Mémo de calcul différentiel

Frédéric Le Roux — Jussieu, LM360

2014

Table des matières

I La différentielle

Dans ce chapitre, on étudie la situation suivante : on a une application f définie sur un ouvert Ω d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un autre espace vectoriel normé F, et un point a de Ω. On veut étudier le comportement de f au voisinage de a. Le principe du calcul différentiel est d'approcher $f(a+h)$, pour des petites valeurs de h, à l'aide d'une application linéaire appelée différentielle de f au point a.

Noter que comme Ω est ouvert, $f(a+h)$ est bien défini pour tout h assez petit. Dans toute la suite, lorsqu'on écrit $f(a+h)$, on suppose implicitement que $a+h$ appartient à Ω.

I.1 Théorie

On rappelle que $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. On utilisera les deux définitions suivantes.

• Une *application affine* est une application du type $x \mapsto b + L.x$ où $L \in \mathcal{L}(E,F)$ et b est un élément de F, autrement dit la somme d'une application linéaire et d'une constante.

• Soit $o : O \to F$ une application définie sur un ouvert O de E contenant 0. On dira que $o(\vec{h})$ est *négligeable devant* $\vec{h}$ si

$$\lim_{\vec{h}\to 0} \frac{\left\|o(\vec{h})\right\|}{\left\|\vec{h}\right\|} = 0,$$

autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \vec{h} \in O \;\; \left(\left\|\vec{h}\right\|_E < \delta \Rightarrow \left\|o(\vec{h})\right\|_F < \varepsilon \left\|\vec{h}\right\|\right).$$

On vérifie facilement que cette notion ne change pas lorsqu'on change la norme de E en une norme équivalente, ni quand on change la norme de F en une norme équivalente. Une conséquence importante est qu'en dimension finie, la notion de différentiabilité ne va pas dépendre du choix des normes.

Exercice 1.— **Vérifier** que lorsque $o(\vec{h})$ est négligeable devant $\vec{h}$, on a $\lim_{\vec{h}\to 0} o(\vec{h}) = 0$. **Montrer** que la réciproque est fausse.**Vérifier** que $\left\|\vec{h}\right\|^2$ est négligeable devant $\vec{h}$.

(a) Différentielle

On dit que f est *différentiable* au point a s'il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E,F)$ telle qu'on ait

$$f(a+\vec{h}) = f(a) + L.\vec{h} + o(\vec{h})$$

où $o(h)$ est négligeable devant h. L'application L est alors appelée *différentielle* de f au point a et notée $Df(a)$ (parfois $D_a f$ ou même $f'(a)$). On dit aussi que f admet un *développement limité à l'ordre* 1 au point a. L'application affine $h \mapsto f(a) + Df(a).h$ s'appelle *partie principale* du développement limité, la quantité $o(h)$ est son *reste*.

Proposition. *L'application L est unique.*

Recette de preuve.— Soient L_1, L_2 deux applications linéaires continues vérifiant toutes les deux la définition de la différentielle, il s'agit de montrer que $L_1 = L_2$. **Montrer** d'abord que $L.h := L_1.h - L_2.h$ est négligeable devant h. Il s'agit maintenant de voir qu'une application linéaire L telle que $L.\vec{h}$ est négligeable devant $\vec{h}$ est l'application nulle. Nous allons utiliser l'homogénéité de la norme. Fixons un vecteur $\vec{v} \neq 0$, et posons $h(t) = t\vec{v}$. Lorsque t tend vers 0, $h(t)$ tend vers 0, et donc

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|L.(h(t))\|}{\|h(t)\|} = 0.$$

Montrer que cette quantité ne dépend en fait pas de t, **en déduire** qu'elle est nulle. **Conclure**.

Proposition. *Si f est différentiable au point a elle y est continue.*

Recette de preuve.— **Écrire** le DL à l'ordre 1. **Conclure** en utilisant le fait que $Df(a)$ est, par définition, une application continue, et que $o(\vec{h})$ tend vers 0 lorsque $\vec{h}$ tend vers 0.

On dit que f est *différentiable sur* Ω si elle l'est en tout point de Ω.

Attention, on a alors autant d'applications linéaires $Df(a)$ que de points a dans Ω !

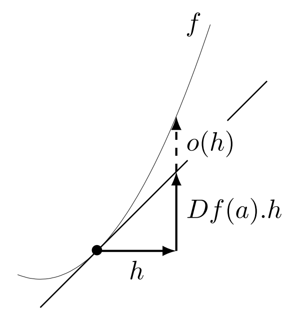
Exemple I : applications affines Toute application affine $f : x \mapsto b + L.x$ est différentiable sur E, et pour tout a et tout h, $Df(a).h = L.h$.

Dans ce cas très spécial, $Df(a) = L$, et la différentielle $Df(a)$ ne dépend pas de a.

Exercice 2.—Vérifier l'affirmation précédente. Que vaut la différentielle de la *translation* $x \mapsto x + b$ en un point a ?

Exemple II : fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point a. On a par définition

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$



On peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + o(h)$$

en posant $o(h) = f(a+h) - (f(a) + f'(a).h)$; **vérifier** que $o(h)$ est négligeable devant h. Ainsi, on voit que f est différentiable en a, et sa différentielle est l'application $Df(a) : h \mapsto f'(a).h$, qui est linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Réciproquement, on peut montrer que si f est différentiable au point a alors elle est dérivable au point a, et sa dérivée est $f'(a) = Df(a).1$. Ainsi, pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les notions de dérivabilité et différentiabilité coincident. Tout ceci se généralise immédiatement lorsque l'espace d'arrivée est un espace vectoriel normé quelconque F.

Exemple III : fonction de deux variables La formule $f(x, y) = xe^{3y}$ définit une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est différentiable au point $(2, 1)$. On développe $f(2+h_1, 1+h_2)$ et on essaie de faire apparaître un développement limité à l'ordre 1, c'est-à-dire

- le terme constant $f(2, 1)$,
- un terme linéaire qui correspondra à la différentielle au point $(2, 1)$,
- un reste qui doit être négligeable devant $\|(h_1, h_2)\|$.

Effectuer le calcul, en remplaçant le terme "e^{3h_2}" par son développement limité en 0, $e^{3h_2} = 1 + 3h_2 + o(h_2)$, et **identifier** le terme constant, le terme linéaire et le reste. On obtient

$$f(2+h_1, 1+h_2) = f(2,1) + e^3(h_1 + 3h_2) + o(h_1, h_2).$$

avec un reste $o(h_1, h_2)$ formé de plusieurs termes. **Vérifier** que ce reste est négligeable devant $\|(h_1, h_2)\|$ en relisant la définition de *négligeable* et en utilisant

$$\lim_{h_2 \to 0} \frac{o(h_2)}{h_2} = 0 \quad \text{et} \quad |h_i| \leq \|(h_1, h_2)\|, \quad i = 1, 2.$$

(On a le droit d'utiliser la norme qui nous convient, on prend par exemple la norme $\|.\|_\infty$ pour avoir la dernière majoration.) Puisque l'application $L : (h_1, h_2) \mapsto e^3(h_1 + 3h_2)$ est linéaire, on a bien obtenu un développement limité à l'ordre 1, ce qui prouve que f est différentiable au point $(2, 1)$, et que sa différentielle en ce point est l'application L.

Cet exemple est là pour illustrer la définition de la différentielle, mais rassurez-vous, on aura bientôt des outils qui nous permettront de retrouver facilement la différentielle de n'importe quelle fonction donnée par une formule de ce type.

Exemple IV : inversion de matrice Pour toute matrice H de norme matricielle $\|H\| < 1$, la matrice $\mathrm{Id} + H$ est inversible et on a

$$(\mathrm{Id} + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-H)^k = \mathrm{Id} - H + o(H) \quad (\star)$$

en posant

$$o(H) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-H)^k.$$

Exercice 3.— Majorer la norme de $o(H)$, par exemple pour tout $\|H\| < \frac{1}{2}$, pour montrer que $o(H)$ est négligeable devant H. On commencera par mettre H^2 en facteur.

On en déduit que l'application consistant à inverser une matrice est différentiable au point Id, et que sa différentielle est $H \mapsto -H$. L'approximation affine donnée par l'égalité $(\star)$ est très facile à calculer, comme par exemple

$$\begin{pmatrix} 1.09 & 0.07 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 & -0.02 \\ -0.08 & 0.01 & 0.92 \end{pmatrix}^{-1} \simeq \begin{pmatrix} 1 - 0.09 & -0.07 & -0.05 \\ -0.1 & 1 + 0.05 & 0.02 \\ 0.08 & -0.01 & 1 - 0.08 \end{pmatrix}$$

Dans cet exemple les coefficients de H sont de l'ordre de 10^{-1}. Un calcul plus précis donne le résultat

$$\begin{pmatrix} 0.919823 & -0.0672348 & -0.051452 \\ -0.0951178 & 1.05934 & 0.0281987 \\ 0.0810185 & -0.0173611 & 1.08218 \end{pmatrix}.$$

et on voit que l'écart avec les coefficients de notre approximation affine est de l'ordre de 10^{-2}, qui est "beaucoup plus petit" que $\|H\|$.

Exemple V : espaces de fonctions

On se place dans l'espace vectoriel normé $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$. Pour tout élément f de E, l'application $f^2 : x \mapsto f(x)^2$ est encore un élément de E. Pour $f, \vec{h}$ dans E on a

$$(f + \vec{h})^2 = f^2 + 2f\vec{h} + \vec{h}^2$$

et $\left\|\vec{h}^2\right\|_\infty = \left\|\vec{h}\right\|_\infty^2$ est négligeable devant h, donc l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f^2 \end{array}$$

est différentiable en tout point f, et sa différentielle est l'application linéaire $\vec{h} \mapsto 2f\vec{h}$, qui est bien continue car $\left\|2f\vec{h}\right\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \left\|\vec{h}\right\|_\infty$.

Exercice 4.— Vérifier cette dernière inégalité, qui dit simplement que le "sup" du produit de deux fonctions positives est plus petit que le produit des "sup".

Voici un deuxième exemple en dimension infinie. On se place dans le sous-espace vectoriel E_1 de E formé des fonctions de classe C^1. On munit E_1 de la norme $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Soit $f \in E_1$; la longueur du graphe de f est donnée par la formule

$$\mathrm{Long}(f) = \int_0^1 \left(1 + f'(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Le terme $\left(1 + f'(t)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est la norme du vecteur vitesse de la courbe $t \mapsto (t, f(t))$, qui décrit le graphe de f ; cette formule est un cas particulier de la longueur d'une courbe γ, qui est égale à $\int \|\gamma'(t)\| \, dt$.

En calculant la longueur du graphe de $f + h$, on montre que la "fonctionnelle" $\mathrm{Long} : E_1 \to \mathbb{R}^+$ est différentiable en tout point f, et sa différentielle est l'application linéaire continue

$$D\mathrm{Long}(f).h = \int_0^1 \left(1 + f'(t)^2\right)^{-\frac{1}{2}} f'(t)h'(t)dt.$$

Exercice 5.— Montrer que la fonctionnelle Long n'est *pas* continue en 0 lorsque E_1 est muni de la norme $\|.\|_\infty$. *Aide : trouver une fonction h uniformément proche de la fonction nulle, mais qui oscille beaucoup, de façon à ce que son graphe ait une longueur très supérieure à celle du graphe de la fonction nulle (h est uniformément petite mais sa dérivée ne l'est pas).* Mieux : montrer que cette application est discontinue en tout élément de E_1. *A fortiori*, cette application n'est pas différentiable.

(b) Dérivées partielles

On se place ici dans le cas où $E = \mathbb{R}^m$ et $F = \mathbb{R}^n$; on notera $(e_1, \ldots, e_m)$ la base canonique de E. On considère une application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \ldots f_n(x)). \end{array} \right.$$

Soit $a = (x_1, \ldots, x_m)$ un point de Ω. On dira que la fonction f admet, au point a, une *dérivée partielle par rapport à la i-ème variable* si la fonction

$$t \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_m)$$

Noter que cette fonction de t est définie sur un voisinage de 0.

est dérivable en $t = 0$. La dérivée est alors notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad := \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

On voit facilement que f admet une dérivée partielle par rapport à la i-ème variable si et seulement si chacune des fonctions f_i admet une dérivée partielle par rapport à la i-ème variable, et dans ce cas on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a) \right)$$

Proposition. *Si f est différentiable au point a, elle admet en ce point des dérivées partielles par rapport à toutes les variables, et les dérivées partielles sont données par*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a).e_i.$$

La matrice de $Df(a)$ dans les bases canoniques est alors la matrices des dérivées partielles,

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Si f va de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $Df(a)$ aussi, ce qui permet de se souvenir que les colonnes correspondent aux coordonnées $x_1, \ldots, x_m$ (cette matrice doit pouvoir être multipliée par un vecteur h de $\mathbb{R}^m$).

La matrice $Jf(a)$ est appelée *matrice jacobienne* de f au point a.

Recette de preuve.— Pour la première partie, **écrire** le développement limité de f donné par la différentielle, **appliquer-le** au vecteur te_i, **en déduire** la limite voulue. Pour la seconde, décomposer un vecteur h quelconque dans la base canonique en écrivant $h = \sum h_i e_i$.

La définition de dérivée partielle se généralise au cadre où E est un espace vectoriel normé quelconque, de la façon suivante. Soit a un point de Ω et $\vec{h}$ un vecteur non nul de E. On considère l'application

$$\varphi : t \mapsto f(a + t\vec{h})$$

$t \mapsto a + t\vec{h}$ est le paramétrage de la droite de E passant par le point a au temps $t = 0$, et parcourue à vitesse constante $\vec{h}$.

On dit que f admet, au point a, une *dérivée selon le vecteur $\vec{h}$* si φ est dérivable en 0, autrement dit si la limite

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{h}) - f(a)}{t}$$

existe. On montre comme avant que si f est différentiable en a alors elle y admet une dérivée selon tout vecteur non nul $\vec{h}$ de E, qui est donnée par la relation

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a) = Df(a).\vec{h}.$$

Exercice 6.— **Calculer** les dérivées partielles et la matrice jacobienne de la fonction $f(x,y) = xe^{3y}$, introduite dans l'exemple III ci-dessus, au point $a = (2,1)$. **Vérifier** qu'on retrouve la différentielle de f en ce point.

Exercice 7.— Avec les notations du paragraphe précédent, **vérifier** que la dérivée selon le $i$ème vecteur de la base canonique est égal à la $i$ème dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

(c) Règles de calcul

Dans cette section, E, F, G désignent des espaces vectoriels normés.

Différentielle à valeurs dans un espace produit Soit Ω un ouvert de E. Une application $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est différentiable au point a si et seulement si chaque fonction f_j est différentiable au point a, et dans ce cas on a simplement $Df(a).\vec{h} = (Df_1(a).\vec{h}, \dots, Df_n(a).\vec{h})$. Ceci suit rapidement de la définition.

Plus généralement, soient F_1, F_2 deux espace vectoriels normés, on peut considérer l'espace vectoriel produit $F = F_1 \times F_2$ et le munir par exemple de la norme $\|(v_1,v_2)\|_\infty := \mathrm{Max}(\|v_1\|, \|v_2\|)$. Alors une application $f = (f_1, f_2) : \Omega \to F_1 \times F_2$ est différentiable au point a si et seulement si f_1 et f_2 sont chacune différentiables en a, et dans ce cas on a $Df(a).\vec{h} = (Df_1(a).\vec{h}, Df_2(a).\vec{h})$.

Différentielle d'une somme, d'un produit, de l'inverse On considère deux applications $f_1, f_2 : \Omega \to F$ définies sur un ouvert Ω de E, et un point a de Ω.

Proposition. *On suppose que f_1 et f_2 sont toutes les deux sont différentiables au point a. Alors :*

- *L'application $f_1 + f_2$ est différentiable au point a, et on a $D(f_1 + f_2)(a) = Df_1(a) + Df_2(a)$.*
- *On suppose que $F = \mathbb{R}$. Alors l'application $f_1 f_2$ est différentiable au point a, et on a $D(f_1 f_2)(a) = f_1(a)Df_2(a) + f_2(a)Df_1(a)$.*

Recette de preuve.— À partir de développements limités à l'ordre 1 de f_1 et f_2, on essaie d'en obtenir un pour $f_1 + f_2$. **Faire la somme** des deux développements limités donne une écriture pour $(f_1 + f_2)(a + \vec{h})$, et il s'agit simplement de vérifier que la somme des deux restes $o_1(\vec{h}) + o_2(\vec{h})$ est encore négligeable devant h, ce qui est immédiat.

La démarche est analogue pour le produit : **faire** le produit des deux développements limités pour obtenir une écriture de $f_1(a + \vec{h}) f_2(a + \vec{h})$. Cette fois-ci le reste $o(h)$ est plus compliqué, **montrer** néanmoins à nouveau, en majorant $\left|o(\vec{h})\right|$, qu'il est négligeable devant $\vec{h}$. On utilisera la continuité des différentielles $Df_1(a)$ et $Df_2(a)$.

On déduit de ces deux règles que toute fonction polynomiale $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est différentiable : en effet une telle fonction est obtenue en effectuant des produits et des sommes à partir des fonctions coordonnées $p_i : (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i$, qui sont linéaires et donc différentiables en tout point.

Différentielle d'une composée On considère deux applications $f : \Omega \to F$, $g : \Omega' \to G$, où Ω est un ouvert de E et Ω' un ouvert de F.

Proposition. *Soit a un point de Ω tel que le point $b = f(a)$ est dans Ω'. Si f est différentiable en a et g différentiable en b alors $g \circ f$ est différentiable en a et la différentielle de $g \circ f$ au point a est la composée de la différentielle de f au point a et de la différentielle de g au point $f(a)$:*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b) \circ Df(a).$$

Recette de preuve.— Remarquons d'abord que la fonction $g \circ f$ est définie sur $\Omega \cap f^{-1}(\Omega')$; par continuité de f au point a, cet ensemble contient une boule ouverte centrée en a. En particulier $g \circ f$ est définie sur un ouvert de E contenant a, comme demandé dans la définition de la différentiabilité au point a.

Pour qu'on puisse évaluer $g(f(x))$, il faut notamment que $f(x)$ appartienne à l'ensemble de définition de g.

Écrire d'abord une "preuve approchée" en "faisant comme si", dans les développements limités de f et g, les restes étaient nuls : ceci permet en particulier de retrouver rapidement la formule. Pour un argument précis, on écrit les développements limités à l'ordre 1 de f en a et de g en $b = f(a)$,

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + Df(a).\vec{h} + o_1(\vec{h})$$

$$g(b + \vec{k}) = g(b) + Dg(b).\vec{k} + o_2(\vec{k}).$$

On pose $K(\vec{h}) = Df(a).\vec{h} + o_1(\vec{h})$, on remarque que $K(\vec{h})$ tend vers 0 lorsque $\vec{h}$ tend vers 0 (c'est exactement la continuité de f en a). **Reporter** alors le premier développement limité dans le second, plus précisément appliquer la deuxième égalité avec $\vec{k} = K(\vec{h})$. Ceci donne un développement limité de $g \circ f$ en a, à condition de savoir **montrer** que le reste

$$o_3(\vec{h}) = Dg(b).o_1(\vec{h}) + o_2(K(\vec{h}))$$

est négligeable devant $\vec{h}$; ceci va suivre du fait que les restes $o_1(\vec{h}), o_2(\vec{k})$ sont négligeables respectivement devant $\vec{h}$ et $\vec{k}$, et que le quotient $\left\|K(\vec{h})\right\| / \left\|\vec{h}\right\|$ est borné. Au passage, on utilise la majoration caractéristique des applications linéaires continues,

$$\|L.\vec{v}\| \leq \|L\| \, \|\vec{v}\|$$

où $\|L\|$ désigne la norme dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ ou $\mathcal{L}(F, G)$.

Exercice 8.— Généraliser en écrivant la formule donnant la différentielle en un point a de la composée des 3 applications $f_3 \circ f_2 \circ f_1$. *Aide : on appliquera deux fois de suite la formule de composition en écrivant par exemple $f_3 \circ f_2 \circ f_1 = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$.* Généraliser à la composée de n applications.

Exercice 9.— Que vaut la différentielle de $T_b \circ f$ lorsque T_b est la translation de F de vecteur b ? de $f \circ T_a$ lorsque T_a est la translation de E de vecteur a ? de $L \circ f$, lorsque L est une application linéaire ? De $f \circ L$?

Ce type de différentielles composées intervient dans les démonstrations, lorsqu'on veut se ramener au cas où $a = 0$ et $Df(a) = \mathrm{Id}$, par exemple dans l'énoncé sur la différentiabilité de f^{-1}.

Différentielle de la réciproque

Proposition. *Soit $f : \Omega_E \to \Omega_F$ un homéomorphisme entre un ouvert Ω_E de E et un ouvert Ω_F de F, et a un point de Ω_E. Si f est différentiable en a et si $Df(a)$ est inversible dans $\mathcal{L}(E,F)$, alors l'application réciproque f^{-1} est différentiable en $b := f(a)$ et la différentielle au point $f(a)$ de l'application f^{-1} est la réciproque de la différentielle de f au point a :*

$$D(f^{-1})(b) = (Df(a))^{-1}.$$

Cet énoncé nous servira au chapitre IV dans la preuve du théorème d'inversion locale.

Recette de preuve.— On traite d'abord le cas où $E = F$, $a = f(a) = 0$ et $Df(a) = \mathrm{Id}$. Dans ce cas, il s'agit de montrer que f^{-1} est différentiable en 0 et que sa différentielle en 0 est l'identité. Pour ceci, on écrit, pour tout $\vec{h}$ assez petit,

$$f(\vec{h}) = \vec{h} + o_1(\vec{h}).$$

Soit $\vec{k}$ assez petit. En appliquant cette égalité à $\vec{h} = f^{-1}(\vec{k})$, on obtient

$$f^{-1}(\vec{k}) = \vec{k} - o_1(f^{-1}(\vec{k}))$$

et il s'agit de montrer que le reste $o_2(\vec{k}) := -o_1(f^{-1}(\vec{k}))$ est négligeable devant $\vec{k}$, sachant que le reste $o_1(\vec{h})$ est négligeable devant $\vec{h}$. En utilisant l'hypothèse $Df(a) = \mathrm{Id}$, **montrer** que, au voisinage de 0, la norme de $f(\vec{h})$ est comparable à celle de $\vec{h}$: Pour tout $\left\|\vec{h}\right\|$ assez petit,

$$\frac{1}{2}\left\|\vec{h}\right\| < \left\|f(\vec{h})\right\| < \frac{3}{2}\left\|\vec{h}\right\|.$$

En remplaçant $\vec{h}$ par $f^{-1}(\vec{k})$, en déduire un encadrement similaire pour $f^{-1}(\vec{k})$ et $\vec{k}$: la norme de $f^{-1}(\vec{k})$ est comparable à celle de $\vec{k}$. Lorsque $\vec{h}$ tend vers 0, $o_1(\vec{h})/\vec{h}$ tend vers zéro, **en déduire** que $o_2(\vec{k})/\vec{k}$ tend aussi vers zéro, ce qu'on voulait.

