Questions de cours

On demande aux étudiants d'être capables de répondre à des variantes des questions suivantes. Par exemple, on pourra demander de montrer que tout intervalle $[a, b]$ est compact, ou bien qu'une application continue sur $[0, 1]$ est uniformément continue.

1. Enoncer et démontrer le critère séquentiel pour les fermés.
2. Montrer que si une suite admet une valeur d'adhérence ℓ, alors on peut extraire une sous-suite convergeant vers ℓ.
3. Montrer que d_∞ est une distance sur l'ensemble $\mathcal{B}(X, Y)$ des applications bornées de X dans Y, où Y est un espace métrique.
4. Montrer que dans un espace métrique complet, une partie est complète si et seulement si elle est fermée.
5. Montrer que le produit de deux espaces complets est complet.
6. Enoncer et démontrer le théorème du point fixe contractant.
7. Montrer que le produit de deux espaces compacts est compact.
8. Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass : $[0, 1]$ est compact.
9. Montrer que les parties compactes de $\mathbb{R}^N$ sont exactement les parties fermées et bornées (pour la réciproque on utilisera sans démonstration le théorème de Bolzano-Weiestrass, le théorème sur les produits d'espaces compacts, le théorème sur les parties fermées dans les compacts).
10. Démontrer le théorème de Heine : une application continue sur un espace compact est uniformément continue.
11. Montrer l'équivalence entre l'énoncé du théorème de Borel-Lebesgue concernant les ouverts et celui concernant les fermés.
12. Enoncer et démontrer le théorème sur la réunion de parties connexes par arcs.