LM360 **2013-2014**
Université Paris 6

Topologie et calcul différentiel (LM360) : examen partiel

22 octobre 2013 (durée : 2h)

avec corrigé (et barème indicatif)

Question de cours. (5pts) Énoncer en détail, et démontrer, le théorème disant que l'image d'un espace connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Voir le cours.

Exercice 1.— (3pts) Soit (X, d) un espace métrique, et A une partie de X. On définit l'ensemble

$$B = \{x \in X \mid \exists a \in A, d(x, a) < 1\}.$$

Montrer que B est un ouvert de X.

Soit x un point de B, il s'agit de trouver une boule centrée en x et incluse dans B. Par définition de B, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < 1$. Soit $\varepsilon = 1-d(x, a)$. Par inégalité triangulaire, la boule $B(x, \varepsilon)$ est incluse dans $B(a, 1)$. Or cette boule est incluse dans B, ce qui conclut.

Autre rédaction : on peut réécrire B comme l'union des boules ouvertes centrées en un point quelconque de A et de rayon 1 ; comme toute boule ouverte est un ouvert, B est une union d'ouverts, c'est donc un ouvert.

Exercice 2.— (3,5pts) Dans un espace métrique, on considère les propriétés suivantes :

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ; **2.** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente ;

3. $(x_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente ; **4.** $(x_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.

Dire si chacune des implications suivantes est VRAIE ou FAUSSE (*ici on ne demande pas de justification*) :

(1) $\Rightarrow$ (2); (2) $\Rightarrow$ (1); (2) $\Rightarrow$ (3); (3) $\Rightarrow$ (2); (3) $\Rightarrow$ (4); (4) $\Rightarrow$ (3); ((1) et (3)) $\Rightarrow$ (2).

La suite $(x_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut alors répondre en utilisant les propriétés suivantes du cours : toute suite convergente est de Cauchy ; toute suite extraite d'une suite convergente est convergente ; toute suite convergente est bornée ; toute suite de Cauchy ayant une suite extraite convergente est convergente.

Exercice 3.— (7pts) Soient (X, d) un espace métrique, et A, B deux parties de X. On suppose que

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad d(a, b) < \varepsilon.$$

1. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans B telles que la suite $(d(a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Pour chaque entier $n > 0$, on applique l'hypothèse avec $\varepsilon = 1/n$, et on note a_n et b_n les points obtenus, qui appartiennent respectivement à A et B. On a $d(a_n, b_n) < 1/n$ qui tend vers 0, *comme demandé.*

2. On suppose de plus A compact.

a. Montrer qu'il existe un point a de A tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b \in B \quad d(a, b) < \varepsilon.$$

Par compacité de A, il existe une suite extraite $(a_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui est convergente, notons a sa limite, et vérifions que a satisfait la propriété voulue. Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(d(a_{\phi(k)}, b_{\phi(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite d'une suite qui converge vers 0, elle converge donc aussi vers 0. En appliquant la définition des suites convergentes aux suites $(a_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(d(a_{\phi(k)}, b_{\phi(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$, on obtient deux nombres K_1 et K_2 tels que

$$\forall k \geq K_1, d(a_{\phi(k)}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall k \geq K_2, d(a_{\phi(k)}, b_{\phi(k)}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $k = \max(K_1, K_2)$ on a

$$d(a, b_{\phi(k)}) \leq d(a, a_{\phi(k)} + d(a_{\phi(k)}, b_{\phi(k)}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

le nombre $b = b_{\phi(k)}$ est dans B et à distance $< \varepsilon$ de a, ce qui conclut.

b. A-t-on nécessairement $A \cap B \neq \emptyset$?

La réponse est non, comme le montre le contre-exemple suivant : dans $X = \mathbb{R}$, on prend $A = [0, 1]$ et $B =]1, 2]$.

Exercice 4.— (7pts) Soit X un espace métrique compact, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction continue f telle que, pour tout x, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $f(x)$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier n, on pose

$$O_n = \{x \in X \mid f_n(x) > f(x) - \varepsilon\}.$$

a. Montrer que O_n est un ouvert.

En écrivant

$$O_n = \{x \in X \mid f_n(x) - f(x) > -\varepsilon\}$$

on voit que O_n est l'image réciproque de $] - \varepsilon, +\infty]$ par l'application $f_n - f : X \to \mathbb{R}$. Or $] - \varepsilon, +\infty]$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et lapplication $f_n - f$ est continue, donc O_n est un ouvert.

b. Montrer que pour tout x il existe $n(x)$ tel que $x \in O_{n(x)}$.