Où a-t-on utilisé que f est un homéomorphisme ?

On déduit le cas général de ce cas particulier : on translate à la source et au but pour se ramener à $a = f(a) = 0$, puis on compose par $Df(a)^{-1}$ pour se ramener à une différentielle égale à l'identité. Ceci revient à considérer

$$g = Df(a)^{-1} \circ T_{-f(a)} \circ f \circ T_a$$

qui est un homéomorphisme comme composé d'homéomorphismes. **En déduire** f^{-1} en fonction de g^{-1}, puis le fait que f soit différentiable en a par composition (on pourra utiliser les exercices 8 et 9).

I.2 Commentaires

(a) La différentielle

On présente généralement la dérivée d'une fonction f en un point a comme un nombre qui mesure le taux de variation de $f(x)$ lorsque x passe au point a. Le but de cette section [1] est de mettre en avant une présentation un peu différente, plus générale. C'est l'idée de la différentiation vue comme une *approximation linéaire* [2], idée qui est au centre d'une grande partie des mathématiques actuelles.

1. Ce qui suit est adapté du merveilleux livre *The Princeton Companion to Mathematics*.
2. En toute rigueur il faudrait plutôt écrire ici *approximation affine*.

Intuitivement, dire que $f'(a) = m$ revient à dire que si on regarde à travers un puissant microscope le graphe de f dans une petite région autour du point $(a, f(a))$, ce que l'on voit est presque exactement une ligne droite de pente m. En d'autres termes, au voisinage de a, la fonction f est approximativement linéaire. On peut même écrire une formule pour la fonction linéaire g qui approxime f :

$$g(x) = f(a) + m(x - a).$$

Son graphe est la droite de pente m passant par le point $(a, f(a))$. Une façon, un peu plus claire, consiste à écrire

$$g(a + h) = f(a) + mh.$$

Dire que g approxime f au voisinage de a revient à dire que $f(a+h)$ est approximativement égal à $f(a) + mh$ lorsque h est petit.

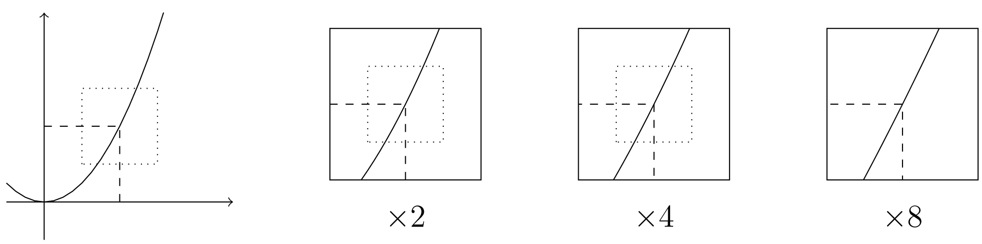


Figure 1 – Zooms successifs sur la fonction $x \mapsto x^2$

Ici, il faut faire un peu attention : après tout, si f est continue au point a alors quand h est petit, $f(a + h)$ sera proche de $f(a)$ et mh sera très petit, de sorte que $f(a+h)$ sera proche de $f(a)+mh$. Cette façon de voir semble marcher pour n'importe quelle valeur de m, et pourtant ce que nous nous voulons dire est très spécifique à la valeur $m = f'(a)$. Ce qui n'arrive qu'avec cette valeur de m, c'est que $f(a + h)$ est non seulement proche de $f(a) + mh$, mais tellement proche que la différence $o(h) = f(a + h) - f(a) - mh$ est petite *comparée à* h. Autrement dit,

$$\frac{o(h)}{h} \text{ tend vers 0 lorsque } h \text{ tend vers 0.}$$

Cette façon de voir peut se généraliser. Les fonctions qui apparaissent en mathématiques, et aussi dans les autres sciences, en ingénierie, en économie, *etc.*, sont souvent des fonctions de plusieurs variables, et peuvent donc être vues comme des fonctions définies sur un espace vectoriel de dimension strictement plus grande que 1. On peut alors se demander si, dans un petit voisinage d'un point, on peut les approcher par des applications linéaires. Lorsque c'est possible, cette approximation est extrêmement utile : une fonction générale peut *a priori* avoir un comportement très compliqué, mais si on peut l'approcher par une fonction linéaire, alors son comportement sera beaucoup plus facile à comprendre, au moins dans de petites régions de l'espace de dimension n. Dans ce cas on peut utiliser toute la machinerie de l'algèbre linéaire et des matrices, qui permet de faire des calculs, surtout si on dispose de l'aide d'un ordinateur.

Imaginez, par exemple, un météorologue s'intéressant à la façon dont la vitesse et la direction du vent varient d'un endroit à l'autre dans une certaine région de l'espace au-dessus de la surface de la Terre. À chaque point (x, y, z) de cette région (x et y représentent par exemple la latitude et la longitude et z l'altitude) on peut associer un vecteur (u, v, w) représentant la vitesse du vent en ce point : u, v, w sont les composantes du vecteur vitesse dans les directions x, y, z.

Déplaçons maintenant très légèrement le point (x, y, z) en choisissant trois petits nombres h, k, l et en considérant le point $(x + h, y + k, z + l)$. En ce nouveau point, nous nous attendons à ce que la vitesse du vent soit différente mais assez proche de celle au point (x, y, z) ; nous l'écrivons donc $(u+p, v+q, w+r)$. Comment la petite variation (p, q, r) du vecteur-vent dépend-elle de la petite variation (h, k, l) de la position du point ? En supposant que le vent n'est pas trop turbulent et que h,k, l sont suffisamment petits, nous nous attendons à ce que cette dépendance soit approximativement linéaire : c'est la façon dont la nature semble fonctionner. Autrement dit, nous nous attendons à ce qu'il existe une application linéaire T telle que (p, q, r) vale approximativement $T(h, k, l)$ lorsque h, k, l sont assez petits. Chacun des nombres p, q, r dépend de chacun des nombres h, k, l, et il nous faut donc 9 nombres pour exprimer cette dépendance linéaire. Sous forme matricielle, elle s'écrit

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}.$$

Chaque entrée a_{ij} de la matrice exprime comment l'un des trois nombres p, q, r dépend de l'un des trois nombres h, k, l. Par exemple, si l'on fixe x et z, ce qui revient à poser $h = l = 0$, on obtient $p = a_{12}k$: le coefficient a_{12} représente donc le taux de variation de u lorsque y change. Techniquement, a_{12} est la dérivée partielle $\partial u/\partial y$ au point (x, y, z).

Ceci nous dit comment calculer la matrice de T (appelée matrice jacobienne), mais d'un point de vue conceptuel il vaut mieux éviter les coordonnées et raisonner de façon purement vectorielle. En notant $\mathbf{x}$ pour (x, y, z), $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ pour (u, v, w) et $\mathbf{h}$ pour (h, k, l), tout ceci peut se résumer en écrivant la relation

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + T(\mathbf{h}) + \mathbf{o}(\mathbf{h}),$$

où $\mathbf{o}(\mathbf{h})$ est petit comparé à $\mathbf{h}$. Ceci nous dit que si nous ajoutons un petit vecteur $\mathbf{h}$ à $\mathbf{x}$, la variation de $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ sera approximativement $T(\mathbf{h})$. Cette formule est bien sûr très similaire à la formule du début, $f(a + h) = f(a) + mh + o(h)$.

Plus généralement, soit $\mathbf{u}$ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. On dit que cette application est différentiable s'il existe une application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que, à nouveau, la formule $\mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + T(\mathbf{h}) + \mathbf{o}(\mathbf{h})$ soit vérifiée avec $\mathbf{o}(\mathbf{h})$ petit devant $\mathbf{h}$. L'application linéaire T est appelée différentielle de $\mathbf{u}$ au point $\mathbf{x}$.

Le cas $m = 1$ est un cas particulier important. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable au point $\mathbf{x}$, alors la différentielle de f est une application linéaire T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. La matrice de T est un vecteur ligne de taille n, qui est souvent noté $\nabla f(x)$ et appelé gradient de f au point $\mathbf{x}$. Ce vecteur pointe dans la direction dans laquelle

f augmente le plus vite, et sa longueur est égale au taux de variation dans cette direction.

(b) Vecteur vitesse d'une courbe

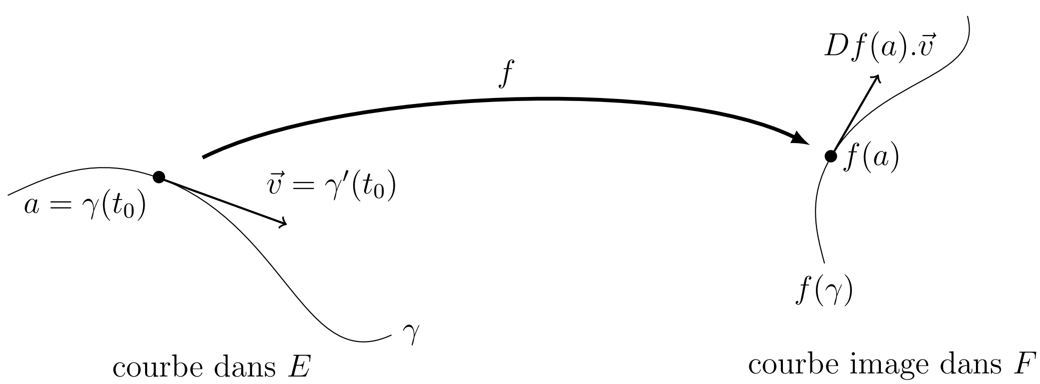
Une *courbe* dans un espace vectoriel normé E est une application $\gamma : I \to E$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; il est utile de se représenter mentalement cette courbe comme le parcours d'un mobile dans E pendant l'intervalle de temps I, le point $\gamma(t)$ représentant la position du mobile au temps t ; on suppose généralement que γ est continue. On dit que γ est *dérivable* en un temps t_0 si la limite

$$\gamma'(t_0) := \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}$$

existe. La dérivée $\gamma'(t_0)$ est alors un vecteur de E qu'on appelle aussi *vecteur vitesse de la courbe* γ *au temps* t_0. Cette définition généralise le cas où $E = \mathbb{R}$. On montre (comme dans le cas où $E = \mathbb{R}$) que lorsque γ est dérivable au temps t_0, elle y est aussi différentiable, et sa différentielle est l'application $h \mapsto \gamma'(t_0).h$, qui est bien linéaire de $\mathbb{R}$ dans E.

Considérons maintenant une application $f : \Omega \to F$, où Ω est un ouvert de E contenant l'image $\gamma(I)$ de notre courbe. Supposons que la courbe γ est dérivable au temps t_0, et que f est différentiable au point $a := \gamma(t_0)$. Une application directe du théorème de composition nous dit que l'application $f \circ \gamma$, qui est une courbe dans F, est aussi dérivable au temps t_0. De plus, son vecteur vitesse est l'image, par la différentielle au point a, du vecteur vitesse de la courbe γ :

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = Df(\gamma(t_0)).\gamma'(t_0).$$



Ceci nous donne une interprétation géométrique : *la différentielle au point a indique la façon dont l'application f transforme les vecteurs vitesse des courbes passant par le point a.*

Exercice 10.— **1.** Vérifier qu'une courbe $\gamma : I \to E$ qui est dérivable en t_0 est aussi différentiable en t_0, et que sa différentielle est bien $D\gamma(t_0) : h \mapsto \gamma'(t_0).h$. **2.** En déduire, à l'aide du théorème de composition, la formule $(f \circ \gamma)'(t_0) = Df(\gamma(t_0)).\gamma'(t_0)$. **3.** Que donne la formule dans le cas particulier où γ est le paramétrage d'une droite, $\gamma(t) = a + t\vec{h}$? Nous avons déjà rencontré cette formule dans le cours, pouvez-vous dire où ? Nous l'utiliserons très souvent, retenez-là !

(c) Dérivées partielles

Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le nombre dérivée $f'(x)$ s'interprète de la façon suivante : *pour un petit accroissement h de la variable x, l'accroissement $f(x+h)-f(x)$ de la fonction est à peu près $f'(x).h$, autrement dit il est proportionnel à h (en première approximation) et $f'(x)$ est le facteur de proportionnalité.*

Pour une fonction f de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, les dérivées partielles peuvent s'interpréter de façon analogue : lorsqu'on fait subir à l'*une* des variables x_i un petit accroissement h_i, les autres variables restant inchangées, la fonction f subit un petit accroissement

$$f(x_1,...,x_{i-1},x_i+h_i,x_{i+1},...,x_m)-f(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_m)$$

qui est à peu près égal à

$$h_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

La formule donnant la différentielle en coordonnées,

$$f(x+h)-f(x)\simeq Df(x).h=\sum_{i=1}^{m}h_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

s'interprète alors en disant que lorsqu'on modifie *toutes les variables à la fois*, chacune d'une petite quantité, l'accroissement de f est la somme des accroissements dûs à chacune des variables prise individuellement.

(d) La fonctionnelle de longueur

La fonctionnelle de longueur, donnée en exemple plus haut, est très utilisée, dans différents contextes. Sur une surface lisse, ses points critiques sont les "géodésiques", c'est-à-dire les plus courts chemins. En optique, le temps de parcourt d'un rayon lumineux est $\int n(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, où $n(P)$ est l'indice de réfraction au point P ; c'est une variante de la fonctionnelle de longueur, et le principe de Fermat dit que le chemin suivi par la lumière est un point critique de la fonctionnelle "temps de parcours".

I.3 Exercices

Exercice 11.—

1. Montrer que l'application "produit" $(x,y)\mapsto xy$, définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et donner sa différentielle en un point (x,y).

2. Plus généralement, montrer que l'application "produit scalaire" $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$, définie de $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, est différentiable sur $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ et donner sa différentielle.

3. Encore plus généralement, on considère trois espaces vectoriels normés de dimensions finies E_1,E_2,F, et une application bilinéaire $B:E_1\times E_2\to F$. On rappelle que, grâce l'hypothèse de dimension finie, B est automatiquement continue : il existe une constante C telle que, pour tout $x\in E_1$ et $y\in E_2$, $B(x,y)\leq C\,\|x\|\,\|y\|$. Montrer que B est différentiable sur $E=E_1\times E_2$, et que sa différentielle au point $a=(a_1,a_2)$ est l'application linéaire

$$(h_1,h_2)\mapsto B(h_1,a_2)+B(a_1,h_2).$$

On pourra utiliser sur E la norme $\|(h,k)\| = \max\{\|h\|, \|k\|\}$.

Exercice 12.—

1. Soient $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ différentiables au point a. **a.** Exprimer l'application produit $x \mapsto f_1(x)f_2(x)$ comme une composée de deux applications différentiables. **b.** Retrouver ainsi la formule de la différentielle d'un produit. (On pourra utiliser l'exercice 11).

2. Plus généralement, soient $f_1 : E \to F_1$ et $f_2 : E \to F_2$ différentiables au point a, et $B : F_1 \times F_2 \to F$ une application bilinéaire. On considère l'application $f : x \mapsto B(f_1(x), f_2(x))$, dont on veut montrer qu'elle est différentiable en a et calculer sa différentielle. **a.** Expliquer pourquoi la question précédente était un cas particulier cette question. **b.** Résoudre cette deuxième question en s'inspirant de la première.

3. Application : donner la différentielle au point a de $f : x \mapsto \langle f_1(x), f_2(x)\rangle$ lorsque f_1, f_2 sont deux applications de E dans $\mathbb{R}^n$ différentiable en a.

Exercice 13.— Calculer la différentielle de l'application $f \mapsto \int_0^1 (f(t))^2 dt$, définie de $C([0,1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, en un point α quelconque.

II Extrema : conditions d'ordre 1

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert d'un espace vectoriel normé E. Le calcul différentiel fournit des outils pour déterminer les extrema (maxima ou minima) de la fonction f sur Ω, ou, lorsque $E = \mathbb{R}^m$, sur une partie S de Ω donnée par un système d'équations.

II.1 Théorie

(a) Extrema libres

Soit X un espace métrique, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction, et x_0 un élément de X. On dit que

- f *admet un maximum en* x_0 si pour tout x de X, $f(x) \leq f(x_0)$,
- f *admet un minimum en* x_0 si pour tout x de X, $f(x) \geq f(x_0)$,
- f *admet un maximum local en* x_0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout élément x de la boule $B(x_0, \varepsilon)$, $f(x) \leq f(x_0)$,
- f *admet un minimum local en* x_0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout élément x de la boule $B(x_0, \varepsilon)$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Exercice 14.— Dessiner l'allure du graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet exactement deux minimum locaux dont l'un est un minimum, et un maximum local qui n'est pas un maximum.

Principe de Fermat en dimension 1 Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que f admette un maximum ou un minimum local en un point a. Le principe de Fermat dit que dans sous cette hypothèse, $f'(a) = 0$.

Démontrons ceci en détail. On a le développement limité

$$f(a+t) = f(a) + tf'(a) + o(t)$$

Ce raisonnement, bien que n'impliquant qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sera le point clé dans les preuves des théorèmes d'extrema en dimension supérieure.

avec $o(t)$ négligeable devant t. Mettons-le sous la forme (pour tout $t \neq 0$ et assez petit)

$$f(a+t) = f(a) + t\left(f'(a) + \frac{o(t)}{t}\right).$$

Puisque $o(t)$ est négligeable devant t, lorsque t tend vers 0, le terme entre parenthèses tend vers $f'(a)$. Supposons que $f'(a) > 0$. Alors pour tout $t \neq 0$ assez petit le terme entre parenthèses est strictement positif, et par conséquent on a

$$\begin{array}{ll} f(a+t) > f(a) & \text{pour tout } t > 0 \text{ assez petit,} \\ f(a+t) < f(a) & \text{pour tout } t < 0 \text{ assez petit.} \end{array}$$

Ceci montre que, si $f'(a) > 0$, f n'admet ni minimum local ni maximum local au point a. Un raisonnement symétrique conduit à la même conclusion lorsque $f'(a) < 0$. Par contraposée, on a la propriété voulue.

Le théorème suivant généralise le principe de Fermat en dimension supérieure.

Théorème. *(condition d'ordre 1 sur les extrema) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert d'un espace vectoriel normé E, et a un point de Ω en lequel f est différentiable. Si f admet un maximum local ou un minimum local en a, alors la différentielle en ce point est nulle :*

$$Df(a) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}.$$

Un point en lequel la différentielle est l'application nulle, comme dans la conclusion du théorème, est appelé *point critique*.

Recette de preuve.— On considère f comme dans l'énoncé, présentant un maximum ou un minimum local en un point a, on veut montrer que $Df(a) = 0$. Fixons un vecteur non nul $\vec{h}$, il s'agit de montrer que $Df(a).\vec{h} = 0$.

Donnons deux preuves. La première consiste à se ramener au cas de la dimension 1 traité avant l'énoncé, en regardant la restriction de f aux droites passant par a. On considère l'application $t \mapsto f(a+t\vec{h})$. **Expliquer** précisément pourquoi cette application est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, et admet un maximum ou minimum local en 0. **En déduire** que $Df(a).\vec{h} = 0$ (au besoin, relire la section sur les dérivées partielles).

La deuxième preuve consiste à généraliser la preuve de dimension 1. Supposons, par exemple que $Df(a).\vec{h} > 0$. **Ecrire** le développement limité à l'ordre 1 donné par la différentielle en a, l'appliquer au vecteur $\vec{k} = t\vec{h}$ et faire tendre t vers 0 ($\vec{h}$ étant fixé). En utilisant la définition de "négligeable devant $\vec{k}$" (et notamment la définition de la limite), **montrer** que $f(a+t\vec{h}) > f(a)$ pour tout réel $t > 0$ assez petit, et que $f(a + t\vec{h}) < f(a)$ pour tout réel $t < 0$ assez petit. Conclure.

La conclusion du théorème équivaut à :

$$\forall \vec{h}, \quad Df(a).\vec{h} = 0.$$

Lorsque f est à valeurs réelles, remarquons que $Df(a).\vec{h}$ est un nombre (le supposer strictement positif, comme on le fait plus bas, a donc bien un sens !).

(b) Vecteur gradient dans $\mathbb{R}^m$

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie et différentiable sur un ouvert Ω de $E = \mathbb{R}^m$, et a un point de Ω. La différentielle $Df(a)$ est alors une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$,

$$Df(a) : (h_1, \dots h_m) \longmapsto h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_m \frac{\partial f}{\partial x_m}(a),$$

et la matrice jacobienne est la matrice ligne

$$Jf(a) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \tfrac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right).$$

La transposée de cette matrice est appelé *vecteur gradient* de f au point a, vecteur que l'on note

$$\nabla_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Pour tout vecteur $\vec{h}$, on a alors

$$Df(a).\vec{h} = \sum_{i=1}^{m} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \langle \nabla_a f, \vec{h} \rangle$$

où $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ désigne le produit scalaire canonique des deux vecteurs $\vec{v}, \vec{w}$ dans $\mathbb{R}^m$. On voit notamment que $Df(a).\vec{h}$ est nul si et seulement si $\vec{h}$ est orthogonal au vecteur $\nabla_a f$.

On dit que le vecteur $\nabla_a f$ est *dual* de la forme linéaire $Df(a)$ relativement au produit scalaire.

Interprétation géométrique du gradient *Parmi les vecteurs $\vec{h}$ de norme $\varepsilon > 0$ fixé, le vecteur qui réalise le maximum de $Df(a).\vec{h}$ est celui qui est colinéaire au vecteur gradient et de même sens* : de façon condensée,

$$\sup_{\|\vec{h}\|=\varepsilon} Df(a).\vec{h} = Df(a).\vec{h}_0 \quad \text{où} \quad \vec{h}_0 = \varepsilon \frac{\nabla_a f}{\|\nabla_a f\|}$$

(voir l'exercice qui suit). Souvenons-nous que $Df(a).\vec{h}$ représente l'accroissement à l'ordre 1 de la fonction f lorqu'on se déplace du point a au point $a + \vec{h}$:

$$f(a + \vec{h}) - f(a) = Df(a).\vec{h} + o(\vec{h}).$$

Autrement dit, *le vecteur $\nabla_a f$ indique la direction dans laquelle la fonction f croît le plus vite, lorsqu'on se déplace un tout petit peu en partant du point a.*

Exercice 15.— Soit ∇ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^N$, $\varepsilon > 0$ fixé, et $\vec{h}$ un vecteur de norme ε. **1.** Rappeler la majoration de $\langle \nabla, \vec{h} \rangle$ donnée par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. **2.** En utilisant le cas d'égalité, trouver le vecteur $\vec{h}$ qui maximise $\langle \nabla, \vec{h} \rangle$ parmi tous les vecteurs de norme ε. Trouver de même celui qui minimise cette quantité. **3.** Faire un dessin représentant les deux vecteurs (maximisant et minimisant), les vecteurs $\vec{h}$ tels que $\langle \nabla, \vec{h} \rangle = 0$, et indiquer les vecteurs $\vec{h}$ pour lesquels cette quantité est strictement positive.

