Olivier
Romet

Exo 7: Toute partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^N$ est compact.

Démonstration:

On munit $\mathbb{R}^N$ de la distance d_∞ définie par :

$$d_\infty(x,y) = \max\left(d_{\mathbb{R}}(x_1,y_1), \dots, d_{\mathbb{R}}(x_N,y_N)\right)$$
$$= \max\left(|x_1-y_1|, \dots, d_{\mathbb{R}}|x_N-y_N|\right)$$

où $x=(x_1,\dots,x_N)$ et $y=(y_1,\dots,y_N)$

Soit K une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^N$

- Soit $M>0$ tel que pour tout $x,y\in K$, $d_\infty(x,y)\leq M$
  Soit $z_0\in K$. On pose $a=d_\infty(0_{\mathbb{R}^N},z_0)+M>0$.
  Alors pour tout $x=(x_1,\dots,x_N)\in K$ et pour tout $i=1,\dots,N$

$$|x_i| = |0-x_i| = d_{\mathbb{R}}(0,x_i) \underset{\substack{\text{par définition}\\ \text{de } d_\infty}}{\leq} d_\infty(0_{\mathbb{R}^N},x) \underset{\substack{\text{inégalité}\\ \text{triangulaire}}}{\leq} d_\infty(0_{\mathbb{R}^N},z_0)+d_\infty(z_0,x) \underset{\substack{z_0 \text{ et } x\\ \text{sont dans } K}}{\leq} \underbrace{d_\infty(0_{\mathbb{R}^N},z_0)+M}_{=a}$$

  donc $x_i\in[-a,a]$ ie $x\in[-a,a]^N$.
  On en déduit que $K\subseteq[-a,a]^N$

  oui, on aurait aussi pu prendre ceci comme définition d'une partie bornée de $\mathbb{R}^N$.

- K est une partie fermée de $(\mathbb{R}^N,d_\infty)$ donc $\mathbb{R}^N\setminus K$ est une partie ouverte de $(\mathbb{R}^N,d_\infty)$. Or, $[-a,a]^N\setminus K=(\mathbb{R}^N\setminus K)\cap[-a,a]^N$ donc $[-a,a]^N\setminus K$ est une partie ~~f~~ ouverte du sous-espace métrique $([-a,a]^N,d_\infty)$ (cf cours). On en déduit que K est une partie fermée de $([-a,a]^N,d_\infty)$.

- D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, l'espace métrique $([-a,a],d_{\mathbb{R}})$ est compact. L'espace métrique $([-a,a]^N,d_\infty)$ étant l'espace métrique produit fini des compacts $\underbrace{([-a,a],d_{\mathbb{R}}),\dots,([-a,a]^N,d_{\mathbb{R}})}_{N \text{ fois}}$, on en déduit que $([-a,a]^N,d_\infty)$ est lui-même compact (cf exo 3).

• K est une partie fermée de l'espace compact $([-a,a]^{\mathbb{N}}, d_\infty)$ donc (K, d_∞) est compact (cf exo 2).

<u>Exo 8</u> : $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ est complet

Parfait

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de Cauchy.
Comme elle est de Cauchy, elle est bornée (cf cours)
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède une valeur d'adhérence.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence. donc d'après le cours, elle converge.
$(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ est donc complet.