LM360 **2012-2013**
Université Paris 6

Corrigé du partiel

(Pour la question de cours, voir le poly, pages 23-24).

Exercice 2.— *Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (X, d), et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite. On suppose que la suite réelle $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, il s'agit de montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.*

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche un entier N tel que, pour tous $p \geq N$, pour tous $q \geq N$, $d(y_p, y_q) < \varepsilon$.

On applique la définition de suite de Cauchy pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varepsilon/3$ à la place de ε, ce qui fournit un entier N_1 tel que :

$$\forall p \geq N_1, \quad \forall q \geq N_1, \quad d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (*).$$

On applique la définition de la convergence à la suite $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui fournit un entier N_2 tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad d(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (**).$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$, il reste à vérifier que ce N convient : autrement dit, on prend deux entiers $p, q \geq N$, et on vérifie que $d(y_p, y_q) < \varepsilon$: ceci suit de $(*)$, de $(**)$ et de l'inégalité triangulaire (détails à écrire).

Exercice 3.— *Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme entre les deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ), et A une partie de X. Montrer que $f(A)$ est dense dans Y si et seulement si A est dense dans X.*

On suppose d'abord que A est dense dans X, et on veut montrer que $f(A)$ est dense dans Y. Autrement dit, on prend un point $y \in Y$, il s'agit de trouver une suite d'éléments de $f(A)$ qui tend vers y. Un homéomorphisme est une bijection, posons $x = f^{-1}(y)$. Puisque A est dense dans X, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers x. Puisque f est continue, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) = y$, et c'est une suite d'éléments de $f(A)$.

On pouvait aussi rédiger en termes d'ouverts. Une partie est dense si et seulement si elle rencontre tout ouvert. Si V est un ouvert de Y, $U = f^{-1}(V)$ est un ouvert de X, il rencontre la partie dense A, et comme f est bijective on a

$$f(A) \cap V = f(A \cap f^{-1}(V))$$

qui n'est pas vide. Comme $f(A)$ rencontre tout ouvert de Y, c'est une partie dense.

Pour l'autre sens, il suffit d'appliquer le résultat à l'application $g = f^{-1}$ et à la partie $B = f(A)$ (écrire les détails).

Exercice 4.—

1. *Montrer que f est continue.*

Pour un $\epsilon > 0$, il suffit de prendre $\alpha = \varepsilon$, l'inégalité sur f entraine que pour tout $x, y \in X$

$$d(x, y) < \alpha \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

(On pouvait aussi dire que f est 1-lipschitzienne, donc continue).

2. *L'espace métrique (B, d) est-il compact ? Est-il complet ?*

La partie B est fermée et bornée dans $\mathbb{R}^N$, elle est donc compacte d'après un théorème du cours. Comme (B,d) est compact il est aussi complet d'après un autre théorème du cours.

3. *Montrer que l'application f_n admet un unique point fixe.*

On cherche à appliquer le théorème du point fixe contractant à l'application f_n. Soient $x, y \in X$. On évalue $d(f_n(x), f_n(y))$ en appliquant successivement la définition de f_n, l'égalité $d(\alpha x, \alpha y) = \alpha d(x,y)$ rappelée au début de l'énoncé, et l'inégalité vérifiée par f :

$$d(f_n(x), f_n(y)) = d\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)f(x), \left(1-\frac{1}{n}\right)f(y)\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)d(f(x),f(y)) \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)d(x,y).$$

Donc f_n est K-lipschitzienne avec $K = 1-1/n < 1$. Comme B est complet, d'après le théorème du point fixe contractant, f_n admet un unique point fixe.

4. *On note x_n le point fixe de f_n. Montrer que si on suppose la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, alors sa limite est un point fixe de f.*

Soit x la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par continuité de f et du produit dans $\mathbb{R}^N$, lorsque n tend vers $+\infty$, la quantité

$$f_n(x_n) = \left(1-\frac{1}{n}\right)f(x_n)$$

tend vers $f(x)$. Or cette quantité est égale à x_n, qui tend vers x. Par unicité de la limite, $f(x) = x$.

5. *Montrer que f a un point fixe.*

On ne peut pas appliquer la question précédente, puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a aucune raison de converger ; par contre, on peut s'en inspirer.

Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans B qui est compact, on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. En notant x sa limite, un raisonnement analogue à celui de la question précédente permet de montrer que x est un point fixe de f.

Exercice 5.— *Soit (X,d) un espace compact, et $A \subset X$ une partie* localement finie*, ce qui signifie que pour tout point x de X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(x,\varepsilon)$ ne contient qu'un nombre fini de points de A. Montrer que l'ensemble A est fini.* Pour chaque point x de X, choisissons un réel $\varepsilon(x) > 0$ tel que $B(x,\varepsilon(x))$ ne contient qu'un nombre fini de points de A. La famille d'ouverts de X $\{B(x,\varepsilon(x)) \mid x \in X\}$ recouvre X. Puisque X est compact, on peut appliquer le théorème de Borel-Lebesgue : il existe un recouvrement fini $B(x_1,\varepsilon(x_1)), \dots, B(x_N,\varepsilon(x_N))$. Les ensembles $A \cap B(x_1,\varepsilon(x_1)), \dots, A \cap B(x_N,\varepsilon(x_N))$ recouvrent alors la partie A, chacun d'entre eux contient un nombre fini de points, on en déduit que A est fini (une réunion finie d'ensembles finis est un ensemble fini).

Exercice 6.— *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, la partie $A = \{(x,y) \mid x^2 - y^2 = -1\}$ est-elle connexe par arcs ?* On "voit" sur le dessin qu'il n'y a pas de chemin dans A reliant, par exemple, les points $M = (0,1)$ et $N = (0,-1)$. Pour le démontrer, on va utiliser que A ne contient aucun point d'ordonnée nulle (ceci se voit sur le dessin, et on peut le vérifier facilement : aucun réel x ne vérifie $x^2 + 0^2 = -1$). On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un chemin γ dans A allant de M à N. Autrement dit, γ est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\gamma(0) = M$ et $\gamma(1) = N$. Pour chaque t, notons $(x(t), y(t))$ les coordonnées du point $\gamma(t)$. L'application $t \mapsto y(t)$ est continue (c'est la composée de γ et de l'application $(x,y) \mapsto y$). Puisque γ va de M à N, on a $y(0) = 1$ et $y(1) = -1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in]0,1[$ tel que $y(t_0) = 0$. Le point $\gamma(t_0) = (x(t_0), 0)$ est dans A, bien que A ne contienne aucun point d'ordonnée nulle : contradiction.