(c) Optimisation sous contrainte : extrema liés dans $\mathbb{R}^m$

On se donne un ouvert Ω de $E = \mathbb{R}^m$. On considère p fonctions $\varphi_1, ..., \varphi_p$ de Ω dans $\mathbb{R}$. Soit

$$S = \{x \in \Omega \mid \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_p(x) = 0\}.$$

On considère une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, et on s'intéresse aux extrema de la restriction $f_{|S}$, autrement dit on cherche à maximiser ou à minimiser la quantité $f(x)$, en respectant la contrainte imposée par les équations définissant S. Le théorème des extrema liés donne une condition nécessaire vérifiée par tout maximum local ou minimum local de f sur S. Ce théorème est une motivation importante pour la suite du cours : sa démonstration nécessite le théorème des fonctions implicites du chapitre IV, et l'énoncé lui-même deviendra beaucoup plus clair avec les notions de *sous-variété* et de *sous-espace vectoriel tangent* qui seront définies au chapitre V.

Cette situation est très courante dans les applications : voir les exemples plus bas.

On dit qu'un point a de S est ***régulier*** si les gradients $\nabla_a\varphi_1, \ldots, \nabla_a\varphi_p$ des fonctions en ce point sont des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^m$.

Théorème. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et a un point de $\Omega \cap S$ en lequel f est différentiable. Si a est un point régulier de S et si $f_{|S}$ admet un maximum ou un minimum local en a, alors il existe des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que*

$$\nabla_a f = \lambda_1 \nabla_a \varphi_1 + \cdots + \lambda_p \nabla_a \varphi_p \quad (\star).$$

La conclusion du théorème peut encore s'exprimer en disant que le vecteur gradient de f au point a appartient au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs gradients des fonctions φ_i au point a. Les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés *multiplicateurs de Lagrange*. Remarquons que l'égalité $(\star)$ apparaissant dans le théorème est équivalente à l'égalité analogue entre les différentielles,

$$Df(a) = \lambda_1 D\varphi_1(a) + \cdots + \lambda_p D\varphi_p(a) \qquad (\star\star).$$

Ceci suit immédiatement du fait que la matrice de la différentielle $Dg(a)$ d'une fonction g est la transposée de la matrice de $\nabla_a g$. Lorsque E est un espace vectoriel normé quelconque (éventuellement de dimension infini), on ne peut pas définir un vecteur gradient, mais le théorème se généralise en remplaçant l'égalité $(\star)$ par cette relation $(\star\star)$.

Cas linéaire

Recette de preuve.— Démontrons le théorème sans le cas particulier où toutes les applications φ_i sont linéaires. Dans ce cas, S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$. Notons E_0 l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\nabla\varphi_1, \dots, \nabla\varphi_p$, qu'on appelle *espace vectoriel engendré* par ces vecteurs et qu'on note $\mathrm{Vect}(\nabla\varphi_1, \dots, \nabla\varphi_p)$. Soit a un point de S. On suppose que $f_{|S}$ admet un extremum au point a. Notre but est de montrer que $\nabla_a f$ appartient à E_0.

Soit $\vec{h}$ un vecteur de S. **Montrer** que $\nabla_a f$ est orthogonal à $\vec{h}$. On pourra raisonner comme dans la preuve du théorème sur les extrema libres, en remarquant que $a + t\vec{h}$ est inclus dans S pour tout t.

C'est ici qu'on utilise la linéarité des applications φ_i.

On appelle *orthogonal* du sous-espace vectoriel S, et on note $S^\perp$, l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tout vecteur de S. On vient donc de montrer que $\nabla_a f$ appartient à $S^\perp$. La fin de la preuve, qui n'est plus du calcul différentiel mais uniquement de l'algèbre linéaire, consiste à montrer que $S^\perp = E_0$.

Interpréter les équations définissant S en termes d'orthogonalité. **En déduire que** que $S = E_0^\perp$. On a donc $S^\perp = (E_0^\perp)^\perp$ (!) Il reste à utiliser la proposition générale suivante :

Proposition. *Tout sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^m$ est égal à l'orthogonal de son orthogonal :*

$$V = (V^\perp)^\perp.$$

Pour montrer cette proposition, on utilise une base orthonormée $(e_1, ..., e_q)$ de V, que l'on complète en une base orthonormée $(e_1, ..., e_m)$ de $\mathbb{R}^m$. **Décrire** alors $V^\perp$ à l'aide de cette base. **Décrire** enfin $(V^\perp)^\perp$. **Conclure en résumant toute la preuve**.

Retenons en particulier l'interprétation géométrique : lorsque S est un sous-espace vectoriel, *si le point a est un extremum local de la fonction $f_{|S}$, le vecteur $\nabla_a f$ est orthogonal à S*. Plus loin, nous interpréterons l'égalité du théorème des extrema liés en disant que *le vecteur $\nabla_a f$ est orthogonal au sous-espace vectoriel tangent à S au point a.*

Exemple 1 : boite de surface minimale La volume d'une boite rectangulaire de côtés x, y, z est $f(x, y, z) = xyz$, la surface extérieure est $g(x, y, z) = 2yz+2xz+2xy$. On veut fabriquer une boite de volume 1 avec le moins de matériau possible, autrement dit on cherche à minimiser $g(x, y, z)$ avec la contrainte $f(x, y, z) = 1$.

Exercice 16.—

1. Utiliser l'équation $f(x, y, z) = 1$ pour exprimer z en fonction de x et y. En déduire une fonction φ des deux variables x et y dont on cherche le minimum. Trouver les points critiques de φ. Conclure à l'aide de la condition d'ordre 1 sur les extrema libres.

2. On peut aussi utiliser le théorème des extrema liés. Exprimer les gradients de f et de g, écrire la condition donnée par le théorème. Résoudre le problème en faisant les différences des équations deux à deux.

3. Variante mercantile : quelle dimension faut-il donner à une boite pour qu'elle ait un volume de $96cm^3$, tout en minimisant le coût de fabrication, sachant que la matériau constituant le dessous coûte 1 euro le cm^2, 5 euros pour le dessus, et 2 euros pour les côtés ?

Exemple 2 : distance à une courbe Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, on considère l'ensemble

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

Etant donné un point $P = (a, b)$ du plan, on cherche les points Q de C les plus proches de P. Autrement dit, on cherche le minimum de la fonction

$$g(x, y) := d((a, b), (x, y))^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

parmi les $Q = (x, y)$ satisfaisant la contrainte $f(x, y) = 0$. Si le minimum est atteint en un point Q régulier de C, alors le vecteur $\nabla_Q f$ est proportionnel au vecteur

$$\nabla_Q g = 2 \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$

Ce deuxième vecteur dirige la droite (PQ). On verra au chapitre V, section (c) que le vecteur $\nabla_Q f$ est orthogonal à la tangente à la courbe C au point Q ; par conséquent cette relation exprime l'orthogonalité entre la courbe et la droite (PQ). Faire un dessin.

Exercice 17.— On choisit ici $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Comme avant, on note C l'ensemble des points satisfaisant l'équation $f(x, y) = 0$. On pose $P = (1, 1)$.

1. Montrer que l'ensemble C est un fermé du plan. En déduire qu'il existe un point Q_0 de C réalisant la distance de C à P, c'est-à-dire tel que :

$$d(P, Q_0) = \inf\{d(P, Q) \mid Q \in C\}.$$

2. Vérifier que le gradient de f ne s'annule qu'aux point $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

3. En utilisant la discussion qui précède, déterminer le point Q_0. *Aide : traduire la proportionnalité des deux vecteurs à l'aide du déterminant, puis factoriser $(x - y)$ dans cette équation. En se souvenant que le point Q appartient à C, vérifier que le système de deux équations a trois points solutions. Conclure en déterminant lesquels des points réalisent effectivement le minimum ; on vérifiera que le minimum n'est pas atteint en un point non régulier de C.*

Exemple 3 : distance entre deux courbes Considérons maintenant un ensemble C défini par l'équation $f(x,y)=0$ et un ensemble D défini par l'équation $g(x,y)=0$, où f et g sont différentiables. On cherche les points $P=(x_P,y_P)$ et $Q=(x_Q,y_Q)$, respectivement sur C et D, réalisant le minimum de la distance entre un point de C et un point de D. Il s'agit donc de minimiser la fonction

$$h(x_P,y_P,x_Q,y_Q)=(x_P-y_P)^2+(x_Q-y_Q)^2$$

soumise aux contraintes $f(x_P,y_P)=0$ et $g(x_Q,y_Q)=0$. nous sommes donc dans $\mathbb{R}^4$ avec deux équations de contraintes. Le théorème des extrema liés nous dit que si un couple P,Q réalise ce minimum, alors les vecteurs

Noter que nous sommes partis d'un problème qui concernait la dimension deux, mais sa résolution nous oblige à un détour par la dimension quatre...

$$\nabla_{(P,Q)}h=2\begin{pmatrix}x_P-x_Q\\ y_P-y_Q\\ x_Q-x_P\\ y_Q-y_P\end{pmatrix},\quad \nabla_{(P,Q)}f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(P)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(P)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \nabla_{(P,Q)}g=2\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{\partial g}{\partial x}(Q)\\ \frac{\partial g}{\partial y}(Q)\end{pmatrix}$$

sont liés (à condition que le point (P,Q) soit régulier vis à vis des équations de contrainte, ce qui signifie simplement que les vecteurs gradients $\nabla_{(P,Q)}f$ et $\nabla_{(P,Q)}g$ ne sont pas nuls). En analysant la matrice 4×3 de ces trois vecteurs, on trouve les conditions

$$\det\begin{pmatrix}x_P-x_Q & \frac{\partial f}{\partial x}(P)\\ y_P-y_Q & \frac{\partial f}{\partial y}(P)\end{pmatrix}=0,\quad \det\begin{pmatrix}x_Q-x_P & \frac{\partial g}{\partial x}(Q)\\ y_Q-y_P & \frac{\partial g}{\partial y}(Q)\end{pmatrix}=0,$$

ce qui signifie que la droite (PQ) est orthogonale à la courbe C au point P et à la courbe D au point Q.

Faire un dessin !

Exercice 18.— A l'aide de ce qui précède, calculer la distance entre la parabole d'équation $y=x^2$ et la droite d'équation $y-x+1=0$.

Exemple 4 : inégalité arithmético-géométrique On se place dans $E=\mathbb{R}^m$, et on considère la fonction

$$g(x_1,\dots x_m)=\Pi_{i=1}^m x_i$$

qui associe à tout point le produit de ses coordonnées. On cherche le maximum de cette fonction sur l'ensemble

$$K=\{(x_1,\dots,x_m)\mid \sum_{i=1}^m x_i=c, x_1\geq 0,\dots,x_m\geq 0\}$$

où c est une constante donnée. L'ensemble K est compact (**vérifier**), la fonction g est continue, ce qui assure qu'il existe un point Q de K en lequel le maximum est atteint. Puisque la fonction g s'annule lorsque l'une des coordonnées est nulle et est positive sur K, le maximum est en fait atteint en un point de

$$O=\{(x_1,\dots,x_m)\mid \sum_{i=1}^m x_i=c, x_1>0,\dots,x_m>0\};$$

le point Q est alors un maximum local de g sur l'hyperplan d'équation $\sum x_i = c$, par conséquent le théorème des extrema liés s'applique (**vérifier** que tous les points de cet hyperplan sont réguliers). En appelant f la fonction définie par $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum x_i$, Il existe donc λ tel que

$$\nabla_Q g = \lambda \nabla_Q f.$$

Cette égalité entraîne que toutes les coordonnées de Q sont égales (**vérifier**), et comme Q appartient à S on en déduit que Q est le point $(\frac{c}{n}, \ldots, \frac{c}{n})$, et que $g(Q) = (\frac{c}{n})^n$. Puisque Q réalise le maximum de la fonction g sur K, on a démontré que pour tout point $(x_1, \ldots, x_m)$ de K,

$$x_1 \cdots x_m \leq \left(\frac{c}{n}\right)^n$$

ce qui s'écrit encore

$$(x_1 \cdots x_m)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_m}{n}.$$

Puisque la constante c était quelconque, cette inégalité est en fait valable pour tout m-uplet de nombres positifs ; on l'appelle *inégalité arithmético-géométrique.*

Espaces de fonctions On se place dans $E = C([0,1], \mathbb{R})$, et on cherche les fonctions α maximisant $\int \alpha^2$ parmi les fonctions d'intégrale 1. On pose

$$F(\alpha) = \int_0^1 (\alpha(t))^2 dt, \quad \Phi(\alpha) = \int_0^1 \alpha(t) dt - 1.$$

Calculer la différentielle de F en un point α (comme d'habitude, on pourra exprimer $F(\alpha+h)$). Remarquer que Φ est affine, en déduire $D\Phi(\alpha)$ que l'on notera L (cette application linéaire ne dépend pas de α). Soit α une solution éventuelle au problème. On utilise la condition ($\star\star$) donnée par la version du théorème des extrema liés en dimension infinie : il existe λ tel que $DF(\alpha) = \lambda L$, autrement dit pour tout h, $DF(\alpha).h = \lambda L(h)$, ce qui s'écrit encore

$$\int_0^1 (2\alpha(t) - \lambda) h(t) dt = 0.$$

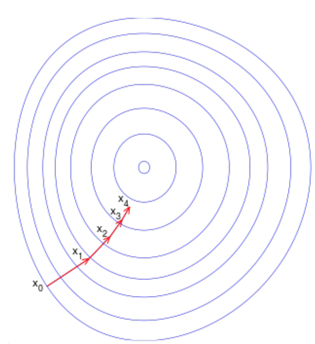
Cette égalité est valable pour tout h, **choisir** un h pour lequel l'égalité devient du type $\int_0^1 (\ldots)^2 dt = 0$. En déduire que α doit être une fonction constante, puis que c'est la fonction $t \mapsto 1$.

Ce raisonnement montre que *si α est un maximum de $F(\alpha)$ sous la contrainte $\Phi(\alpha) = 0$, alors α est la fonction constante égale à* 1. **Montrer** enfin que la fonction 1 est bien un maximum, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions.

II.2 Commentaires

(a) Gradient et optimisation

Comment programmer un ordinateur pour rechercher les extrema d'une fonction ? La notion de vecteur gradient est à la base d'algorithmes de recherche du maximum d'une fonction, comme l'algorithme du gradient, cf Wikipedia. Le principe est simple : il consiste à partir d'un point au hasard, et à se déplacer d'une certaine longueur (appelée *pas*) dans la direction indiquée par le vecteur gradient en ce point. Si le pas n'est pas trop grand, on se retrouve en un point où la valeur de la fonction est supérieure (conformément à l'interprétation géométrique du gradient). On se dirige à nouveau dans la direction indiquée par le vecteur gradient au nouveau point. On recommence le procédé tant que la norme du vecteur gradient est supérieure à un certain seuil. En pratique, la méthode fournit une bonne approximation d'un maximum local. Pour espérer trouver un maximum absolu, il faut la relancer un grand nombre de fois en partant à chaque fois d'un point différent choisi aléatoirement.

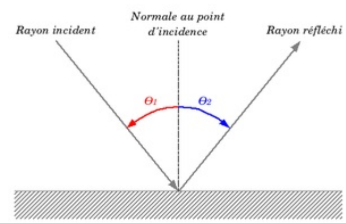


Source Wikipedia

(b) Extrema liés et billards

Beaucoup de mathématiciens aiment jouer au billard, mais ils ont des règles un peu spéciales : leur préoccupation principale consiste à déterminer les trajectoires qui se répètent périodiquement après un certain nombre de rebonds, et ils passent leur temps à essayer toutes sorte de tables de jeu avec des formes variées.

Considérons par exemple une table de billard de forme elliptique. Alors il existe une façon de lancer une boule de billard telle qu'après trois rebonds, la boule repasse par sa position initiale avec une vitesse identique à sa vitesse initiale ; ainsi, s'il n'y a pas de frottement, la boule va parcourir inlassablement la même trajectoire à trois rebonds. La lois des rebonds sur les bords de la table est la même que la loi de réflection des rayons lumineux : la trajectoire de la balle après le rebond est symétrique de la trajectoire d'arrivée par rapport à la normale au bord. Ainsi, le problème revient à trouver un triangle ABC, inscrit dans l'ellipse, et qui satisfasse cette propriété de réflection en chacun de ses trois sommets.



source Wikipedia

Comment montrer l'existence d'un tel triangle ? Considérons trois points A, B, C sur l'ellipse qui borde le billard, choisis de façon à maximiser la longueur

$$d(A, B) + d(B, C) + d(C, A).$$

Pouvez-vous **expliquer** pourquoi il existe trois points qui maximisent cette quantité ?

Le théorème des extrema liés s'applique. A partir de la relation qu'il fournit, on peut démontrer que le triangle ABC respectent les lois de la réflection. Ceci prouve l'existence d'au moins une trajectoire périodique dans le billard elliptique.

Le même argument marche pour un nombre quelconque de rebonds, et pour n'importe quelle table convexe dont le bord est une courbe de classe C^1. On peut aussi démontrer l'existence d'orbite périodique dans un billard en forme de triangle, du moins si tous les angles du triangle sont des angles aigus (inférieurs à 90°). Le cas des triangles obtus est beaucoup plus difficile, et personne ne sait si toutes les tables de billards en forme de triangle obtu admettent des trajectoires périodiques...

L'argument complet se trouve dans le livre *Petit guide de calcul différentiel* de François Rouvière.

II.3 Exercices

Exercice 19.— Trouver le maximum et le minimum de $f(x, y, z) = xyz$ soumise aux contraintes $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x + y + z = 1$. Aide : la méthode des multiplicateurs de Lagrange donne cinq solutions potentielles.

Dans les livres d'économie, le critère des extrema liés est souvent présenté de la façon suivante, qui a l'avantage d'être facile à mémoriser. Le problème consiste à maximiser une fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sous les contraintes $\phi_1(x) = 0, \ldots \phi_p(x) = 0$. Introduisons la fonction $L : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \phi_i(x).$$

On résoud le problème en cherchant un point critique de L. Plus précisément, si x_0 est une solution au problème, il existe λ_0 tel que (x_0, λ_0) est un point critique de L.

Exercice 20.— Vérifier que ce critère pratique est équivalent au critère donné dans le théorème des extrema liés.

Exercice 21.—(extrait d'un poly d'économie) Assume there are three commodities with amounts x_1, x_2, and x_3, and prices p_1, p_2, and p_3. Assume the total value is fixed, $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = w_0$, where $w_0 > 0$ is a fixed positive constant. Assume the utility is given by $U = x_1x_2x_3$. Find the maximum of the utility U with constrained total value. Same question if the utility is given by $U = x_1^{a_1} x_2^{a_1} x_3^{a_1}$.

III Applications de classe C^1

Dans ce qui suit, comme avant, E et F sont des espaces vectoriels normés.

III.1 Théorie

(a) L'inégalité des accroissements finis

Théorème (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit* $\gamma : [a,b] \to F$ *une application continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$*. On suppose qu'il existe* M *tel que*

$$\forall t \in]a,b[, \quad \|\gamma'(t)\| \leq M.$$

Alors

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq M(b-a).$$

Recette de preuve.— Soit $\varepsilon > 0$. On considère l'ensemble I des nombres $t \in [a,b]$ vérifiant

$$\forall s \in [a,t], \quad \|\gamma(s) - \gamma(a)\| \leq (M+\varepsilon)(s-a) + \varepsilon \quad (\star).$$

On veut montrer que b appartient à I. **Vérifier** que si $t \in I$, alors $[a,t] \subset I$. **Vérifier** que $a \in I$, et qu'il existe $\delta > 0$ tel que I contient l'intervalle $[a,\delta]$. **Vérifier** que I est fermé (on écrira I comme l'image réciproque du fermé $]-\infty, 0]$ par une application continue).

Si vous vous demandez pourquoi on considère cet ensemble I, lisez la preuve jusqu'au bout et reposez-vous ensuite la question. En particulier, à quoi sert ε ?

L'ensemble I est donc un intervalle fermé contenant a et non réduit à a : il existe $t_0 \in]a,b]$ tel que $I = [a,t_0]$. On veut montrer que $t_0 = b$, on suppose par l'absurde que $t_0 < b$. Puisque $t_0 \in]a,b[$, l'hypothèse du théorème nous dit que γ est dérivable en t_0. Ecrivons le développement limité que nous donne cette propriété : on a, pour tout $h \neq 0$ assez petit,

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + h\gamma'(t_0) + o(h) = \gamma(t_0) + h\left(\gamma'(t_0) + \frac{o(h)}{h}\right)$$

avec $o(h)$ négligeable devant h. En utilisant la définition de "négligeable devant h" avec notre ε, **en déduire** qu'il existe $\delta > 0$ tel que $[t_0, t_0+\delta] \subset [a,b]$ et pour tout $h \in [0,\delta]$,

$$\|\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)\| \leq (M+\varepsilon).h.$$

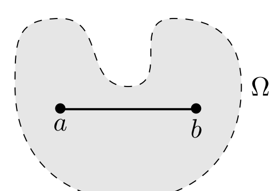
Puisque t_0 appartient à I, il vérifie l'inégalité $(\star)$. **En déduire** que, pour tout $h \in [0,\delta]$, le nombre $t_0 + h$ vérifie aussi cette inégalité. On conclut que $t_0 + \delta$ appartient aussi à I. Ceci contredit l'hypothèse que $I = [a,t_0]$.

On a donc $t_0 = b$, et en particulier

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq (M+\varepsilon)(b-a) + \varepsilon.$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, un passage à la limite donne l'inégalité $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq M(b-a)$ recherchée.

Soit maintenant $f : \Omega \to F$ différentiable sur un ouvert Ω de E. On considère deux points a, b de Ω, et on suppose que le segment $[a,b]$ est inclus dans Ω.



Corollaire 1.

