(O, M).$$

Procédons par l'absurde. Supposons donc que A ne soit pas bornée, alors :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists x \in A, \ \underbrace{d(x, O) \geq M}_{\Leftrightarrow x \notin B(O,M)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $M = n$. On obtient, pour ce $M = n$ un x_n tel que $x_n \notin B(O, n)$.

On construit ainsi une suite qui vérifie :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in A$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d(x_n, O) \geq n$.

Par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} d(x_n, O) = +\infty$.

Or, ceci implique que toute sous-suite de (x_n) tend aussi vers $+\infty$. Donc (x_n) n'admet aucune valeur d'adhérence. Ceci contredit la compacité de A. Ainsi A est bornée. $\boxtimes$