Soit $x \in X$. La suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers $f(x)$; ε étant donné, il existe donc un nombre $n(x)$ tel que, pour tout $n \geq n(x)$, $f_n(x) \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. En particulier $f_{n(x)} > f(x) - \varepsilon$, ce qui montre que $x \in O_{n(x)}$, comme voulu.

2. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in X$,

$$(*) f_n(x) \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[.$$

D'après la question 1.a, les ensemble $O_{n(x)}$ sont des ouverts de X, et d'après la question 1.b ils recouvrent X. Le théorème de Borel-Lebesgue nous dit qu'on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini

$$O_{n(x_1)}, \dots, O_{n(x_k)}.$$

Notons $n_i = n(x_i)$, et posons $N = \max(n_1, \dots, n_k)$. Soit $n \geq N$ et $x \in X$. Puisque les $O_{n(x_i)}$ recouvrent X, il existe i tel que $x \in O_{n(x_i)}$, et cette appartenance signifie que $f_{n_i}(x) > f(x) - \varepsilon$. Or $n \geq N \geq n_i$ et la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc $f_n(x) \geq f_{n_i}(x)$ et $f_n(x) > f(x) - \varepsilon$. D'autre part tous les termes d'une suite croissante sont inférieurs à sa limite, donc $f_n(x) \leq f(x)$ et on a bien la propriété $(*)$ voulue.

Exercice 5.— *(partiel 2013)* Soient (X, d) un espace métrique, et A, B deux parties de X. On suppose que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad d(a, b) < \varepsilon.$$

Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A et une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans B telles que la suite $(d(a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Beaucoup d'étudiants ont donné la réponse suivante :

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de* A *convergeant vers* a*, et* $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de* B *convergeant vers* b *: on a*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_0 \ \ d(a_n, a) < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_1 \ \ d(b_n, b) < \varepsilon.$$

On pose $N = \max\{n_0, n_1\}$*. Pour tout* $n \geq N$*, on a*

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a) + d(a, b) + d(b, b_n) \leq 3\varepsilon.$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N \ \ d(a_n, b_n) < \varepsilon,$$

ce qui signifie que la suite $d(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tend vers* 0.

Cette réponse a immédiatement l'air louche : si on peut vraiment prendre n'importe quelle suite (a_n) tendant vers a, pourquoi ne pas prendre la suite constante égale à a ? Et pareil pour la suite (b_n) ? Et finalement, si la première suite tend vers a et la seconde vers b, la seule possibilité pour que la distance entre a_n et b_n tende vers 0 n'est-elle pas qu'on ait $a = b$? Mais comment pourrait-on conclure que $a = b$ si on sait seulement que $d(a, b) < \varepsilon$? ? Examinons maintenant dans le détail les arguments de cette réponse, en essayant de combler au mieux les lacunes de la rédaction. Dès la première ligne, on nous parle d'un point a et d'un point b sans préciser d'où ils viennent ; cependant, on se doute qu'il s'agit des points a et b fournis par l'hypothèse. Si on lit bien l'hypothèse, ces points dépendent de la donnée d'un nombre ε. Il faut donc probablement comprendre ceci :

Soit $\varepsilon > 0$***, et*** $a \in A$ ***et*** $b \in B$ ***deux points donnés par l'hypothèse, vérifiant*** $d(a, b) < \varepsilon$***.*** *Soient* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de* A *convergeant vers* a*, et* $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de points de* B *convergeant vers* b*...* Jusque là tout va bien : la réponse n'était pas correctement rédigée, mais on peut lui donner un sens en ajoutant la phrase en gras (à vrai dire, c'est même la seule façon de préciser ce qui est écrit). La suite s'interprète alors probablement ainsi :

En appliquant la définition de la limite pour les suites (a_n) *et* (b_n) *au nombre* ε*, on obtient deux nombres* n_0 *et* n_1 *tels que* $\forall n \geq n_0 \ \ d(a_n, a) < \varepsilon$ *et* $\forall n \geq n_0 \ \ d(b_n, b) < \varepsilon$*. On pose* $N = \max\{n_0, n_1\}$*. Pour tout* $n \geq N$*, on a*

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a) + d(a, b) + d(b, b_n) \leq 3\varepsilon.$$

Arrêtons-nous pour résumer la situation, en faisant bien attention à l'ordre dans lequel les différents objets mathématiques ont été introduits : **étant donné un** $\varepsilon > 0$**, nous avons construit deux suites** (a_n) **et** (b_n) **pour lesquelles il existe un nombre** N **tel que pour tout** $n \geq N$**,** $d(a_n, b_n) \leq 3\varepsilon$**.**C'est maintenant que les choses se gâtent. On voudrait conclure que la suite $(d(a_n, b_n))$ tend vers 0, mais pour cela il faudrait que nos deux suites aient été construites *avant* le choix du nombre ε. Dans la définition de la limite, on considère une suite ; étant donnée cette suite, à chaque fois qu'on choisit un $\varepsilon > 0$ on doit pouvoir trouver un rang N *etc.*. Ici la situation est inversée : on a d'abord choisi un nombre $\varepsilon > 0$, puis une suite. Pour pouvoir conclure, le nombre ε étant fixé depuis le début, il faudrait considérer un autre nombre quelconque $\varepsilon' > 0$ et trouver alors un N tel que *etc.*.