1. *S'il existe une constante M telle que, en tout point x de $[a,b]$, on a $\|Df(x)\| \leq M$, alors*
$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\| .$$
En particulier, si $x \mapsto \|Df(x)\|$ est majoré par M sur Ω et si Ω est convexe, alors f est M-lipschitzienne sur Ω.
2. *S'il existe une constante M telle que, en tout point x de $[a,b]$, on a $\|Df(x) - Df(a)\| \leq M$, alors*
$$\|f(b) - f(a) - Df(a).(b-a)\| \leq M \|b - a\| .$$

Préciser, pour chacune des trois normes apparaissant dans l'énoncé, l'espace sur lequel elle est définie.

Recette de preuve.— On rappelle que l'application $t \mapsto (1-t)a + tb$ donne un paramétrage du segment $[a,b]$, parcouru à la vitesse constante $(b-a)$ entre le temps $t=0$ et le temps $t=1$. Pour démontrer le premier point, composons ce paramétrage avec l'application f, autrement dit considérons l'application
$$\gamma : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & f((1-t)a+tb). \end{array} \right.$$
Calculer la dérivée $\gamma'(t)$ (on pourra consulter la section sur la vitesse d'une courbe dans le chapitre I). On rappelle que par définition de la norme d'une application linéaire, pour tout point x sur le segment $[a,b]$ et pour tout vecteur $\vec{v}$, on a
$$\|Df(x).\vec{v}\| \leq \|Df(x)\| \|\vec{v}\| \leq M \|\vec{v}\| .$$
En déduire une majoration du vecteur vitesse de γ. **Conclure** à l'aide du théorème précédent. **Vérifier** la seconde phrase du premier point (critère de lipschitziennité).

Pour le second point, **appliquer** le premier point à la fonction g définie par $g(x) = f(x) - Df(a)(x-a)$.

Corollaire 2. *Soit $f : \Omega \to F$ une application différentiable sur un ouvert connexe Ω. Supposons que $Df(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. Alors f est constante sur Ω.*

Recette de preuve.— On se place sous les hypothèses de l'énoncé. En appliquant les résultats précédents, **montrer** que l'application f est constante sur toute boule $B(x,\varepsilon)$ incluse dans Ω. On dit que f est *localement constante*. La fin de la preuve consiste à montrer que sur ouvert connexe, toute application localement constante est constante.

Soit maintenant c un nombre, et $\Omega_c = \{x \in \Omega \mid f(x) = c\}$ (cet ensemble est appelé *ligne de niveau* c de la fonction f). En écrivant cet ensemble comme image réciproque d'un fermé par une application continue, **expliquer** pourquoi Ω_c est fermé dans Ω. En utilisant que f est localement constante, **montrer** que cet ensemble est aussi ouvert. **Conclure**.

Exercice 22.— Dans cet exercice, on montre que si la vitesse le long d'une courbe reste proche d'un vecteur $\vec{v}$, alors la courbe reste proche de la droite parcourue à vitesse $\vec{v}$. Plus précisément, soit t un réel positif, et $\gamma : [0,t] \to F$ une application continue, on suppose que γ est dérivable sur $]0,t[$. Soit $\vec{v}$ un vecteur de F, et M un réel tel que
$$\forall s \in [0,t], \|\gamma'(s) - \vec{v}\| \leq M.$$
Montrer l'inégalité
$$\|\gamma(t) - (\gamma(0) + t.\vec{v})\| \leq M\,|t| \quad (\star).$$
Indication : appliquer le théorème à la fonction $f(s) = \gamma(s) - s\vec{v}$.

Cet exercice est utilisé dans la preuve du théorème de caractérisation des applications de classe C^1.

(b) Applications de classe C^1

Lorsque $f : \Omega \to F$ est différentiable en tout point de Ω, on peut considérer l'application

$$x \mapsto Df(x)$$

qui va de Ω dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$. Si elle est continue, on dira que f est *de classe C^1 sur* Ω. On montre immédiatement qu'une somme, composition, produit, inverse d'applications de classe C^1 est de classe C^1.

Les énoncés qui suivent fournissent un critère pratique, en particulier lorsque f est donnée par une formule : pour montrer qu'elle est de classe C^1, il suffit de calculer ses dérivées partielles et de vérifier qu'elles sont continues.

Théorème. *On suppose ici que $E = \mathbb{R}^m$. Soit $f : \Omega \to F$ définie sur un ouvert Ω de E. Supposons*

- *que f admet des dérivées partielles en tout point de Ω,*
- *que ces dérivées partielles sont des fonctions continues sur Ω.*

Alors f est différentiable sur Ω.

Recette de preuve.— Pour simplifier on se place dans $E = \mathbb{R}^2$, on note (x_1, x_2) les coordonnées des points de $\mathbb{R}^2$. On utilise la norme $\|.\|_\infty$ sur E. On se place sous les hypothèses du théorème. Soit $a = (a_1, a_2)$ un point de Ω, et considérons l'application linéaire L définie par

Liste des objets introduits dans la preuve : le point a, l'application L...

$$L(h_1, h_2) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).$$

On cherche à montrer que f est différentiable au point a, et que $Df(a) = L$. Pour ceci, pour tout vecteur $\vec{h} = (h_1, h_2)$ assez petit, on pose $o(\vec{h}) = f(a + \vec{h}) - f(a) - L.\vec{h}$, on veut voir que cette quantité est négligeable devant $\vec{h}$; rappelons que ceci signifie que $o(\vec{h})/\left\|\vec{h}\right\|$ tend vers 0 lorsque $\vec{h}$ tend vers 0. **Vérifier** que $o(\vec{h})$ est la somme des deux quantités

... un "petit" vecteur $\vec{h}$, les applications o, o_1, o_2...

$$o_1(h_1, h_2) = f(a_1 + h_1, a_2) - \left(f(a_1, a_2) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right)$$

et

$$o_2(h_1, h_2) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - \left(f(a_1 + h_1, a_2) - h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right).$$

On va montrer que chacune d'elle est négligeable devant $\vec{h}$. Pour estimer $o_1(\vec{h})$, on introduit la courbe $\gamma_1 : s \mapsto f((a_1 + s, a_2))$. **Calculer**, pour tout s, le vecteur vitesse $\gamma_1'(s)$. Fixons un $\varepsilon > 0$. On utilise maintenant l'hypothèse de continuité des dérivées partielles : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x dans la boule $B(a, \delta)$,

... la courbe γ_1, un nombre $\varepsilon > 0$, un nombre $\delta > 0$. Et c'est tout !

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right\| < \varepsilon.$$

On suppose désormais que $\left\|\vec{h}\right\| < \delta$. Le segment entre les points a et $a + (h_1, 0)$ est alors contenu dans la boule $B(a, \delta)$, **en déduire** que les vecteurs vitesse de la courbe γ_1 vérifient, pour tout $s \in [0, h_1]$,

$$\|\gamma_1'(s) - \gamma_1'(0)\| < \varepsilon.$$

Les vecteurs vitesse de γ_1 étant "proches" du vecteur $\gamma_1'(0)$, on en déduit que γ_1 "n'est pas trop loin" de la droite $s \mapsto \gamma(0) + s\gamma'(0)$: plus précisément, on applique le résultat de l'exercice 22 ci-dessus, avec $v = \gamma_1'(0)$; l'inégalité $(\star)$ donne alors

$$\|\gamma_1(h_1) - \gamma_1(0) - \gamma_1'(0)\| \leq \varepsilon \, |h_1| \, .$$

Remplacer γ_1 par sa définition pour obtenir la majoration

$$\left\| o_1(\vec{h}) \right\| \leq \varepsilon \, |h_1| \leq \varepsilon \left\| \vec{h} \right\|.$$

En relisant ce qui précède, **vérifier** qu'on a montré ceci :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \vec{h} \in B(0, \delta), \quad \left\| o_1(\vec{h}) \right\| \leq \varepsilon \left\| \vec{h} \right\|.$$

Vérifier que ceci correspond à la définition de "$o_1(\vec{h})$ est négligeable devant $\vec{h}$".

On estime $o_2(\vec{h})$ de façon tout à fait analogue, en utilisant la courbe

$$\gamma_2 : s \mapsto f((a_1 + h_1, a_2 + s).$$

Écrire les détails de cette estimation, en vous inspirant de ce qui précède. Ceci termine la preuve en dimension 2. La preuve du cas général est très similaire, on écrit $o(\vec{h})$ comme la somme de m fonctions $o_1(\vec{h}), \ldots, o_m(\vec{h})$.

Corollaire. *Lorsque $E = \mathbb{R}^m$, f est de classe C^1 sur Ω si et seulement si les dérivées partielles de f existent et sont continues sur Ω.*

En particulier, lorsque $F = \mathbb{R}^n$, $Df(x)$ dépend continûment de x si et seulement si les coefficients de la matrice jacobienne de f dépendent continûment de x.

Recette de preuve.— Lorsque les dérivées partielles de f existent et sont continues sur Ω, on a déjà vu que f est différentiable sur Ω, il reste à voir que $Df(x)$ dépend continûment de x. Pour cela, **montrer** l'inégalité

$$\| Df(x) - Df(y) \| \leq \max_{i=1,\ldots,N} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right\|$$

(on a muni E de la norme $\|h\|_1 = |h_1| + \cdots + |h_1|$). Si F est de dimension finie, on peut utiliser l'argument alternatif suivant. Par hypothèses, les coefficients de la matrice jacobienne $Jf(x)$ dépendent continûment de x. Ceci montre que l'application $x \mapsto Jf(x)$ est continue. D'autre part l'application qui associe à une application linéaire sa matrice est un isomorphisme d'espaces vectoriels, c'est donc un homéomorphisme puisqu'en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues. Par composition, $x \mapsto Df(x)$ est continue.

Exemple Reprenons la fonction $f(x, y) = xe^{3y}$ dont on avait montré au premier chapitre la différentiabilité par une méthode directe. D'après les théorèmes de calcul différentielle en une variable, cette fonction admet des dérivée partielles, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{3y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3xe^{3y}$$

qui sont des fonctions continues de (x, y). On en déduit que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$, et sa différentielle est donnée par

$$Df(x, y)(\vec{h}) = e^{3y} h_1 + 3xe^{3y} h_2.$$

III.2 Commentaires

(a) Interprétation physique de l'inégalité des accroissements finis

Si $\gamma(t)$ est la position au temps t d'une voiture, $\|\gamma'(t)\|$ est la vitesse indiquée au compteur au temps t ; $\|\gamma(b) - \gamma(a)\|$ est la distance (à vol d'oiseau) entre le point de départ et le point d'arrivée ; $b - a$ est le temps de parcours, et l'inégalité du théorème des accroissements finis ne dit rien d'autre que ceci : en roulant pendant un temps T avec une vitesse au compteur qui ne dépasse jamais la valeur V, on ne peut pas se retrouver à une distance supérieure à VT du point de départ.

(b) Continuité de Df

Le "raisonnement" suivant est faux :

≪ *En dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues, donc la différentielle d'une application différentiable* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *est continue, et* f *est automatiquement de classe* C^1 ≫.

Où est l'erreur ?...

La différentielle Df est une application qui prend en entrée une première variable a, puis une seconde variable h. Ces deux variables jouent des rôles très différents. La première variable, a, représente le point en lequel on calcule la différentielle. La différentielle $Df(a)$ est alors une application linéaire, elle associe au vecteur h, qui représente une petite variation du point a, le vecteur $Df(a).h$. Pour un point a fixé, l'application $Df(a) : h \mapsto Df(a).h$ est linéaire et toujours continue (même en dimension infinie, parce que ça fait partie de la définition de différentiabilité). L'application $a \mapsto Df(a)$, elle, n'est pas linéaire, et n'est en général pas continue, même en dimension finie.

III.3 Exercices

Exercice 23.—

1. L'inégalité des accroissements finis n'a d'intérêt que si la différentielle est bornée sur le segment $[a, b]$. Expliquer pourquoi c'est le cas lorsque γ est de classe C^1.

2. En supposant Ω convexe et $\|Df(x)\| \leq M$ pour tout x de Ω, rappeler pourquoi f est M-lipschitzienne sur Ω.

3. Soit $f : \Omega \to F$ de classe C^1, et K un compact convexe de Ω (par exemple une boule fermée). Montrer que f est lipschitzienne sur K. Plus difficile : montrer que c'est encore vrai lorsque K est un compact connexe.

IV Inversion locale, fonctions implicites

Le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites permettent tous les deux, à partir d'informations sur la différentielle d'une application en un certain point, d'obtenir des renseignements sur le comportement de l'application au voisinage de ce point.

Soit $f : E \to F$ une application, et $b = f(a)$ un point de F dans l'image de f. Est-ce que les points de F proches de b ont aussi un antécédent par f ? Le théorème d'inversion locale répond par l'affirmative, dès que la différentielle $Df(a)$ est bijective. De plus, dans ce cas, tout point assez proche de b a un *unique* antécédent proche de a.

Le théorème des fonctions implicites concerne une équation du type $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$, où f est une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. Soit P un point de $\mathbb{R}^m$ qui est une solution de cette équation. Y a-t-il d'autres solutions proches de P ? Le théorème donne une réponse très précise, du moment que la dérivée partielle de f par rapport à la dernière variable ne soit pas nulle au point P. Dans ce cas, si l'on modifie suffisamment peu les $m-1$ premières coordonnées du point P, il existe une unique façon de modifier un petit peu la dernière coordonnée de façon à trouver une nouvelle solution de l'équation. Autrement dit, au voisinage du point P, l'équation détermine la dernière coordonnée comme une fonction des $m-1$ autres. Au chapitre V nous interpréterons cette propriété en disant que l'ensemble des solutions de l'équation proches du point P est une "hypersurface", qui ressemble à un hyperplan de $\mathbb{R}^m$. De plus, le théorème s'étend aux systèmes d'un nombre quelconque d'équations.

IV.1 Théorie

Dans cette section, les espaces vectoriels normés E, F sont supposés être des espaces de Banach. La complétude nous permettra de faire appel au théorème du point fixe de Banach-Picard.

(a) Difféomorphismes

Une application $\Phi : U \to V$ entre un ouvert U de E et un ouvert V de F est un C^1*-difféomorphisme* si elle est de classe C^1, elle est bijective, et sa bijection réciproque est aussi de classe C^1. La composée de deux C^1-difféomorphismes est un C^1-difféomorphisme, la réciproque d'un C^1-difféomorphisme est un C^1-difféomorphisme (c'est immédiat). En particulier, l'ensemble $\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$ des C^1-difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est un groupe pour la loi de composition.

Exemple 1 Toute application linéaire inversible de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme. Plus généralement, une application linéaire continue de E dans F est un difféomorphisme si et seulement si elle est inversible parmi les applications linéaires continues. Dans ce cas, on voit que E et F doivent avoir la même dimension (éventuellement infinie).

Exemple 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (y, x^2)$. Elle n'est pas injective puisque par exemple $f(-1, 0) = f(1, 0)$; elle n'est pas non plus surjective puisque les points (a,b) avec $b<0$ n'ont pas d'antécédant. Notons $U^-=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0\}$, $U^+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$, et $V=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid b>0\}$. On a, pour tout (x,y) dans U^- et tout (a,b) dans V,

$$f(x,y)=(a,b)\Leftrightarrow (x,y)=g(a,b)$$

en posant $g(a,b)=(-\sqrt{b},a)$. Ceci montre que la restriction $f_{U^-}:U^-\to V$ est bijective, et que son application réciproque est g. Puisque f et g sont de classe C^1, f_{U^-} est un C^1-difféomorphisme entre U^- et V. De même, $f_{U^+}:U^+\to V$ est un C^1-difféomorphisme.

Exemple 3 L'exponentielle complexe, $z\mapsto e^z$, est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. En coordonnées, elle s'écrit

$$\exp(x,y)=(e^x\cos(y),e^x\sin(y)).$$

Ce n'est pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ car elle n'est pas injective : pour tout (x,y), on a

$$\exp(x,y+2\pi)=\exp(x,y),$$

et plus généralement, deux points ont la même image si et seulement si ils diffèrent d'une translation verticale de longueur multiple de 2π. On voit donc que la restriction de l'exponentielle à la bande $U=\mathbb{R}\times]0,2\pi[$ est injective. Cette restriction $f=\exp_{|U}$ est en fait un difféomorphisme entre la bande U et l'ouvert V du plan complémentaire du demi-axe des x positifs. Pourquoi la bijection réciproque f^{-1} est-elle de classe C^1 ? On peut donner des formules pour f^{-1} et vérifier sur les formules. Une autre option consiste à calculer d'abord la différentielle de f. En identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, on trouve que

Voir cette note d'un article de Michèle Audin pour une représentation graphique de $z\mapsto e^z$.

$$Jf(z)=e^x\begin{bmatrix}\cos(y) & -\sin(y)\\ \sin(y) & \cos(y)\end{bmatrix}$$

qui est une matrice inversible (son déterminant vaut e^{2x}). Le fait que f soit un difféomorphisme découle alors du théorème d'inversion local ci-dessous, et de son corollaire 2.

(b) Théorème d'inversion locale

Soit maintenant f un C^1-difféomorphisme quelconque. En différenciant l'égalité $f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}$ en un point a dont l'image est notée b, on obtient

$$D(f^{-1})(b)\circ Df(a)=\mathrm{Id}$$

et on voit que la différentielle de f au point a est inversible. L'un des objets de cette section est de comprendre dans quelle mesure la réciproque est vraie. Le théorème d'inversion locale dit qu'elle est vraie “localement” : si $Df(a)$ est inversible, alors f est un difféomorphisme au voisinage de a.

Théorème. *Supposons que $f:\Omega\to F$ est de classe C^1 sur l'ouvert Ω, et que a est un point de Ω en lequel la différentielle $Df(a)$ est inversible dans $\mathcal{L}(E,F)$. Alors il existe un ouvert U de E contenant a, et un ouvert V de F contenant $f(a)$, tels que la restriction de f à U soit un C^1-difféomorphisme entre U et V.*

Le point le plus frappant du théorème dit que si $Df(a)$ est injective, alors f est également injective sur un petit voisinage U du point a.

Corollaire 1. *(de l'application ouverte) Soit $f : \Omega \to F$ une application de classe C^1. Supposons que pour tout point a de Ω, la différentielle $Df(a)$ est inversible dans $\mathcal{L}(E, F)$. Alors f est* ouverte *: l'image par f de tout ouvert $O \subset \Omega$ est un ouvert de F.*

Corollaire 2. *(d'inversion globale) Sous les hypothèses du corollaire précédent, si de plus f est injective, alors c'est un C^1-difféomorphisme sur son image.*

On commence par déduire du théorème les deux corollaires.

Recette de preuve.— Sous les hypothèses du premier corollaire, montrons d'abord que $f(\Omega)$ est un ouvert de F. **Prendre** un point y de $f(\Omega)$, que cherche-t-on ? **Appliquer** la définition de l'image d'un ensemble pour trouver un point x dans Ω. On peut maintenant appliquer le théorème d'inversion locale, **écrire** les objets qu'il nous fournit. On a ainsi trouvé un ouvert V de F, **vérifier** que $y \in V \subset f(\Omega)$. **Trouver** enfin le ε recherché.

Soit maintenant O un ouvert inclus dans Ω. La restriction $f_{|O}$ vérifie les hypothèses du corollaire. On lui applique ce qu'on vient de montrer, et on en déduit que son image $f(O)$ est un ouvert.

Recette de preuve.— Sous les hypothèses du second corollaire, f est une bijection de Ω vers $f(\Omega)$. Il reste à voir que sa réciproque f^{-1} est de classe C^1. Le théorème d'inversion locale s'applique : f est localement un C^1-difféomorphisme au voisinage de n'importe quel point a de Ω. En particulier f^{-1} est aussi un C^1-difféomorphisme au voisinage de n'importe quel point b de $f(\Omega)$, donc sa différentielle en b existe et dépend continûment de b.

La preuve du théorème d'inversion locale est difficile, mais toutes les idées sont déjà présentes dans l'exercice suivant, qui est plutôt facile. On va utiliser des ingrédients très variés du cours de topologie et de calcul différentiel :

1. l'inégalité des accroissements finis,
2. toute application linéaire continue $\mathrm{Id} + M$ avec $\|M\| < 1$ est inversible,
3. le théorème du point fixe de Banach-Picard,
4. la différentiabilité de l'application réciproque d'un homéomorphisme de classe C^1 dont la différentielle est inversible (cf chapitre I, dernière proposition de la section 1.(c)).

Exercice 24.— Soit E un espace de Banach. On considère une application $g : E \to E$ de la forme $g = \mathrm{Id} + \phi$, avec ϕ de classe C^1 vérifiant

$$\|D\phi(a)\| < \frac{1}{2}$$

pour tout point a de E. On va montrer que g est alors un C^1-difféomorphisme. *Chacune des quatre questions ci-dessous utilise l'un des quatre points rappelés ci-dessus.*

1. Montrer que ϕ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.

2. Dans cette question, on veut montrer que g est une bijection, autrement dit que pour tout y de E il existe un unique x de E tel que $g(x) = y$. Fixons un point y de E. **a.** En utilisant que $g = \mathrm{Id} + \phi$, traduire l'équation $g(x) = y$, d'inconnue x, en une recherche de point fixe pour une certaine application $T : E \to E$. **b.** Montrer que T est contractante. **c.** Conclure.

3. Puisque g est une bijection, elle admet une bijection réciproque g^{-1}. Montrer que g^{-1} est 2-lipschitzienne. L'application g est donc un homéomorphisme.

4. Montrer que, pour tout point a de E, la différentielle $Dg(a)$ est inversible.

5. Montrer que g^{-1} est différentiable en tout point b de E.

Recette de preuve.— Démontrons le théorème d'inversion locale. Soit $T : x \mapsto x + a$ la translation de E qui envoie 0 sur a, T' la translation de F qui envoie $f(a)$ sur 0, on considère l'application

$$g = (Df(a))^{-1} \circ T' \circ f \circ T.$$

Vérifier que g est définie d'un ouvert de E contenant 0 dans un autre ouvert de E, et qu'on a $g(0) = 0$ et $Dg(0) = \mathrm{Id}$. **Exprimer** aussi f en fonction de g. L'application g est évidemment de classe C^1. Nous allons montrer que g est un difféomorphisme au voisinage de 0 ; il en découlera immédiatement que f sera un difféomorphisme au voisinage de a (comme composée de difféomorphismes).

Le développement limité à l'ordre 1 de g en 0 s'écrit alors

$$g(x) = x + o(x)$$

avec $o(x)$ négligeable devant x. On se donne un y dans E, et on définit $T(x) = y - o(x)$. Comme dans l'exercice, un point fixe de T est un antécédant de y par g. On cherche donc à montrer que, si y est assez proche de 0, l'application T a un unique point fixe proche de 0. Dans l'exercice on appliquait le théorème du point fixe à une application de E dans E. Ici T n'est pas définie de E dans E, et il va d'abord falloir trouver une partie fermée de E qui est stable par T.

