LM360 **2012-2013**
Université Paris 6

Topologie et calcul différentiel : examen partiel

29 octobre 2012 Durée : 3h

Les exercices sont indépendants, et peuvent être faits dans un ordre quelconque. On rappelle qu'il est toujours possible, à l'intérieur d'un exercice, d'admettre une question et de passer à la question suivante. Enfin, nous vous recommandons de privilégier la qualité (et en particulier la qualité de la rédaction) à la quantité.

Exercice 1.— (**Question de cours.**) Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application vérifiant, pour tous x, y de X,

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} d(x, y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 2.— Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (X, d), et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite. On suppose que la suite réelle $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Exercice 3.— Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme entre les deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ), et A une partie de X. Montrer que $f(A)$ est dense dans Y si et seulement si A est dense dans X.

Exercice 4.— On considère un entier N, on note d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^N$; on rappelle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^N$ et tout $\alpha > 0$, $d(\alpha x, \alpha y) = \alpha d(x, y)$. On considère la boule unité fermée de $\mathbb{R}^N$ pour la distance d,

$$B = \{x \mid d(x, 0) \leq 1\}.$$

Soit $f : B \to B$ une application qui vérifie, pour tous x, y dans B,

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y).$$

Le but de cet exercice est de montrer que f a un point fixe.

1. Montrer que f est continue.

2. L'espace métrique (B, d) est-il compact ? Est-il complet ?

3. Soit n un entier strictement positif, et $f_n : B \to B$ l'application définie par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x).$$

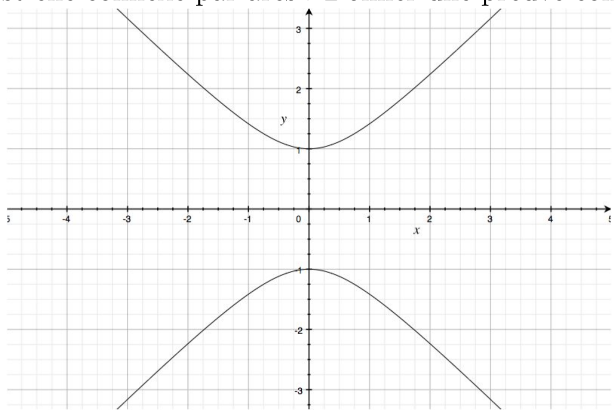
Montrer que l'application f_n admet un unique point fixe.

4. On note x_n le point fixe de f_n. Montrer que si on suppose la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, alors sa limite est un point fixe de f.

5. Montrer que f a un point fixe.

Exercice 5.— Soit (X, d) un espace compact, et $A \subset X$ une partie *localement finie*, ce qui signifie que pour tout point x de X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(x, \varepsilon)$ ne contient qu'un nombre fini de points de A. Montrer que l'ensemble A est fini.

Exercice 6.— Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la partie $A = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = -1\}$, qui est dessinée ci-dessous. A est-elle connexe par arcs ? Donner une preuve complète de votre réponse.



Exercice 7.—*(Hors barême, uniquement si vous avez fait le reste)*

1. Montrer que le résultat de l'exercice 5 ne tient plus si, dans la définition de "localement fini", on remplace "pour tout point x de X" par "pour tout point x de A".

2. Dans l'exercice 6, déterminer la composante connexe par arcs du point $(0, 1)$ dans A.