Mais après tout, peut-être est-ce de cette façon qu'il fallait comprendre la réponse ; puisque le premier ε n'y était pas explicité, peut-être fallait-il comprendre le second ε comme un autre nombre ε'. Essayons :

Soit $\varepsilon' > 0$. En appliquant la définition de la limite pour les suites (a_n) et (b_n) au nombre ε', on obtient deux nombres n_0 et n_1 tels que $\forall n \geq n_0 \quad d(a_n, a) < \varepsilon'$ et $\forall n \geq n_0 \quad d(b_n, b) < \varepsilon'$. On pose $N = \max\{n_0, n_1\}$. Pour tout $n \geq N$, on a

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a) + d(a, b) + d(b, b_n) \leq 2\varepsilon' + \varepsilon.$$

Ce n'est pas encore ce qu'on voudrait. On peut bien sûr éliminer le facteur 2 et obtenir l'inégalité $d(a_n, b_n) \leq \varepsilon' + \varepsilon$, mais on ne pourra jamais se débarrasser du ε : pour choisir a et b on a été obligé de fixer ce nombre ε, et on pourra jamais faire mieux que de montrer que la distance de a_n à b_n tend vers le nombre $d(a, b)$, qui est strictement plus petit que ε, mais dont rien ne permet de dire qu'il est nul.

Cette réponse est donc irrécupérable : même un lecteur plein de bonne volonté ne pourra pas y voir un raisonnement correct.

Le problème dans cet argument vient de la "dépendance cachée" entre les différents objets introduits : ici, les suites dépendant du choix antérieur d'un nombre ε. Ce problème est à l'origine de nombreuses erreurs. Comment faire pour les éviter ?

1. *Introduire explicitement tous les objets utilisés* (ici, les points a et b, et plus loin l'entier N, ne sont pas correctement introduits dans la solution proposée initialement par l'étudiant ; une introduction explicite est donnée par la phrase en caractères gras que nous avons ajoutée). Rappelons que dans une phrase avec des quantificateurs, comme

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad d(a, b) < \varepsilon$$

   aucun objet n'est introduit. Les variables de cette phrases sont muettes. Si on veut utiliser cette phrase pour introduire de nouveaux objets, il faut :

   (a) dire à quel nombre ε on va l'appliquer : ça peut être un nombre ε introduit avant dans le raisonnement (comme $\varepsilon = 1/n$ dans la solution plus bas), ou bien un nombre ε quelconque, qu'on introduit pour l'occasion en écrivant "Soit $\varepsilon > 0$" ;

   (b) dire comment on note les objets obtenus : on utilise parfois les mêmes notations, parfois non (comme a_n, b_n dans la solution plus bas).

2. Lorsque tous les objets ont été introduits explicitement, on peut alors faire attention à *l'ordre dans lequels les objets sont introduits* ; cet ordre entraîne une dépendance entre les objets. On peut même expliciter cette dépendance en écrivant par exemple
   Soit $\varepsilon > 0$, et $a_\varepsilon \in A$ et $b_\varepsilon \in B$ deux points donnés par l'hypothèse... Et, plus loin, *Soient $(a_{n,\varepsilon,a})_{n\in\mathbb{N}}$....*
   Malheureusement, comme on le voit, les notations deviennent vite très lourdes, ce qui explique pourquoi, en pratique, on n'explicite pas toutes les dépendances dans les notations. Il faut donc faire des bilans où l'ordre des choix apparait explicitement : dans la tentative de solution plus haut on a introduit, dans l'ordre, $\varepsilon, a, b, a_n, b_n, N$; a priori chacun de ces objets dépend du choix des précédents.

Solution de l'exercice Soit $n > 0$ un entier, on applique l'hypothèse au nombre $\varepsilon = 1/n$. On obtient ainsi un élément a_n de A et un élément b_n de b tels que $d(a_n, b_n) < 1/n$. On a alors construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans B telles que, pour tout n, $d(a_n, b_n) < 1/n$. On en déduit que la suite $(d(a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Ce principe consistant à construire une suite à partir d'une propriété en "$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$..." est très souvent utilisé ; dans le cours, il a notamment servi dans la preuve de la caractérisation séquentielle des fermés.