Comme f est de classe C^1, l'application o l'est aussi, **que vaut** $Do(0)$? **En déduire** l'existence d'un $\delta > 0$ tel que

$$\|Do(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

pour tout $x \in B(0, \delta)$. D'après l'inégalité des accroissements finis, l'application o est 1/2-lipschitzienne sur cette boule ; **vérifier** que T l'est aussi. On suppose désormais que

$$y \in V := B\left(0, \frac{\delta}{2}\right).$$

Notons

$$B = \{x \mid \|x\| \leq \delta\}$$

la boule fermée de rayon δ centrée en 0. **Montrer** que $T(B) \subset B(0, \delta)$. En particulier, $T(B) \subset B$. **Expliquer** pourquoi B est complet. On peut maintenant appliquer le théorème du point fixe contractant à l'application $T_{|B} : B \to B$. La conclusion de tout ceci est : *Pour tout* $y \in V = B(0, \frac{\delta}{2})$ *il existe un unique* $x \in B(0, \delta)$ *tel que* $g(x) = y$.

Notons $h(y)$ ce point x. On a ainsi défini une fonction $h : V \to B(0, \delta)$, et on a $g(h(y)) = y$ pour tout y de V. On a également $h(g(x')) = x'$ pour tout x' de l'ouvert

$$U := B(0, \delta) \cap g^{-1}(V).$$

En effet, un tel x' a son image $y' = g(x')$ dans V, et $h(y')$ est alors (par définition) l'unique point x de $B(0, \delta)$ tel que $g(x) = y'$: comme x' satisfait cette égalité, par unicité on a $x' = h(y') = h(g(x'))$.

Les ensembles U et V sont ouverts. On a $h(V) = U$, $g(U) = V$, et donc $g_{|U} : U \to V$ et $h : V \to U$ sont des bijections réciproques. La première est clairement continue, la seconde l'est aussi : **montrer** en effet que h est 2-lipschitzienne, en utilisant que o est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne et que h est la réciproque de $x \mapsto x + o(x)$. On a montré que g est un homéomorphisme local.

Montrons enfin que, quitte à restreindre U, et V, $g_{|U}$ est un C^1-difféomorphisme. Soit

$$U' = \{x \in U \mid Dg(x) \text{ inversible}\}.$$

L'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E, E)$ étant un ouvert, U' est ouvert ; il contient 0. On pose aussi $V' = g(U')$; puisque $g_{|U} : U \to V$ est un homéomorphisme, V' est aussi un ouvert.

Terence Tao, médaillé Fields 2006, est un mathématicien aux capacités de travail étonnantes. Le 9 septembre 2011, il poste un message sur le forum Mathoverflow demandant s'il existe une version de ce théorème pour les applications qui sont seulement différentiables sur Ω (et pas de classe C^1). Le 12 septembre, à 19h21, il reçoit une réponse lui indiquant un article de Jean Saint-Raymond de 18 pages. Le soir même, à 00h10, il indique qu'il a posté un billet sur son blog expliquant la démonstration.

D'après la différentiabilité de l'application réciproque d'un homéomorphisme de classe C^1, h est différentiable en tout point y de V', et $Dh(y) = (Dg(x))^{-1}$ pour tout $y = g(x)$ dans V'. Comme l'inversion est continue dans $GL(E)$ et que $Dg : U' \to GL(E)$ est continue, Dh est une application continue sur V'. L'application $g : U' \to V'$ est donc un C^1-difféomorphisme.

(c) Exemples d'application du théorème d'inversion locale

Le théorème d'inversion locale permet de montrer l'existence et l'unicité d'une solution d'un système d'équations, même lorsqu'on ne sait pas trouver une formule pour cette solution. Voyons successivement un exemple dans $\mathbb{R}^2$, un exemple dans l'espace des matrices, et un exemple en dimension infinie.

Exercice 25.—(adapté de l'examen deuxième session 2013) Montrer que pour tout a assez proche de 0 et tout b assez proche de 1, le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xe^y + 2y & = & a \\ 1 + \sin(3x + 4y) & = & b \end{array} \right.$$

a une unique solution (x, y) proche de $(0, 0)$. *On pourra introduire la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (xe^y + 2y, 1 + \sin(3x + 4y))$ et remarquer que $f(0, 0) = (0, 1)$.*

Exercice 26.— On définit l'exponentielle d'une matrice M par la série absolument convergente

$$\exp(M) = \mathrm{Id} + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \cdots .$$

1. Montrer que toute matrice M assez proche de la matrice identité peut s'écrire comme l'exponentielle d'une matrice N proche de la matrice nulle. *On montrera que* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est différentiable en* 0 *et que sa différentielle est inversible.* **2.** En posant $N = \log(M)$, donner un développement limité de log à l'ordre 1 au point Id.

Exercice 27.— On se place dans l'espace vectoriel normé $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$. **1.** Montrer que l'application $f \mapsto f^2$ n'est pas un C^1-difféomorphisme sur son image. **2.** Montrer qu'elle n'est pas un C^1-difféomorphisme sur aucun voisinage de la fonction nulle. **3.** Montrer que, par contre, sa restriction à l'ouvert des fonctions strictement positives est un difféomorphisme (on pourra relire le paragraphe sur la différentielle de cette application).

(d) Le Théorème des Fonctions Implicites dans $\mathbb{R}^2$

Soit c une constante. On dit qu'une équation du type

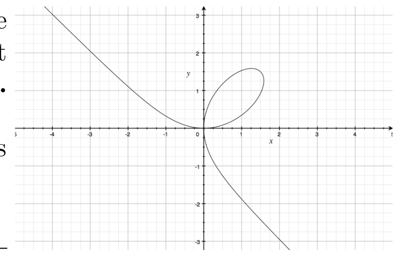
$$f(x, y) = c$$

détermine y en fonction de x sur un domaine $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ si, pour tout $x \in \Omega_1$ donné, il existe un unique $y \in \Omega_2$ tel que $f(x, y) = c$. Dans ce cas, en notant ϕ la fonction de Ω_1 dans Ω_2 qui associe à x cet unique y, on a

$$\forall (x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2, \quad f(x, y) = c \Leftrightarrow y = \phi(x).$$

Exercice 28.— Pour chacune de ces fonctions f, l'équation $f(x,y)=0$ détermine-t-elle y en fonction de x sur le domaine de définition de f ? Sinon, trouver un domaine plus petit où c'est le cas. **1.** $f(x,y)=y-x^2$. **2.** $f(x,y)=y^2-x$. **3.** $f(x,y)=x^2+y^2-1$ **4.** $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ (pour cette dernière équation, on s'aidera de l'ensemble des solutions dessiné ci-contre). **5.** $f(x,y)=y^3-x$.

A quelle condition sur a,b,c l'équation $ax+by+c=0$ détermine-t-elle y en fonction de x ?



Le théorème des fonctions implicites permet de montrer qu'une équation détermine, au moins localement, y en fonction de x.

Théorème (Théorème des fonctions implicites dans $\mathbb{R}^2$: une équation, deux inconnues)**.** *Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1, c un nombre, et (a,b) un point tel que $f(a,b)=c$. Supposons que*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0.$$

alors il existe $\alpha,\beta>0$ tels que l'équation $f(x,y)=c$ détermine y en fonction de x sur $]a-\alpha,a+\alpha[\times]b-\beta,b+\beta[$:

$$\forall x\in]a-\alpha,a+\alpha[\quad \exists! y\in]b-\beta,b+\beta[\quad f(x,y)=c.$$

De plus, la fonction $\phi:\,]a-\alpha,a+\alpha[\to]b-\beta,b+\beta[$ définie par

$$f(x,y)=c\Leftrightarrow y=\phi(x)$$

est de classe C^1.

On dit que l'équation $f(x,y)=c$ *détermine localement y en fonction de x au voisinage du point* (a,b).

Exercice 29.— Soit f définie par $f(x,y)=x^2+y^2-1$. Déterminer les points (x_0,y_0) du cercle d'équation $f(x,y)=0$ en lesquels l'hypothèse du théorème est vérifié. Donner des valeurs de α et β qui conviennent. Soit $(x_0,y_0)=(1,0)$; l'équation détermine-t-elle localement y en fonction de x au voisinage de ce point ? Montrer que l'équation détermine localement x en fonction de y au voisinage de ce point.

Exercice 30.— Soit f définie par $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des solutions de l'équation $f(x,y)=0$ est localement le graphe d'une fonction (y fonction de x ou x fonction de y) au voisinage de tout point autre que $(0,0)$.

Exercice 31.— Sous les hypothèses générales du théorème, calculer $\phi'(x_0)$. *Aide : dériver la relation $f(x,\phi(x))=0$.*

Recette de preuve.— Le théorème précédent est la version dans $\mathbb{R}^2$ du théorème des fonctions implicites énoncé et démontré plus bas, qui découle lui-même du théorème d'inversion locale. Cependant, en dimension deux, on peut en donner une preuve élémentaire, qui repose sur le calcul différentiel en une variable. Nous allons démontrer que l'équation détermine localement y en fonciton de x, mais pas que la fonction implicite ϕ est de classe C^1 : pour cette propriété, se reporter à la preuve du théorème général.

On se place sous les hypothèses de l'énoncé. La seconde dérivée partielle de f en (x_0, y_0) n'est pas nulle ; pour fixer les idées, supposons qu'elle est strictement positive (le cas négatif se traite de façon symétrique). **Montrer** d'abord qu'on peut trouver deux nombres strictement positifs, α, β tels que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$$

pour tout $(x, y) \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$. Fixons provisoirement $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. **Que vaut** la dérivée de l'application $\varphi_x : t \mapsto f(x, y_0 + t)$? Cette dérivée est donc strictement positive sur $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$. En particulier, on a $\varphi_{x_0}(y_0 - \beta) < \varphi_{x_0}(y_0) < \varphi_{x_0}(y_0 + \beta)$, c'est-à-dire

$$f(x_0, y_0 - \beta) < c < f(x_0, y_0 + \beta).$$

Considérons l'ensemble I des nombres $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ tels que

$$f(x, y_0 - \beta) < c < f(x, y_0 + \beta).$$

Montrer que c'est un ouvert contenant x_0. Quitte à diminuer α, on peut donc supposer que ces deux inégalités ont lieu pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Fixons un tel x. En considérant à nouveau l'application φ_x, **déduire** de ces deux inégalités qu'il existe un unique y dans $]y_0 - \beta, y_0 + \beta[$ tel que $f(x, y) = c$. Ceci termine la preuve.

Exercice 32.— On peut généraliser l'argument précédent. Considérons $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^1, c un nombre, $a = (a_1, ..., a_m)$ un point tel que $f(a) = c$. Supposons que

$$\frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \neq 0.$$

Montrer que l'équation $f(x) = c$ détermine localement x_n comme fonction des autres coordonnées $(x_1, \ldots, x_{m-1})$. On suivra le plus fidèlement possible l'argument donné dans la preuve précédente.

(e) Le théorème des fonctions implites, version générale

Plus généralement, on considère $f : \Omega \to F$, où Ω est un ouvert de E. On se donne deux espaces vectoriels supplémentaires $E = X \oplus Y$: tout point ω de E s'écrit de façon unique $\omega = x + y$ avec $x \in X$ et $y \in Y$. L'espace E s'identifie alors au produit $X \times Y$, ce qui permet de voir le graphe de n'importe quelle fonction $\phi : X \to Y$ comme le sous-ensemble de E des couples de coordonnées $(x, \phi(x))$.

Théorème (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soit $f : \Omega \to F$ de classe C^1, c un élément de F, et (a, b) un point de $X \times Y = E$ tel que $f(a, b) = c$. Supposons que l'application linéaire continue*

$$Df(a, b)_{|Y} : Y \to F$$

est inversible. Alors l'équation $f(x, y) = c$ détermine localement y en fonction de x au voisinage du point (a, b) : autrement dit, il existe un ouvert U de X contenant a, un ouvert V de Y contenant b tels que $U \times V \subset \Omega$, et une fonction $\phi : U \to V$ de classe C^1 telle que, pour tout $(x, y) \in U \times V$,

Ici x et y ne sont pas des nombres mais des vecteurs.

$$f(x, y) = c \quad \Leftrightarrow y = \phi(x).$$

Cette équivalence revient à dire que, pour chaque x fixé dans U, l'équation $f(x, y) = c$, d'inconnue x, a pour unique solution $\phi(x)$.

• Il faut noter qu'on a $\phi(a) = b$ puisque $f(a,b) = c$. La conclusion dit qu'au voisinage du point a, l'ensemble L_c des solutions de l'équation $f(\omega) = c\}$ est le graphe d'une application de X dans Y de classe C^1 ; plus précisément,

$$L_c \cap (U \times V) = \{(x, \phi(x)) \mid x \in U\}.$$

• Dans la situation la plus simple qui correspond à l'énoncé précédent, $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, X est l'axe des abscisses et Y l'axe des ordonnées, et $F = \mathbb{R}$. L'application $Df(a)$ s'écrit en coordonnées

$$(h,k) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k$$

sa restriction à Y est simplement $k \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a)k$ et la condition d'inversibilité équivaut à

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) \neq 0.$$

On retrouve ainsi l'énoncé dans $\mathbb{R}^2$ vue à la section précédente.
• Comment se traduit, en pratique, l'hypothèse "$Df(a,b)_{|Y}$ inversible" ? Supposons que X soit de dimension m et Y de dimension n, choisissons des coordonnées $(x_1, \ldots, x_m)$ sur X et $(y_1, \ldots, y_n)$ sur Y. Puisqu'il existe une application linéaire inversible de Y vers F, ces deux espaces vectoriels ont la même dimension ; choisissons des coordonnées sur F et écrivons $(f_1, \ldots, f_n)$ les coordonnées de f. Avec ces notations, la matrice de la différentielle $Df(a,b)$ s'écrit

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(a,b) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a,b) & \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(a,b) \end{array}\right).$$

La matrice a l'air plus impressionnante que d'habitude, mais c'est juste parce que la fonction f a deux sortes de variables, les x_i et les y_j. Le trait vertical sert juste à séparer la matrice en deux blocs, l'un correspondant aux variables x_i et l'autre aux y_j.

Puisque Y correspond aux vecteurs dont les coordonnées x_i sont toutes nulles, la matrice de la restriction $Df(a,b)_{|Y}$ correspond au bloc des coordonnées y_j (situé à droite du trait de séparation, en bleu dans la version électronique). L'hypothèse équivaut donc au fait que la matrice carrée formée par la partie droite de la matrice précédente,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(a) \end{pmatrix}$$

est inversible.

Recette de preuve.— On déduit le théorème des fonctions implicites du théorème d'inversion locale, de la façon suivante. Sous les hypothèses de l'énoncé, on définit $\overline{f} : \Omega \to X \times F$ en posant $\overline{f}(x,y) = (x, f(x,y))$. **Vérifier** que la différentielle de $\overline{f}$ au point a est

$$D\overline{f}(a,b)(h,k) = (h, Df(a,b).h + Df(a,b).k) = (h, Df(a,b)_{|X}.h + Df(a,b)_{|Y}.k).$$

Soient $(x,z) \in X \times F$, **montrer** que le système $D\overline{f}(a)(h,k) = (x,z)$, d'inconnues (h,k), a une unique solution. Ceci montre que $D\overline{f}(a)$ est bijective, c'est donc une application linéaire inversible.

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale à l'application $\overline{f}$ et au point (a,b) : $\overline{f}$ se restreint en un C^1-difféomorphisme entre un ouvert O contenant (a,b) et un ouvert O'

contenant $\overline{f}(a)$. Quitte à diminuer O, on peut supposer qu'il est de la forme $U_0 \times V$, avec U_0 un ouvert contenant a et V un ouvert contenant b. Notons $\overline{g} : O' \to U \times V$ la réciproque de ce difféomorphisme. On définit

$$U = \{x \in U_0, (x, c) \in O'\}.$$

On a, pour tout $(x, y) \in U_0 \times V$,

$$f(x, y) = c \Leftrightarrow \overline{f}(x, y) = (x, c) \Leftrightarrow (x, y) = \overline{g}(x, c) \Leftrightarrow x = \overline{g}_2(x, c).$$

en posant $\overline{g}_2 = \pi_2 \circ \overline{g}$ avec $\pi_2(x, y) = y$. La fonction $\phi = \overline{g}_2$ convient.

(f) Exemples d'utilisation du théorème des fonctions implites

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On s'intéresse à l'équation $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Soit P un point de $\mathbb{R}^n$ qui est solution de l'équation ; le théorème donne une condition pour que l'équation détermine localement x_n en fonction de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ au voisinage de P ; comment s'écrit-elle en coordonnées ? Pour simplifier supposons que $n = 3$. Soit X le plan ("horizontal") contenant tous les vecteurs du type $x = (x_1, x_2, 0)$, et Y l'axe ("vertical") contenant les vecteurs du type $(0, 0, x_3)$. La matrice de la différentielle de f au point P est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) & \frac{\partial f}{\partial x_3}(P) \end{pmatrix}.$$

Sa restriction à la droite Y est simplement $k \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_3}(P)k$, et l'hypothèse du théorème est simplement

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(P) \neq 0.$$

Plus généralement, dans $\mathbb{R}^n$, la condition du théorème dit que la dérivée partielle par rapport à x_n est non nulle.

Exercice 33.— On considère la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathbb{S}^2$, d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. **1.** En quels points de la sphère l'équation détermine-t-elle localement z fonction de x, y ? On pourra répondre d'abord par un calcul direct, puis comparer avec l'hypothèse du théorème des fonctions implicites. **2.** Montrer qu'en tout point de la sphère, l'équation détermine z fonction de (x, y), ou y fonction de (x, z), ou z fonction de (x, y).

Exercice 34.— On considère l'équation

$$z^2 e^{zx} + 2zy^2 - 1 = 0.$$

1. Trouver toutes les solutions du type $(0, 0, z)$.

2. Montrer que pour toutes valeurs assez petites de x et de y, il existe une unique solution (x, y, z) avec z proche de 1. Autrement dit, l'équation définit localement z comme une fonction $z = \phi(x, y)$ au voisinage de la soluion $(0, 0, 1)$.

3. En dérivant la relation $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, calculer la différentielle (c'est-à-dire les dérivées partielles) de φ au point $(0, 0)$.

4. En déduire une valeur approchée d'une solution avec $x = 0,03$ et $y = -0,04$ (si elle existe...).

On considère maintenant une partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ donnée par un système de deux équations, disons $f_1(x,y,z) = 0$ et $f_2(x,y,z) = 0$. Ce système détermine-t-il localement y et z comme fonction de x ? Le système des deux équations peut s'écrire de façon condensée

$$\begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore $f(x,y,z) = c$ en posant $f = (f_1, f_2)$ et $c = (0,0)$. Cette fois-ci, on cherche à appliquer le théorème avec pour X l'axe des abscisses et pour Y le plan vertical contenant les vecteurs du type $(0,y,z)$. En un point P de $\mathcal{C}$, la matrice de $Df_{|Y}(a,b)$ est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(P) \end{pmatrix}.$$

Le théorème nous dit que si cette matrice est inversible, alors le système détermine localement y et z comme des fonctions de x.

Dans les cas simples, quand on parvient à “résoudre” le système, on utilise la première équation pour exprimer z en fonction de x et de y, puis, avec cette expression, on utilise la deuxième équation pour exprimer y en fonction de x ; on en déduit enfin l'expression de z en fonction de x. Ceci explique pourquoi on s'attend à ce qu'un système de deux équations à trois inconnues permettent d'exprimer deux d'entre elles comme fonction de la troisième.

Exercice 35.— (Deux équations) On considère l'intersection de la sphère $\mathbb{S}^2$ avec le cylindre d'axe vertical passant par le point $(1,0,0)$ et de rayon 1, qui a pour d'équation

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Montrer que le système de deux équations détermine localement y et z en fonction de x, sauf en quatre points à déterminer. Esquisser le dessin de cette intersection et interpréter graphiquement le résultat du calcul.

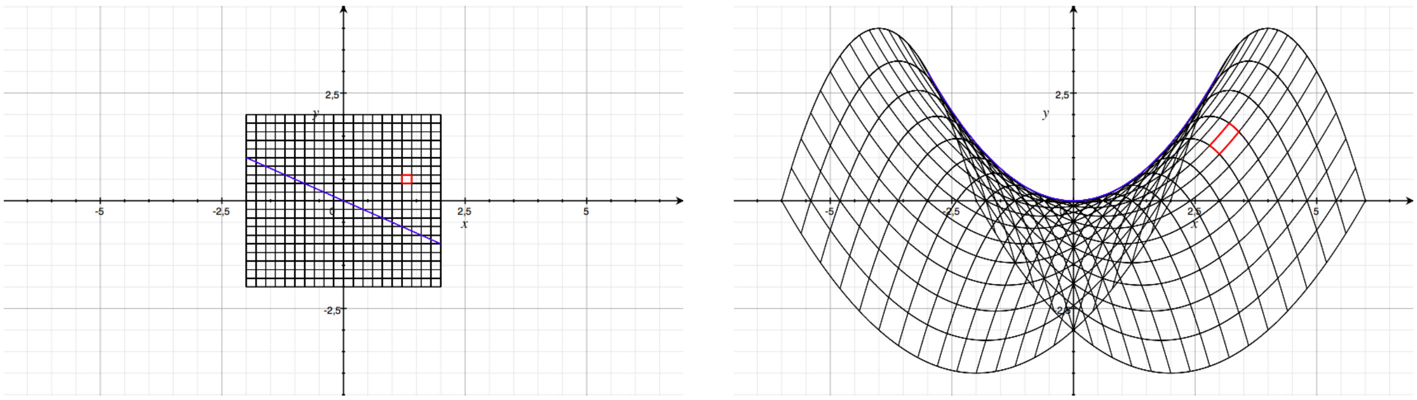
Exercice 36.— **1.** Montrer que l'équation matricielle $M^3+N^3-3MN = \mathrm{Id}$ définit localement N en fonction de M au voisinage du couple solution $(\mathrm{Id}, 0)$. Autrement dit, pour toute matrice M dont les coefficients assez proches de ceux de l'identité, il existe une unique matrice $N = \Phi(M)$ dont les coefficients sont proches de 0, telle que $M^3 + N^3 - 3MN = \mathrm{Id}$. **2.** Calculer la différentielle de Φ au point Id, et écrire le développement limité à l'ordre 1 en ce point.

