Exercice 6: Le produit de deux espaces compacts est compact.

Soient (X, d_x) et (Y, d_y) deux espaces compacts et posons $Z = X \times Y$ donnons lui la distance d_z. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'*éléments* de Z. Par la *compacité* de X, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, notons la x. Autrement dit, $\exists(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers un *élément* $x \in X$.

Soit $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite, qui est une suite d'*éléments* de Y. Donc, comme Y est compact $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'*adhérence*. Alors, $\exists(y_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $(y_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ tend vers un *élément* $y \in Y$.

Notons que la suite $(x_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui tend vers x, alors $(x_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ aussi converge vers x.

Maintenant prenons la suite extraite $(z_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}} = ((x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}))_{i\in\mathbb{N}}$.

$$\lim_{n\to\infty}(z_{n_{k_i}}) = \lim_{n\to\infty}(x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}) = (\lim_{n\to\infty} x_{n_{k_i}}, \lim_{n\to\infty} y_{n_{k_i}}) = (x, y)$$

Nous avons trouvé une suite extraite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge, alors $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence et donc $Z = X \times Y$ est compact. $\blacksquare$