IV.2 Commentaires

(a) Dessins

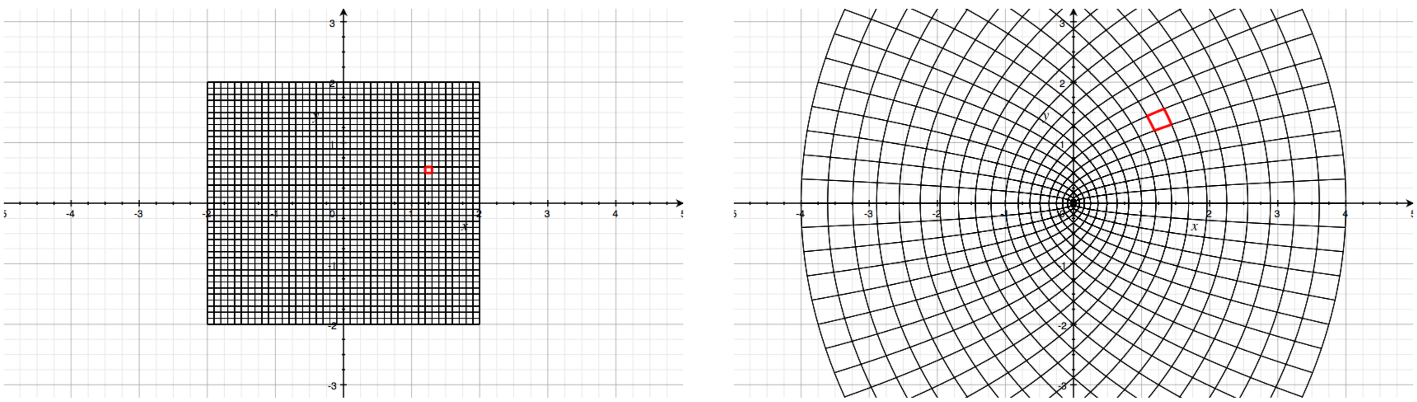
Exercice 37.—(Illustration du théorème d'inversion locale)

1. On considère l'application $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F_1(x,y) = (2x+y, x^2-y^2)$. Le dessin suivant représente une grille et son image par l'application F. La droite en bleu, à gauche, est envoyé sur la parabole en bleu, à droite. **a.** Déterminer les “bons” points a, ceux en lesquels l'hypothèse du théorème d'inverison locale est vérifiée. **b.** Soit a un “mauvais” point. L'application F_1 est-elle localement injective en a ? Localement surjective en $F_1(a)$? On pourra s'aider du dessin.



2. Mêmes question pour l'application $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F_2(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, représentée ci-dessous.

3. Mêmes questions pour l'application $x \mapsto x^3$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.



Pour en savoir plus, on peut lire le joli article Le pli et la fronce sur le site Images des mathématiques.

Exercice 38.— **1.** On considère l'application $M \mapsto \exp(M)$ de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ dans $GL_N(\mathbb{R})$. Montrer qu'elle est différentiable en l'identité, et calculer sa différentielle. On admet que cette application est de classe C^∞ ; en déduire que toute matrice N assez proche de l'identité est l'exponentielle d'une matrice M, et que M est unique si on la suppose assez proche de l'identité.

2. Montrer de même que toute matrice N assez proche de l'identité est le carré d'une unique matrice $M(N)$ proche de l'identité. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $M(Id + H)$ lorsque H tend vers 0.

V Surfaces, sous-variétés

Comment définir mathématiquement une surface ? On peut donner différentes réponses à cette question. On peut par exemple définir une surface topologique comme un espace topologique dans lequel tout point a un voisinage homéomorphe au plan $\mathbb{R}^2$. Dans ce chapitre, nous allons donner une réponse à cette question avec le point de vue du calcul différentiel, en définissant une surface comme une partie de $\mathbb{R}^m$ qui est “localement difféomorphe à un plan”. Plus généralement, une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ est un sous-ensemble qui est localement difféomorphe à un sous-espace vectoriel.

V.1 Théorie

(a) Sous-variétés

Soit S une partie de $\mathbb{R}^n$, a un point de S, et d un entier positif. On dit que S est *lisse, de dimension* d, au point a s'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, et un C^1-difféomorphisme $\Phi : U \to V := \Phi(U)$ tels que

$$\Phi(S \cap U) = E \cap V$$

où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d. On dit que S est une *sous-variété* (de classe C^1) et de dimension d si elle est lisse de dimension d en chacun de ses points. Les sous-variétés de dimension 2 sont appelées *surfaces*, celles de dimension $d = n - 1$ sont appelées *hypersurfaces*.

On dira aussi que le difféomorphisme Φ *redresse* S *au voisinage du point* a.

Si Ψ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, et si S est lisse au point a, alors $\Psi(S)$ est lisse au point $\Psi(a)$. La preuve est immédiate (le **vérifier**). En particulier, l'image d'une sous-variété par un C^1-difféomorphisme est une sous-variété.

Premiers exemples

• **Tout sous-espace vectoriel** E de $\mathbb{R}^n$ est évidemment une sous-variété : en effet, dans la définition d'un point lisse, il suffit de prendre $\Phi = \mathrm{Id}$ et $U = V = \mathbb{R}^n$! Plus généralement le sous-espace affine

$$a + E := \{a + \vec{v} \mid \vec{v} \in E\}$$

est une sous-variété : cette fois-ci, on prend pour difféomorphisme Ψ la translation $x \mapsto x - a$ qui ramène $a + E$ sur E.

• Les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension n sont les **parties ouvertes** de $\mathbb{R}^n$ (**vérifier**).

• **Les graphes sont des sous-variétés**. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^m$. Alors le graphe de f,

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$, de dimension m. En effet, Γ_f est inclus dans l'ouvert $U = \Omega \times \mathbb{R}^n$, et l'application

$$\Phi : (x, y) \mapsto (x, y - f(x))$$

est un C^1-difféomorphisme de U dans U qui envoie Γ_f sur $E \cap U$, où E est le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^m \times \{0\}$, qui est de dimension m. Pour démontrer la phrase précédente, **trouver** le difféomorphisme réciproque Φ^{-1}.

• **Le cercle unité** de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1. Montrons en effet que le cercle est lisse en chacun de ses points. La partie du cercle dans le demi-plan supérieur $P_+ = \{(x, y) \mid y > 0\}$ est le graphe de la fonction

$$\begin{array}{rcl}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

qui est de classe C^1 sur cet ouvert. D'après le point précédent, $\mathbb{S}^1$ est lisse en chacun des points du demi-plan supérieur. Un argument analogue donne la "lissité" en chacun des points du demi-plan inférieur. Il reste les deux points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. On peut les traiter de façon analogue en inversant les rôles des deux coordonnées, c'est-à-dire en décrivant le cercle au voisinage de $(-1, 0)$, par exemple, comme le graphe $\{(-\sqrt{1-y^2}, y) \mid y \in]-1, 1[\}$. Une autre solution consiste à utiliser la rotation d'un quart-de-tour, $R : (x, y) \mapsto (y, -x)$. C'est un difféomorphisme qui envoie le point $(0, 1)$ sur le point $(1, 0)$, et qui laisse le cercle $\mathbb{S}^1$ invariant ; puisque $\mathbb{S}^1$ est lisse au point $(1, 0)$, $R(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$ est lisse au point $R(1, 0) = (0, 1)$.

• **Premier contre-exemple.** Le graphe de la fonction $x \mapsto |x|$ *n'est pas* une sous-variété du plan. En effet, il n'est pas lisse au point $(0, 0)$. Ceci n'est pas tout à fait évident ; la notion de sous-espace tangent, que nous introduisons maintenant, va nous permettre de montrer qu'il n'existe aucun difféomorphisme qui redresse ce graphe au voisinage du point $(0, 0)$.

(b) Sous-espace tangent

Pour une partie quelconque. Soit S une partie de $\mathbb{R}^n$, et $a \in S$. Un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est ***tangent à S au point a*** s'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, telle que l'image de γ est inclue dans S, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \vec{v}$. On note $T_a S$ l'ensemble des vecteurs tangents à S au point a.

Les vecteurs tangents à S sont donc les vecteurs vitesses des courbes tracées sur S. Faire un dessin !

Proposition. *Soit Ψ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, ou plus généralement un difféomorphisme entre un ouvert O de $\mathbb{R}^n$ contenant S, et son image $\Psi(O)$. Alors on a*

$$T_{\Psi(a)}\Psi(S) = D\Psi(a)(T_a S).$$

Pour comprendre la proposition, prenons d'abord un vecteur $\vec{v}$ tangent à S au point a, et une courbe γ tracée sur S comme dans la définition des vecteurs tangents, telle que $\gamma'(0) = \vec{v}$. La courbe $\Psi \circ \gamma$ est tracée sur $\Psi(S)$, elle passe par le point $\Psi(a)$ au temps $t = 0$, et par composition on a

$$(\Psi \circ \gamma)'(0) = D\Psi(\gamma(0)).\gamma'(0) = D\psi(a).\vec{v},$$

ce qui montre que l'image du vecteur $\vec{v}$ par la différentielle est tangent à $\Psi(S)$ au point $\Psi(a)$. Ceci montre que $D\Psi(a)(T_aS) \subset T_{\Psi(a)}\Psi(S)$, qui est l'une des deux inclusions énoncées dans la proposition. On obtient l'inclusion réciproque de façon tout à fait analogue, ou même en appliquant cette première inclusion au difféomorphisme $\Psi' = \Psi^{-1}$, à la partie $S' = \Psi(S)$ et au point $a' = \Psi(a)$.

Pour un sous-espace vectoriel Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et a un point quelconque de E. Si $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to E$ est une courbe tracée sur E qui est dérivable en $t = 0$, le vecteur vitesse $\gamma'(0)$ appartient évidemment à E (pour démontrer cette "évidence", **revenez** à la définition du vecteur dérivé (section (b) des commentaires du chapitre I), et **utilisez** qu'en dimension finie tout sous-espace vectoriel est fermé). Autrement dit tout vecteur tangent à E est inclus dans E. D'autre part tout vecteur $\vec{v}$ de E est le vecteur vitesse de la courbe $\gamma_{\vec{v}} : t \mapsto a + t\vec{v}$ qui est tracée sur E, ce qui montre l'inclusion réciproque : finalement, on a $T_aE = E$.

Profitons-en pour faire la remarque suivante. Soit U un ouvert contenant a. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit on a $\gamma_{\vec{v}}(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset E \cap U$, et le vecteur $\vec{v}$ est donc aussi tangent à $E \cap U$. On en déduit que $T_a(E \cap U) = T_aE = E$.

Pour une sous-variété Supposons maintenant que S est une sous-variété de dimension d, soit a un point de S. Soit Φ un difféomorphisme redressant S au voisinage du point a, donné par la définition d'une sous-variété. On a $\Phi(S \cap U) = E \cap V$. Nous avons vu au paragraphe précédent que E et $E \cap V$ ont le même espace tangent au point $\Phi(a)$; le même raisonnement montre que S et $S \cap U$ ont le même espace tangent au point a (**vérifier !**). La proposition précédente nous dit alors que T_aS est l'image de T_aE par l'inverse de la différentielle $D\Phi(a)$. Or T_aE est un sous-espace vectoriel et la différentielle est linéaire. Nous obtenons ainsi le résultat fondamental suivant.

Théorème. *Si S une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, alors en tout point a de S l'espace tangent T_aS est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d.*

L'ensemble des vecteurs tangents à la sous-variété S au point a est appelé *espace vectoriel tangent à S au point a*. L'espace affine $a + T_aS$, qui lui est parallèle et passe par le point a, est appelé *espace affine tangent*.

Une animation montrant les plans affines tangents à un ballon de rugby.

Nous avons maintenant les outils pour montrer que le graphe de la valeur absolue n'est pas une sous-variété.

Exercice 39.—

1. Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^2$ une courbe dérivable telle que $\gamma(0) = 0$. Supposons que l'image de γ soit incluse dans le graphe Γ de la fonction valeur absolue. Que pensez-vous du vecteur $\gamma'(0)$? Pouvez-vous faire une conjecture ?

2. Nous voulons déterminer l'espace tangent à Γ au point $(0, 0)$. Notons $(v_1, v_2) = \gamma'(0)$. On a donc, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} tv_1 + o_1(t) \\ tv_2 + o_2(t) \end{pmatrix}$$

et $|tv_1 + o_1(t)| = tv_2 + o_2(t)$. A l'aide du signe, montrer d'abord que $v_2 = 0$. On en déduit que $|tv_1 + o_1(t)|$ est négligeable devant t ; en calculant la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{|tv_1 + o_1(t)|}{|t|},$$

en déduire que $v_1 = 0$. Conclure.

3. En déduire que Γ n'est pas lisse au point $(0, 0)$.

4. Par contre, montrer qu'il existe un homéomorphisme du plan qui redresse Γ au voisinage de $(0, 0)$. Trouver même un homéomorphisme du plan qui envoie Γ sur l'axe des abscisses. (On dit que Γ est une *sous-variété topologique*).

Sous-espace tangent à un graphe Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^m$. Nous avons vu que le graphe Γ_f est une sous-variété de dimension m de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{m+n}$. Déterminons le sous-espace tangent à Γ_f en un point $(a, f(a))$. Pour tout vecteur $\vec{h}$ de $\mathbb{R}^m$, la courbe

$$\gamma : t \mapsto (a + t\vec{h}, f(a + t\vec{h}))$$

est incluse dans Γ_f et passe par le point $(a, f(a))$ au temps $t = 0$; on a $\gamma'(0) = (\vec{h}, Df(a).\vec{h})$. Soit

$$P = \{(\vec{h}, Df(a).\vec{h}) \mid \vec{h} \in \mathbb{R}^m\}.$$

Ce qui précède montre que tout vecteur de P est tangent à Γ_f au point $(a, f(a))$. Montrons la réciproque. L'ensemble P est l'image de l'application linéaire $\vec{h} \mapsto (\vec{h}, Df(a).\vec{h})$. **Vérifier** que cette application est injective. Son image est donc un sous-espace vectoriel de de dimension m. Puisque P et $T_{(a,f(a))}\Gamma_f$ sont deux sous-espaces vectoriels de même dimension et que le premier est inclus dans le second, il sont égaux.

Remarquons que P n'est rien d'autre que le graphe de l'application linéaire $Df(a)$. On a donc montré :

Proposition. *Le graphe d'une application $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est une sous-variété de dimension m, dont le sous-espace vectoriel tangent en un point $(a, f(a))$ est le graphe de $Df(a)$. Le sous-espace affine tangent en ce point est le graphe de l'application affine $x \mapsto f(a) + Df(a).(x - a)$ qui constitue la partie principale du développement limité de f au point a à l'ordre* 1.

(c) Sous-variété donnée par une équation ou un système d'équations

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 définie sur un ouvert Ω, c une constante. Soit $S = \{a \in \Omega \mid f(a) = c\}$ l'ensemble des solutions de l'équation $f(a) = c$.

Théorème. *Soit a un point de S en lequel la différentielle $Df(a)$ n'est pas l'application nulle. Alors l'ensemble S est lisse au point a, de dimension $n - 1$. En particulier, si $Df(a) \neq 0$ pour tout point a de S, alors S est une hypersurface. De plus, l'espace vectoriel tangent est*

$$T_aS = \mathrm{Ker}(Df(a)) = \left\{(h_1, \ldots, h_n) \mid \frac{\partial f}{x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{x_n}(a)h_n = 0\right\}.$$

L'espace vectoriel tangent est donc l'ensemble des vecteurs $\vec{h}$ qui sont orthogonaux au gradient de f au point a.

Recette de preuve.— En coordonnées, la différentielle s'écrit

$$Df(a) : (h_1, \ldots, h_n) \mapsto \frac{\partial f}{x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{x_n}(a)h_n.$$

Si elle n'est pas nulle, c'est que l'une au moins des n dérivées partielles n'est pas nulle. Pour fixer les idées, supposons que

$$\frac{\partial f}{x_n}(a) \neq 0.$$

On est alors dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites (voir la section (f) du chapitre). Le théorème nous dit que la dernière coordonnée, x_n, est localement déterminée par les autres. Autrement dit, S est localement le graphe d'une fonction $\phi : U \to V$ de classe C^1, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et V un ouvert de $\mathbb{R}$. D'autre part, nous savons que le graphe d'une telle application est une sous-variété de dimension $n-1$ (c'était le deuxième exemple du chapitre). Ceci montre que S est lisse au point a.

Déterminons T_aS. Nous savons déjà que c'est un hyperplan vectoriel (**pourquoi ?**). Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ une courbe tracée sur S et telle que $\gamma(0) = a$. **Que vaut** $f(\gamma(t))$? En dérivant l'égalité obtenue, **en déduire** que l'espace tangent est inclus dans le noyau de $Df(a)$. Puisque $Df(a)$ n'est pas nul, son noyau est un hyperplan. **Conclure** en utilisant que deux hyperplans emboîtés sont en fait égaux.

Si vos souvenirs d'algèbre linéaire sont trop flous, voir l'exercice ci-dessous.

Exercice 40.—(rappels d'algèbre linéaire)

1. Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application linéaire non nulle. Que vaut l'image de L ? En déduire que le noyau de L est de dimension $n-1$. Alternativement, montrer ce dernier résultat directement, en écrivant L en coordonnées,

$$L(h_1, \ldots, h_n) = a_1h_1 + \cdots + a_nh_n,$$

et en utilisant que l'un des a_i n'est pas nul pour décrire une base de l'espace des solutions de l'équation $L.h = 0$.

2. Montrer que si un sous-espace vectoriel E de dimension d est strictement inclus dans un autre sous-espace vectoriel F, alors la dimension de F est $> d$. On rappelle que dans un espace vectoriel la dimension est le nombre d'éléments de n'importe quelle base de l'espace, et que toute famille libre peut être complétée en une base.

Exemples

• La sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ à distance 1 de l'origine, elle est donc définit par l'équation $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$ avec $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. La différentielle de la fonction f au point $a = (a_1, \ldots a_n)$ a pour matrice

$$(2a_1, \ldots, 2a_n),$$

qui n'est nulle qu'au point 0. Puisque 0 n'appartient pas à $\mathbb{S}^{n-1}$, le théorème nous dit que la sphère est une hypersurface de $\mathbb{R}^n$. L'espace vectoriel tangent au point a a pour équation

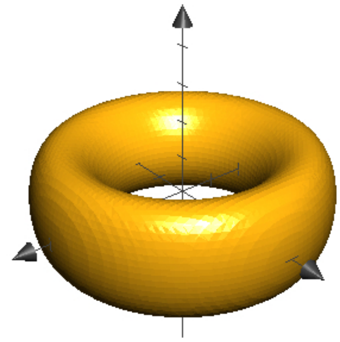
$$\sum a_ih_i = 0,$$

autrement dit il s'agit de l'hyperplan orthogonal au vecteur a.

• Soit T la partie de $\mathbb{R}^3$ d'équation $f(x,y,z)=0$ avec

$$f(x,y,z) = 4z^2 + \left(x^2+y^2-4\right)\left(x^2+y^2-1\right)$$

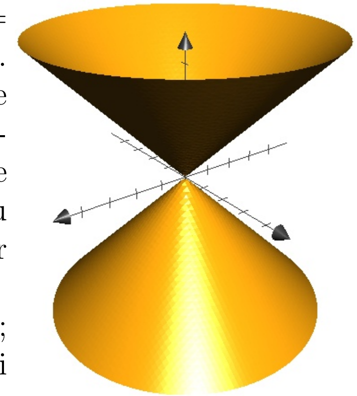
Calculer les dérivées partielles de f et **montrer** que Df ne s'annule qu'à l'origine et sur deux cercle du plan $z=0$ qui ne rencontrent pas T. Le théorème s'applique : T est une hypersurface. On peut montrer qu'elle n'est pas homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$. On dit que T est un tore, ou une surface de genre 1.



Un tore

Exercice 41.— Montrer que $\mathbb{S}^{n-1}$ et T sont compacts.

• Soit C le cône d'équation $x^2+y^2=z^2$. **Calculer** la différentielle de $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$. Elle s'annule au point 0, on ne peut donc pas appliquer le théorème. Cependant, on ne peut pas en conclure que C n'est pas une hypersurface, puisque le théorème ne donne pas une condition nécessaire et suffisante. Examinons l'espace tangent au point 0. Soit $\vec{v}=(2,2,4)$. Le point $(2,2,4)$ est inclus dans C, et le cône a la propriété d'être *homogène* : pour tout λ, $\lambda(2,2,4)$ appartient encore au cône (**vérifier**). La droite $t\mapsto t\vec{v}$ est donc tracée sur C, comme $\vec{v}$ est son vecteur vitesse au point 0, ce vecteur est donc tangent à C au point 0.



Le cône n'est pas lisse en $(0,0)$

Soit R la rotation d'axe (Oz) et d'un tiers de tour. On a $R(C)=C$ et $R(0)=0$; d'après la proposition sur les espaces tangents, on en déduit que $R(\vec{v})$ est aussi tangent au cône (**vérifier**). Le même raisonnement s'applique au vecteur $R^2(\vec{v})$. On a ainsi obtenu trois vecteurs $\vec{v}, R(\vec{v}), R^2(\vec{v})$ dans T_0C, **vérifier** qu'ils forment une famille libre. On en déduit que C n'est pas lisse au point 0, en raisonnant par l'absurde : si c'était le cas, son espace tangent en 0 serait un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant trois vecteurs libres. Il serait donc de dimension trois, et donc égal à $\mathbb{R}^3$. En revenant à la défintion de sous-variété, on s'aperçoit qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 est un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On conclut en vérifiant que C ne contient pas de boule centrée en 0.

Par contre, le théorème s'applique à $C\setminus\{0\}$, qui est donc une hypersurface.

• Le groupe $SL(n,\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1 est une hypersurface de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, il s'agit des solutions de l'équation $\det(A)=1$. L'application $\det : \mathcal{M}_n\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 (elle s'exprime en fonction des coordonnées comme un polynôme, homogène de degré n). On pourrait calculer sa différentielle, mais ce n'est pas nécessaire, on veut juste voir que cette différentielle n'est pas nulle en un point A de $SL(n,\mathbb{R})$. Pour ceci, calculons

$$\det(A+tA) = \det((1+t)A) = (1+t)^n\det(A) = \det(A) + nt\det(A) + o(t)$$

et par conséquent l'application $\gamma : t\mapsto \det(A+tA)$ est dérivable en 0, de dérivée $\gamma'(0) = n\det(A) = n$ si $\det(A)=1$. D'autre part, par composition on a $\gamma'(0) = D(\det)(A).A$. Ce calcul montre donc que la différentielle du déterminant n'est pas nulle en un point A de $SL(n,\mathbb{R})$. Le théorème s'applique, et nous dit que $SL(n,\mathbb{R})$ est une hypersurface de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Cas général d'un système de p équations On va généraliser le théorème précédent à un systèmes d'équations. Soit $f_1, \dots, f_p : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des applications de classe C^1 définies sur un ouvert Ω. Soit $S = \{a \in \Omega \mid f_1(a) = 0, \dots f_p(a) = 0\}$ l'ensemble des solutions du système d'équations correspondant. Rappelons une définition du chapitre II : le point a est dit *régulier* pour S si les gradients $\nabla_a f_1, \dots, \nabla_a f_p$ sont linéairement indépendants. Remarquons que lorsqu'on a une seule équation, la condition se réduit à "$\nabla_a f$ est linéairement indépendant", ce qui signifie juste que $\nabla_a f \neq 0$: on retrouve ainsi l'hypothèse $Df(a) \neq 0$ de l'énoncé précédent.

Théorème. *Soit a un point régulier de S. Alors l'ensemble S est lisse au point a, de dimension $n-p$. En particulier, si tout point de S est régulier, alors S est une sous-variété de dimension $n-p$. De plus, l'espace vectoriel tangent est*

$$T_a S = \mathrm{Ker}(Df_1(a)) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(Df_p(a)).$$

D'après l'exercice suivant, le sous-espace vectoriel $T_a S$ s'interprète comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à chacun des vecteurs gradients $\nabla_a f_i$ (ou, de façon équivalente, à toutes leurs combinaisons linéaires).

Exercice 42.— (indispensable) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $h \in \mathrm{Ker}(Df_1(a)) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(Df_p(a))$,
2. $\forall i = 1, \dots, p$, $\langle \nabla_a f_i, h \rangle = 0$,
3. $h \perp \mathrm{Vect}(\nabla_a f_1, \dots, \nabla_a f_p)$.

Recette de preuve.— Pour simplifier, faisons la preuve dans le cas de deux équations ($p = 2$). Par hypothèse, les deux vecteurs gradient $\nabla_a f_1$ et $\nabla_a f_2$ sont linéairement indépendants. Autrement dit, l'espace engendré par les lignes de la matrice suivante (qui n'est autre que la matrice de $Df(a)$),

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

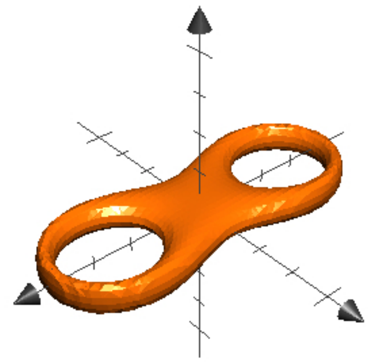
est de dimension 2. On utilise maintenant une propriété fondamentale d'algèbre linéaire : *pour toute matrice, la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes est égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes* (et appelée *rang* de la matrice). Il existe donc deux colonnes de cette matrice qui sont linéairement indépendante. Pour simplifier, supposons que ce sont les deux dernières, celles correspondant aux variables x_{m-1} et x_m. on est alors dans la situation du théorème des fonctions implicites, avec la sous-matrice 2×2 à droite qui est inversible :

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m-2}}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m-1}}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{m-2}}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_{m-1}}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \end{array} \right).$$

La fin de la preuve est la même que dans le cas d'une équation : d'après le théorème des fonctions implicites, S est localement le graphe d'une application de $\mathbb{R}^{m-2}$ dans $\mathbb{R}^2$ de classe C^1, et on a vu qu'un tel graphe est une sous-variété de dimension $m-2$. La détermination de l'espace tangent découle aussi des mêmes arguments que dans le cas $p = 1$.

Dans cette preuve, nous avons fait deux hypothèses simplificatrices. Nous nous sommes d'abord restreints au cas d'un système de 2 équations. Le cas général utilise les mêmes arguments, seules les notations sont un peu plus compliquées (plus de pointillés dans la matrice de $Df(a)$...). Ensuite, nous avons supposé que c'était les deux dernières colonnes de la matrice jacobienne de f qui étaient libres. Dans le cas général, notons i et j les numéros de deux colonnes linéairement indépendantes dans la matrice de $Df(a)$. Le théorème des fonctions implicites s'applique à nouveau, quite à permuter les variables, et nous dit que notre système d'équations détermine localement x_i et x_j comme des fonctions de classe C^1 des autres variables. (De façon un peu plus précise, on applique le théorème à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^m = X \oplus Y$ où X est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs e_i et e_j de la base canonique, qui correspond aux variables x_i, x_j, et Y est le sous-espace vectoriel engendré par tous les autres vecteurs de la base canonique). On conclut comme avant.

Exercice 43.— Montrer que l'équation $\left(\left(x^2+y^2\right)^2 - x^2 + y^2\right)^2 + z^2 = \frac{1}{100}$ définie une surface de $\mathbb{R}^3$. On peut montrer qu'elle n'est difféomorphe ni à la sphère ni au tore ; il s'agit d'une surface de genre 2.



Une surface de genre 2

Exercice 44.— Montrer que l'ensemble

$$O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^t M = \mathrm{Id}\}$$

des matrice dites *orthogonales* est une sous-variété de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, de dimension $n(n-1)/2$.

(d) Extrema liés : la preuve !

Nous venons de voir qu'en un point régulier, un ensemble défini par p équations dans $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension $n-p$. En particulier, son espace tangent est un sous-espace vectoriel de dimension $n-p$. Ce résultat est le point clé de la preuve du théorème des extrema liés, que nous abordons maintenant.

Rappelons la situation. On a une partie S de $\mathbb{R}^m$ définie par les équations

$$S = \{x \in \Omega \mid \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_p(x) = 0\}.$$

Soit a un point de S. On suppose que a est un point régulier de S : d'après le théorème précédent, ceci entraine que S est lisse au point a, de dimension $n-p$. On considère alors une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, et on suppose que le point a est un maximum local ou un minimum local de la restriction de f à S.

Le principe de la preuve est toujours le même : pour toute courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ telle que $\gamma(0) = a$, 0 est un extremum local de la fonction composée $f \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, et par conséquent sa dérivée s'annule, ce qui se traduit par $Df(a).\gamma'(0) = 0 = \langle \nabla_a f, \gamma'(0)\rangle$. Ceci montre que le gradient de f est orthogonal à tout vecteur de T_aS :

$$\nabla_a f \in (T_aS)^\perp .$$

D'autre part on a vu que
- $T_aS = (\mathrm{Vect}(\nabla_a\varphi_1, \dots, \nabla_a\varphi_p))^\perp$ (voir l'exercice 42),
- tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est égal à l'orthogonal de son orthogonal (voir la proposition dans la preuve du cas linéaire, page 19).

On en déduit

$$(T_aS)^\perp = (\mathrm{Vect}(\nabla_a\varphi_1, \dots, \nabla_a\varphi_p))^{\perp\perp} = \mathrm{Vect}(\nabla_a\varphi_1, \dots, \nabla_a\varphi_p),$$

ce qui montre que le gradient de f au point a s'écrit comme une combinaison linéaire des gradients des fonctions φ_i, ce que l'on voulait montrer.

(e) Sous-variété donnée par un paramétrage

Soit $\Gamma : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1.

Théorème. *Soit a un point de Ω en lequel la différentielle de Γ est injective. Alors il existe un ouvert U contenant a tel que $S_U = \Gamma(U)$ est une sous-variété de dimension d, et en posant $p = \Gamma(a)$,*

$$T_pS_U = \mathrm{Im}(D\Gamma(a)).$$

Recette de preuve.— On écrit $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Si $D\Gamma(a)$ est injective, sa matrice contient une sous-matrice carrée de taille $d \times d$ qui est inversible. Pour simplifier, supposons que cette sous-matrice est la sous-matrice-carrée formée des d premières lignes de la matrice de $D\Gamma(a)$, c'est-à-dire la matrice de $D\hat{\Gamma}(a)$, où $\hat{\Gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ (les autre cas compliquent juste les notations) ; remarquons qu'on a $\Gamma = (\hat{\Gamma}, \gamma_{d+1}, \ldots, \gamma_n)$. On peut alors appliquer le théorème d'inversion locale à l'application $\hat{\Gamma} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ au point a : il nous fournit un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ tel que $V := \hat{\Gamma}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et tel que $\hat{\Gamma}_{|U} : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme, dont on note $\hat{\Gamma}^{-1}$ la réciproque. Pour tout $y \in V$ on a

$$\Gamma\hat{\Gamma}^{-1}(y) = (\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}^{-1}(y), \gamma_{d+1}\hat{\Gamma}^{-1}(y), \ldots, \gamma_n\hat{\Gamma}^{-1}(y)) = (y, \gamma_{d+1}\hat{\Gamma}^{-1}(y), \ldots, \gamma_n\hat{\Gamma}^{-1}(y))$$

et donc

$$\{\Gamma\hat{\Gamma}^{-1}(y) \mid y \in V\} = \{(y, \gamma_{d+1}\hat{\Gamma}^{-1}(y), \ldots, \gamma_n\hat{\Gamma}^{-1}(y)) \mid y \in V\}$$

est le graphe de la restriction à V de l'application $\Phi : y \mapsto \gamma_{d+1}\hat{\Gamma}^{-1}(y), \ldots, \gamma_n\hat{\Gamma}^{-1}(y)$, mais d'autre part uisque $\hat{\Gamma}$ est une bijection entre U et V, cet ensemble s'écrit aussi

$$\{\Gamma(x) \mid x \in U\} = \Gamma(U).$$

Conclusion : $\Gamma(U)$ est le graphe d'une application de classe C^1. Nous avons vu que ceci est une sous-variété de classe C^1 de dimension d.

Déterminons T_pS_U. En considérant les courbes $t \mapsto \Gamma(t\vec{h})$ pour un vecteur $\vec{h}$ de $\mathbb{R}^d$ donné, on voit que T_pS_U contient l'image de $D\Gamma(a)$; puisque $D\Gamma(a)$ est injective, son image est de dimension d, ce qui conclut.

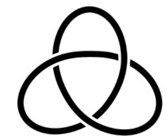
V.2 Commentaires

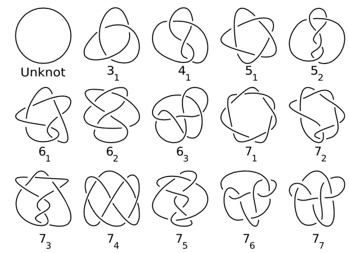
(a) Équations différentielles sur les sous-variétés

Sur une sous-variété, on peut généraliser les notions de calcul différentiel que nous avons définies dans le cadre des espaces vectoriels normés. Par exemple, on peut définir la notion d'application différentiable d'une sous-variété dans une autre, ou ce qu'est une équation différentielle sur une sous-variété. Ces généralisations sont très utiles. Donnons un exemple. Considérons un astéroïde dans l'espace, en mouvement autour de son centre de gravité. Choisissons une position de référence pour ce corps solide, et plaçons l'origine de $\mathbb{R}^3$ à son centre de gravité. Pour chaque position possible du solide, il existe alors une unique rotation vectorielle qui envoie la position de référence sur cette nouvelle position. L'ensemble des rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$ est généralement appelé $SO(3)$,et on voit ainsi que *l'espace de configuration* est naturellement $SO(3)$, qui est une sous-variété de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Le mouvement de ce solide est alors décrit par des équations différentielles (étudiées par Euler et Poinsot notamment), sur $SO(3)$.

(b) Noeuds

Un noeud est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ qui est compacte et connexe. On considère que deux noeuds sont équivalents s'il existe un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui envoie le premier sur le second.[3] Un cercle de $\mathbb{R}^3$ est l'exemple le plus simple de noeuds. Le noeud de trèfle est un exemple de noeud qui n'est pas équivalent au cercle (mais démontrer qu'il n'y a aucun difféomorphisme qui envoie le noeud de trèfle sur le cercle n'est pas si simple ! On peut trouver un argument ici.) La question fondamentale de la théorie des noeuds est de décrire toutes les classes d'équivalence des noeuds. Il n'est pas difficile de faire une liste des dessins de tous les noeuds possibles, mais on ne sait pas encore comment décider avec certitude si deux dessins de la liste sont équivalents ou non !



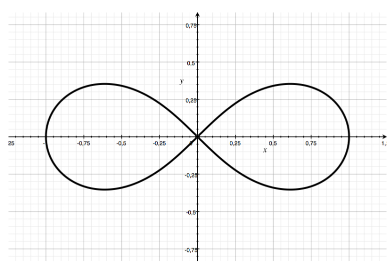


source : Wikipedia

V.3 Exercices

Exercice 45.— (algèbre linéaire) En utilisant le théorème de la base incomplète, montrer que pour tout sous-espaces vectoriels E, F de $\mathbb{R}^n$ ayant la même dimension d, il existe un isomorphisme Φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Phi(E) = F$.

Exercice 46.— La Lemniscate, d'équation $\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(x^2-y^2\right)$, est-elle une sous-variété du plan ? On pourra s'aider du dessin ci-dessous.



Exercice 47.—(**Distorsion d'un noeud**)

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une application ℓ-périodique, de classe C^1. On dit que l'image de γ est une courbe fermée. On suppose que $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout réel t, autrement dit la courbe est parcourue à vitesse constante égale à 1. On définit alors la distorsion de γ comme le nombre

$$\delta(\gamma) = \sup \left\{ \frac{|s-t|}{\|\gamma(s)-\gamma(t)\|} \mid s,t \in \mathbb{R} \text{ tels que } |s-t| \leq \frac{\ell}{2} \right\}.$$

Autrement dit, la distorsion est le plus grand rapport entre la distance entre deux points de la courbe, le long de la courbe, et la distance entre ces même points dans $\mathbb{R}^3$ ("à vol d'oiseau").

Le but de l'exercice est de montrer que la distorsion d'une courbe est toujours au moins égale à $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que la distorsion d'un cercle vaut bien $\frac{\pi}{2}$.

On introduit la fonction $r(s) := \left\|\gamma(s+\frac{\ell}{2}) - \gamma(s)\right\|$, et le vecteur unitaire indiquant la direction entre les points $\gamma(s)$ et $\gamma(s+\frac{\ell}{2})$,

$$u(s) = \frac{1}{r(s)} \left(\gamma(s+\frac{\ell}{2}) - \gamma(s) \right).$$

3. Plus précisément, on demande un difféomorphisme f qui "préserve l'orientation", c'est-à-dire que la matrice jacobienne $Jf(x)$ a un déterminant positif (pour tout x). On peut montrer que ceci revient à dire qu'on peut passer continument du premier noeud au second, ce qui correspond à l'idée intuitive de déformation d'un élastique noué.

Cette formule définit une application ℓ-périodique de $\mathbb{R}$ dans la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, autrement dit une courbe fermée sur la sphère.

2. Donner une minoration de $r(s)$ à l'aide de $\delta(\gamma)$. On numérote (1) cette inégalité.

3. Comparer $u(\frac{\ell}{2})$ et $u(0)$. En déduire que la longueur de la courbe u,

$$L(u) := \int_0^\ell \|u'(t)\| \, dt$$

est supérieure ou égale à 2π. On numérote (2) cette inégalité. (On pourra admettre qu'une courbe joignant deux points antipodaux sur la sphère unité à une longueur au moins égale à π).

4. Dériver la relation $\|u(s)\| = 1$ pour montrer que les vecteur $u(s)$ et $u'(s)$ sont orthogonaux.

5. Calculer $u'(s)$. En utilisant le théorème de Pythagore (et la question précédente), en déduire que

$$\|u'(s)\| \leq \frac{2}{r(s)} \quad (3).$$

6. Conclure, à l'aide de (1), (2) et (3).

Cet exercice accompagne un article à paraître à Images des mathématiques, intitulé "des noeuds très distordus".

VI Différentielles d'ordre supérieur

VI.1 Théorie

Dans ce chapitre, on considère deux espaces vectoriels normés E, F **de dimensions finies**, et une application $f : \Omega \to F$ définie sur un ouvert de E. On suppose que f est différentiable sur Ω. La différentielle Df est alors une application de Ω vers l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$.

(a) Dérivées partielles d'ordre 2, différentielle seconde

On dira que f est *de classe* C^2 sur Ω si l'application Df est de classe C^1 sur Ω. Lorsque $E = \mathbb{R}^m$, on dit que f *admet des dérivées partielles d'ordre* 2 si les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1 \dots m$$

admettent elles mêmes des dérivées partielles selon toutes les variables,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), \quad i = 1 \dots m, j = 1 \dots m.$$

Théorème. *L'application f est de classe C^2 sur Ω si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

- *elle admet des dérivées partielles d'ordre 2,*
- *toutes ses dérivées partielles (il y en a m^2) sont des applications continues sur Ω.*

Dans ce cas, pour tous vecteurs $\vec{h} = (h_1, \dots, h_m), \vec{k} = (k_1, \dots, k_m)$ de E, l'application $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}$ admet une dérivée selon le vecteur $\vec{h}$, et on a

$$\frac{\partial}{\partial \vec{k}}\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}\right) = \sum_{1 \le i,j \le m} h_i k_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

La preuve de la première partie du lemme consiste essentiellement à appliquer le critère sur les applications de classe C^1 à l'application Df. Rappelons que Df est une application de Ω dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$; par conséquent sa différentielle, $D(Df)$, va de Ω dans $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$. La définition des dérivées selon un vecteur entraîne l'égalité

Voir Chapitre III, section (b).

$$\frac{\partial}{\partial \vec{k}}\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a) = D(Df)(a)(\vec{h})(\vec{k}).$$

Par définition, le membre de droite est linéaire en $\vec{h}$ et en $\vec{k}$; la formule du théorème est une conséquence de cette linéarité. Les détails sont laissés au lecteur.

Lorsque f est de classe C^2, pour tout point a l'application

$$D^2 f(a) : (\vec{h}, \vec{k}) \longmapsto \frac{\partial}{\partial \vec{k}}\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a) = \sum_{1 \le i,j \le m} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

est bilinéaire. On l'appelle *différentielle seconde* de f au point a.

Lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, sa différentielle seconde au point a est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, une *forme bilinéaire*. La matrice de cette forme bilinéaire dans la base canonique est la matrice carrée contenant les dérivées partielles d'ordre 2 ; elle est appelée *hessienne* de f au point a :

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_m}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m \partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Exemples

• **Un calcul explicite** Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Les dérivées partielles d'ordre 1 sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3, -4y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4x.$$

Les dérivées partielles secondes sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) = 12y^2.$$

Exprimons la différentielle seconde au point $(1, 1)$. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(1, 1) = 12, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = -4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(1, 1) = 12.$$

Et donc, pour un vecteur $\vec{h} = (h_1, h_2)$,

$$D^2 f(a)(1, 1)(\vec{h}, \vec{h}) = 12h_1^2 + 12h_2^2 - 2 \times 4h_1 h_2.$$

La différentielle seconde au point $(1, 1)$ est une fonction de *deux* vecteurs $\vec{h}$ et $\vec{k}$, mais dans la suite elle n'interviendra que sous la forme de $D^2 f(a)(\vec{h}, \vec{h})$, avec deux fois le *même* vecteur.

• **Applications linéaires et bilinéaires** Si $L : E \to F$ est linéaire, alors sa différentielle $DL : E \to \mathcal{L}(E, F)$ est constante, $DL(a) = L$ pour tout $a \in E$. Par conséquent sa différentielle seconde est nulle.

Si $B : E \times E \to F$ est bilinéaire, sa différentielle DB est l'application

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E \times E, F) \\ (x, y) & \longmapsto & B(x, .) + B(., y) \end{array}$$

où $B(x, .) + B(., y)$ désigne l'application $(\vec{h}, \vec{k}) \mapsto B(x, \vec{k}) + B(\vec{h}, y)$. Pour (x, y) donné, l'application $DB(x, y) = B(x, .) + B(., y)$ est bien sûr linéaire (comme la différentielle en un point donné de n'importe quelle application). Ce qui est spécifique des applications bilinéaires, c'est que l'application $DB : (x, y) \mapsto DB(x, y)$ est elle-même linéaire . Comme la différentielle d'une application linéaire est constante, égale en tout point à elle-même, on en déduit que pour tout (x, y), $D^2 B(x, y) = B$, c'est-à-dire que pour tout $\vec{h}, \vec{k}$,

DB est un élément de $\mathcal{L}(E \times E, \mathcal{L}(E \times E, F))$!

$$D^2 B(x, y)(\vec{h}, \vec{k}) = B(\vec{h}, \vec{k}).$$

• **Dérivée seconde le long d'une droite** Soit f de classe C^2 au voisinage du point a, $\vec{h}$ un vecteur fixé, posons $\gamma(t) = f(a + t\vec{h})$, et cherchons à calculer $\gamma''(0)$.

On a déjà vu la formule de dérivation pour une composition $\gamma = f \circ \alpha$ où α est définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$,

$$(\star) \qquad (f \circ \alpha)'(t) = Df(\alpha(t)).\alpha'(t).$$

(chapitre I, commentaires, section (b)). On a en particulier $\gamma'(t) = Df(a + t\vec{h}).\vec{h}$. Il faut maintenant dériver l'application γ'. L'application $\Gamma : t \mapsto Df(a + t\vec{h})$ est du même type que γ, on peut lui appliquer la formule $(\star)$, ce qui donne $\Gamma'(0) = D(Df)(0).\vec{h}$. Revenons à $\gamma'(t) = \Gamma(t).\vec{h}$. L'application Γ est à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires, et on l'évalue en un vecteur $\vec{h}$ qui est fixe (il ne dépend pas de t). Pour $\vec{h}$ fixé, l'application $L_{\vec{h}} : A \mapsto A.h$, qui va de $\mathcal{L}(E, F)$ dans F, est linéaire. On peut écrire $\gamma(t) = L_{\vec{h}}.\Gamma(t)$. Pour dériver cette application, on peut donc appliquer à nouveau la formule $(\star)$, en se souvenant que la différentielle d'une application linéaire est elle-même : on a donc $\gamma''(0) = L_{\vec{h}}.\Gamma'(0) = \Gamma'(0).\vec{h} = (D(Df)(0).\vec{h}).\vec{h} = D^2f(0)(\vec{h}, \vec{h})$.

Ce passage est difficile, pour le comprendre il faut avoir parfaitement saisi la différence entre l'application $Df(a)$, qui est linéaire de E dans F, et l'application Df, qui n'est en général pas linéaire, et va de Ω dans $\mathcal{L}(E, F)$.

On se souvient que $D(Df)(a)$ est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$: autrement dit, on doit l'évaluer en un vecteur de E, et on obtient un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Par conséquent $D(Df)(0).\vec{h}$ a bien un sens, c'est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$, on va pouvoir à nouveau l'évaluer en $\vec{h}$ pour obtenir un élément de F.

Le calcul peut aussi se faire en coordonnées. Partons de

$$\gamma'(t) = Df(a + t\vec{h}).\vec{h} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t\vec{h})h_i.$$

Appliquer la même formule pour obtenir la dérivée de chaque fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t\vec{h})$. **Réinjecter** dans la somme ci-dessus, puis **évaluer** en $t = 0$. **Vérifier** enfin qu'on retrouve bien la formule donnant $D^2f(a)(\vec{h}, \vec{h})$ en coordonnées. Retenons le résultat de ce calcul sous la forme d'un lemme qui nous servira plus bas dans la preuve de la formule de Taylor.

Lemme. *Soit f de classe C^2, $a \in \Omega$ et $\vec{h} \in E$. Posons $\gamma(t) = f(a + t\vec{h})$. Alors*

$$\gamma''(0) = D^2f(\vec{h}, \vec{h}).$$

Opérations On démontre, comme pour les applications de classe C^1, que la somme, le produit, la composée, l'inverse d'une application de classe C^2 sont des applications de classe C^2.

(b) Lemme de Schwarz

Sur le premier exemple calculé plus haut, nous avons trouvé que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ étaient égales. Ceci est un cas particulier du lemme de Schwarz, qui dit que la différentielle seconde est une forme bilinéaire *symétrique*.

Théorème. *Soit f une application de classe C^2 sur un ouvert contenant a. Alors*

$$D^2(f)(a)(\vec{h}, \vec{k}) = D^2(f)(a)(\vec{k}, \vec{h})$$

pour tous vecteurs $\vec{h}, \vec{k}$. En coordonnées, ceci signifie que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Recette de preuve.— Commençons par considérer le cas où $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $a = (0,0)$: f est une application de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et montrons l'égalité des deux dérivées partielles secondes
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$
Pour ça, posons pour tout t assez petit
$$\Delta(t) = f(t,t) - f(t,0) - f(0,t) + f(0,0).$$
Lemme. *On a*
$$\lim_{t\to 0} \frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Montrons le lemme. Pour un t fixé, on a d'abord
$$(1) \qquad f(t,t) - f(t,0) = t\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(t,st)ds.$$
En effet, $t\frac{\partial f}{\partial y}(t,st)$ est la dérivée de l'application $\gamma : s \mapsto f(t,st)$, et l'égalité suit de $\int_0^1 \gamma'(s)ds = \gamma(1) - \gamma(0)$. Un argument analogue donne
$$(2) \qquad f(0,t) - f(0,0) = t\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(0,ts)ds.$$
On déduit de (1) et (2) l'égalité
$$(3) \qquad \Delta(t) = t\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,st) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,st)\right) ds.$$
Pour les mêmes raisons qu'avant, le terme à l'intérieur de l'intégrale s'écrit à son tour, pour t fixé,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,st) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,st) = t\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(rt,st)dr$$
et en injectant cette égalité dans (3) on obtient
$$(4) \qquad \Delta(t) = t^2\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(rt,st)dr\right) ds.$$

La fin de la preuve du lemme consiste à utiliser la continuité de la dérivée partielle seconde au point $(0,0)$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in]-\delta,\delta[$,
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) - \varepsilon < \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) < \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + \varepsilon.$$
Fixons un réel $t \in]-\delta,\delta[$. Pour tout $r, s \in [0,1]$ on a encore $rt, st \in]-\delta,\delta[$, et donc l'encadrement précédent est vérifié pour $x = rt$ et $y = st$. En intégrant cet encadrement et en utilisant l'égalité (4), on obtient
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) - \varepsilon < \frac{\Delta(t)}{t^2} < \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + \varepsilon.$$
Ceci termine la preuve du lemme.

Souligner les parties du texte correspondant à la définition de la limite réclamée par le lemme.

En inversant les rôles des variables x et y, on montre de même que
$$\lim_{t\to 0} \frac{\Delta(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$
On en déduit bien sûr l'égalité des deux dérivées partielles secondes.

Dans le cadre général de l'énoncé du lemme de Schwarz, on se ramène au cas particulier que nous venons de traiter en posant $F(x,y) = f(a + x\vec{h} + y\vec{k})$. En effet, on a alors
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}(a) \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}(a).$$

(c) Formule de Taylor à l'ordre 2

La différentielle seconde permet d'affiner le développement limité qui est donné, par définition, par la différentielle. La formule de Taylor à l'ordre 2 est surtout intéressante en un point a où la différentielle s'annule, en particulier pour étudier l'allure locale de la fonction au voisinage de a, et trouver des conditions pour que le point a soit un maximum ou un miminum local, ce que nous ferons dans la section suivante.

Théorème. *Soit f une application de classe C^2 sur un ouvert contenant a. Alors*

$$f(a+\vec{h}) = f(a) + Df(a).\vec{h} + \frac{1}{2}D^2(f)(a)(\vec{h},\vec{h}) + o^2(\vec{h})$$

avec $o^2(\vec{h})$ négligeable devant $\left\|\vec{h}\right\|^2$, c'est-à-dire

$$\lim_{\vec{h}\to 0} \frac{o^2(\vec{h})}{\left\|\vec{h}\right\|^2} = 0.$$

Recette de preuve.— Dans cette preuve nous allons utiliser explicitement la continuité de D^2f. Rappelons que D^2f est une application de Ω à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{B}(E,F)$ des applications bilinéaires de E dans F. Puisque E et F sont de dimensions finies, c'est aussi le cas de $\mathcal{B}(E,F)$, et nous pouvons choisir n'importe quelle norme sur cet espace, puisqu'elles sont toutes équivalentes. La norme qui nous intéresse est définie de façon analogue à la norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ par

$$\|B\| = \sup_{v\neq 0, w\neq 0} \frac{\|B(v,w)\|}{\|v\|\,\|w\|}.$$

Une conséquence immédiate de cette définition est l'inégalité

$$\|B(v,w)\| \leq \|B\|\,\|v\|\,\|w\|$$

qui est valable pour tous vecteurs v, w de E.

Passons à la démonstration de la formule. En choisissant une base de F, on est ramenée à vérifier la formule pour chacune des composantes f_i de f, qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut donc supposer dans toute la preuve que $F = \mathbb{R}$. Soit $\vec{h}$ un vecteur assez petit pour que tout le segment $[a, a+\vec{h}]$ soit inclus dans l'ouvert Ω sur lequel f est de classe C^2. Posons $\gamma(t) = f(a+t\vec{h})$. On a $\gamma'(0) = Df(a).\vec{h}$ et $\gamma''(0) = D^2f(a)(\vec{h},\vec{h})$ (voir le lemme page 54). On utilise maintenant la formule de Taylor avec reste intégrale pour les fonctions d'une variable : pour notre fonction $\gamma : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, on a

Cette formule se déduit rapidement de l'égalité $\int_0^1 \gamma'(t)dt = \gamma(1) - \gamma(0)$ en transformant l'intégrale avec une intégration par partie (poser $u(t) = \gamma'(t)$ et $v(t) = (t-1)$).

$$\gamma(1) = \gamma(0) + \gamma'(0) + \int_0^1 (1-t)\gamma''(t)dt.$$

Ici on obtient donc

$$f(a+\vec{h}) = f(a) + Df(a).\vec{h} + \int_0^1 (1-t)D^2f(a+th)(\vec{h},\vec{h})dt.$$

(Cette dernère formule est une généralisation en dimension supérieure de la formule de Taylor avec reste intégrale.)

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Puisque f est de classe C^2, sa différentielle seconde est continue : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout vecteur $\vec{v}$ de norme inférieure à δ,

$$\left\|D^2f(a+\vec{v}) - D^2f(a)\right\| < \varepsilon.$$

Soit $\vec{h}$ dans la boule $B(0,\delta)$. Pour tout t dans $[0,1]$ le vecteur $\vec{v}=t\vec{h}$ appartient aussi à cette boule, et on a

$$-\varepsilon \left\|\vec{h}\right\|^2 < D^2f(a+t\vec{h})(\vec{h},\vec{h}) - D^2f(a)(\vec{h},\vec{h}) < \varepsilon \left\|\vec{h}\right\|^2.$$

On multiplie cet encadrement par $(1-t)$ et on intègre, on obtient

$$-\frac{1}{2}\varepsilon \left\|\vec{h}\right\|^2 < \int_0^1 (1-t)D^2f(a+t\vec{h})(\vec{h},\vec{h})dt - \frac{1}{2}D^2f(a)(\vec{h},\vec{h}) < \frac{1}{2}\varepsilon \left\|\vec{h}\right\|^2.$$

Noter que le nombre $C = D^2f(a)(\vec{h},\vec{h})$ ne dépend pas de t : le terme $\frac{1}{2}$ vient de l'intégration de $C(1-t)$.

Notons $o^2(\vec{h})$ le nombre central de cet encadrement : on a

$$\int_0^1 (1-t)D^2f(a+t\vec{h})(\vec{h},\vec{h})dt = \frac{1}{2}D^2f(a)(\vec{h},\vec{h}) + o^2(\vec{h}).$$

D'autre part nous avons montré que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que pour tout $\left\|\vec{h}\right\|<\delta$ on a

$$\frac{\left\|o^2(\vec{h})\right\|}{\left\|\vec{h}\right\|^2} < \varepsilon.$$

Autrement dit, $o^2(\vec{h})$ est négligeable devant $\left\|\vec{h}\right\|^2$. Ceci termine la preuve.

Trouver l'endroit de la preuve où on a utilisé l'inégalité donnée par la définition, rappelée au début de la preuve, de la norme d'une application bilinéaire !

Exemple Reprenons la fonction $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$ dont on a calculé plus haut les dérivées partielles d'ordre 1 et 2. Soit $a=(1,1)$. Les dérivées partielles d'ordre 1 s'annule en a, on a donc

$$\begin{aligned} f(1+h_1,1+h_2) &= f(1,1)+\tfrac{1}{2}D^2f(a)(\vec{h},\vec{h})+o^2(h) \\ &= -2+\tfrac{1}{2}\left(12h_1^2+12h_2^2-2\times 4h_1h_2\right)+o^2(\vec{h}). \end{aligned}$$

Exercice 48.— Vérifier qu'en dimension 1, la formule du théorème redonne bien la formule de Taylor usuelle. On pourra se reporter à la définition de la différentielle, exemple II, pour le lien entre différentielle et dérivée, et utiliser la dérivée seconde le long d'une droite calculée dans les exemples de la section (a).

(d) Extrema locaux : conditions d'ordre deux

Au chapitre II, nous avons décrit une relation entre la différentielle et les extrema. La différentielle seconde permet d'énoncer des critères plus précis. Commençons par nous rappeler ce qui se passe en une variable.

Malheureusement, **il n'existe aucun énoncé donnant une condition à la fois nécessaire et suffisante** pour qu'une fonction ait un maximum local en un point : certains énoncés donnent une condition nécessaire, et d'autres une condition suffisante. Cette difficulté existe déjà en une variable, et il vaut mieux avoir les idées claires pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avant d'aller voir ce qui se passe en dimension supérieure.

Exercice 49.— (cas où $E=\mathbb{R}$) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ et a un point de Ω. Avant de regarder la suite du cours, discuter des liens logiques entre les propriétés suivantes :

1. f a un minimum local au point a,
2. f a un minimum local strict au point a,
3. $f'(a)=0$,
4. $f''(a)\geq 0$,

5. $f''(a) > 0$.

On pourra s'aider des exemples $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3, x \mapsto x^4$.

On considère une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert d'un espace vectoriel normé E. On suppose que f est de classe C^2. Soit a un point de Ω. Voici nos deux critères d'ordre 2.

Théorème. *Supposons que*

$$Df(a) = 0 \text{ et } \quad \forall \vec{h} \in E \text{ non nul, } D^2 f(a)(\vec{h}, \vec{h}) > 0.$$

Alors la fonction f admet un minimum local strict au point a : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout x différent de a et dans la boule $B(a, \varepsilon)$, $f(x) > f(a)$.

Théorème. *Si la fonction f admet un minimum local au point a, alors*

$$Df(a) = 0 \text{ et } \quad \forall \vec{h} \in E, D^2 f(a)(\vec{h}, \vec{h}) \geq 0.$$

On a bien sûr deux énoncés analogues pour les maximum locaux, en inversant le sens des inégalités sur la différentielle seconde.

Recette de preuve.— Démontrons d'abord le deuxième théorème. On a une fonction f de classe C^2 au voisinage d'un point a, en lequel f admet un minimum local. Soit $\vec{h}$ un vecteur fixé. On a déjà démontré, au chapitre II, la condition d'ordre 1 : $Df(a).\vec{h} = 0$. On veut maintenant montrer que $D^2 f(a)(\vec{h}, \vec{h}) \geq 0$. Utilisons la même approche que dans la preuve de la condition d'ordre 1. La fonction d'une variable $\varphi : t \mapsto f(a + t\vec{h})$ admet un minimum local en 0. Or cette fonction est de classe C^2, elle admet un développement limité à l'ordre 2 : pour tout $t \neq 0$ assez petit,

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \varphi(0) + t\varphi'(0) + \tfrac{1}{2}t^2\varphi''(0) + o^2(t) \\
&= f(a) + tDf(a).\vec{h} + \tfrac{1}{2}t^2 D^2 f(a)(\vec{h}, \vec{h}) + o^2(t) \\
&= f(a) + 0 + \tfrac{1}{2}t^2 \left(D^2 f(a)(\vec{h}, \vec{h}) + \tfrac{o^2(t)}{t^2} \right)
\end{aligned}$$

avec $o^2(t)$ négligeable devant t^2. Lorsque t tend vers 0, le terme entre parenthèse tend donc vers $D^2 f(a)(\vec{h}, \vec{h})$. Si on avait $D^2 f(a)(\vec{h}, \vec{h}) < 0$, alors ce terme entre parenthèses serait strictement négatif pour tout t assez petit, on aurait $\varphi(a + t) < \varphi(a)$ pour tout $t \neq 0$ assez petit, ce qui contredirait le fait que la fonction φ admet un minimum local au point 0. On a donc $D^2 f(a)(\vec{h}, \vec{h}) \geq 0$, comme voulu.

Passons à la preuve du premier théorème. On a une fonction f de classe C^2 au voisinage d'un point a, cette fois-ci nous supposons que $Df(a) = 0$ et que $D^2 f(a)(\vec{h}, \vec{h}) > 0$ pour tout vecteur $\vec{h} \neq 0$; il s'agit de montrer que f admet un minimum local au point a. Commençons par expliquer un argument **incorrect**. On reprend la méthode de la preuve précédente : pour un vecteur $\vec{h}$ fixé, on considère $\varphi : t \mapsto f(a + t\vec{h})$. Écrivons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de cette fonction : on a

$$f(a + t\vec{h}) = f(a) + \frac{1}{2}t^2 D^2 f(a)(\vec{h}, \vec{h}) + o^2(t).$$

Comme $D^2 f(a)(\vec{h}, \vec{h}) > 0$, on en déduit que la fonction φ admet un minimum local au point 0. Autrement dit, f admet un minimum local strict au point a dans la direction $\vec{h}$. Comme c'est vrai pour tout vecteur $\vec{h} \neq 0$, f a bien un minimum local strict au point a.

Où est l'erreur ? Elle est dans la dernière phrase : contrairement à ce qu'elle affirme, il existe des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pour lesquelles f a un minimum local strict au point 0 en restriction à toutes les droites passant le point 0, sans que f ait un minimum local en 0.

Voici maintenant un argument correct. L'application $\vec{h} \mapsto D^2f(a)(\vec{h}, \vec{h})$ est continue et strictement positive pour tout $\vec{h} \neq 0$. Par compacité de la sphère unité de E qui est de dimension finie, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\|\vec{v}\| = 1$, $D^2f(a)(\vec{v}, \vec{v}) > \varepsilon$. (Cet argument vous rappelle peut-être la preuve de l'équivalence de normes en dimension finie.) Soit maintenant un vecteur $\vec{h} \neq 0$ de norme quelconque ; en utilisant la bilinéarité de $D^2f(a)$, on obtient

$$D^2f(a)(\vec{h}, \vec{h}) = \left\|\vec{h}\right\|^2 D^2f(a)\left(\frac{\vec{h}}{\left\|\vec{h}\right\|}, \frac{\vec{h}}{\left\|\vec{h}\right\|}\right) \geq \left\|\vec{h}\right\|^2 \varepsilon.$$

L'argument final utilise la formule de Taylor à l'ordre 2, et ressemble à celui utilisé dans la preuve de la condition d'ordre 1 : pour tout $\vec{h} \neq 0$ assez petit,

$$\begin{aligned} f(a+\vec{h}) &= f(a) + Df(a).\vec{h} + \tfrac{1}{2}D^2(f)(a)(\vec{h}, \vec{h}) + o^2(\vec{h}) \\ &\geq f(a) + 0 + \left\|\vec{h}\right\|^2 \left(\varepsilon + \tfrac{o^2(\vec{h})}{\|h\|^2}\right). \end{aligned}$$

Puisque $o^2(\vec{h})$ est négligeable devant $\|h\|^2$, lorsque $\vec{h}$ tend vers 0, le terme entre parenthèses tend vers ε. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout vecteur $\vec{h}$ non nul dans la boule $B(0, \delta)$, ce terme entre parenthèses est $> \frac{\varepsilon}{2}$, et

$$f(a+\vec{h}) \quad \geq \quad f(a) + \left\|\vec{h}\right\|^2 \tfrac{\varepsilon}{2} > f(a).$$

Autrement dit, f admet un minimum local strict au point a.

Voici à quoi pourrait ressembler une fonction f contredisant l'argument incorrect. Il existe dans le plan une courbe qui arrive au point 0 en spiralant, et le long de laquelle f prend des valeurs < 0, sauf au point 0 où f s'annule. Considérons une droite passant par le point 0. Elle recoupe la spirale en un autre point, et en ce point f est < 0, mais entre 0 et cet autre point il y a assez de place pour que f prennent des valeurs > 0, au voisinage de 0, le long de cette droite. Malheureusement je n'ai pas assez de place dans cette marge pour construire complètement ce contre-exemple...

Signe de la différentielle seconde Pour appliquer les théorèmes en pratique, on a besoin de savoir déterminer le signe de $D^2f(a)(h, h)$ pour un a fixé et pour tout h.

L'application $h \mapsto D^2f(a)(h, h)$ est une *forme quadratique* : autrement dit, en coordonnées, il s'agit d'un polynôme homogène de degré deux (une combinaison linéaire de fonctions du type $h \mapsto h_ih_j$, produit de deux des coordonnées du point h). Pour simplifier, considérons seulement le cas de deux variables. Concernant le signe, il y a quatre exemples essentiels :

1. la forme quadratique $Q_+ : (h_1, h_2) \mapsto h_1^2 + h_2^2$. On a $Q_1(h) > 0$ pour tout $h \neq 0$. On dit que Q_1 est strictement positive, ou *définie positive*.
2. la forme quadratique $Q_- : (h_1, h_2) \mapsto -h_1^2 - h_2^2$. On a $Q_1(h) < 0$ pour tout $h \neq 0$. On dit que Q_1 est strictement négative, ou *définie négative*.
3. la forme quadratique $Q_{+-} : (h_1, h_2) \mapsto h_1^2 - h_2^2$. Ici il existe des h tels que $Q_{+-}(h) > 0$ et d'autres pour lesquels $Q_{+-}(h) < 0$. On dit que Q_{+-} est indéfinie ou *de type selle*.
4. la forme quadratique $Q_0 : (h_1, h_2) \mapsto h_1^2$. Elle ne prend pas de valeurs négatives, mais il existe des $h \neq 0$ tels que $Q_0(h) = 0$. On dit qu'elle est positive et *dégénérée* (parce qu'elle ne dépend que d'une variable). Il y a bien sûr aussi le cas négatif dégénérée.

En deux variables, une forme quadratique quelconque s'écrit

$$Q(h_1, h_2) = rh_1^2 + sh_2^2 + 2th_1h_2.$$

Un théorème d'algèbre linéaire nous dit que toute forme quadratique est diagonalisable dans une base orthonormée. En notant h_1', h_2' les coordonnées dans la nouvelle base, ceci signifie que $Q(h_1, h_2) = \lambda {h'_1}^2 + \mu {h'_2}^2$, où λ et μ sont les valeurs propres. En ce qui concerne le signe de Q, on est ainsi ramené à l'un des quatre exemples essentiels. On voit en particulier que le signe de Q est déterminé par le signe de ses valeurs propres.

Soit maintenant a un point critique de f, c'est-à-dire tel que $Df(a) = 0$. Soit $Q(h) = D^2f(a)(h, h)$.

1. Si Q est définie positive, alors f a un minimum local strict au point a (d'après le première théorème).
2. Si elle est définie négative, f a un maximum local strict.
3. Si elle est de type selle, alors le point a n'est ni un minimum local, ni un maximum local (d'après la contraposée du second théorème).
4. Si elle est dégénérée, alors on ne peut pas conclure.

Noter la différence entre les deux derniers cas : si $D^2f(a)$ est de type selle, **on sait que a n'est pas un extremum local** ; par contre dans le cas dégénéré on n'a pas assez d'information pour conclure.

Exemples

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x - y$. Cherchons les extrema éventuels de f.

Le calcul différentiel nous permet de trouver les extrema locaux. Pour ceci, on cherche d'abord les *points critiques*, c'est-à-dire les points (x, y) en lesquels la différentielle est nulle, ce qui revient à dire que les deux dérivées partielles sont nulles. Ici, les points critiques sont les solutions du système d'équations

$$\begin{cases} 2x - y - 2 & = & 0 \\ 2y - x + 1 & = & 0 \end{cases}$$

qui a pour solution le point $(1, 0)$. Pour tenter de connaitre la nature de ce point critique, calculons les dérivées secondes en ce point : on trouve la différentielle seconde

$$D^2f(1, 0)(\vec{h}, \vec{h}) = 2h_1^2 + 2h_2^2 - 2h_1h_2.$$

Ne pas oublier de compter deux fois la dérivée $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$!

Pour pouvoir appliquer les théorèmes, il nous faut le signe de cette expression. Une première possibilité consiste à trouver le signe des valeurs propres de la matrice des dérivées partielles d'ordre 2, ici

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La somme des valeurs propres vaut la trace (4), leur produit vaut le déterminant (3). Somme et produit étant strictement positifs, les deux valeurs propres sont strictement positives, par conséquent la forme quadratique $D^2f(1, 0)$ est définie positive. Le premier théorème ci-dessus s'applique : f admet au point $(1, 0)$ un minimum local strict. Puisque f n'a pas d'autre point critique, elle n'a pas d'autre extremum local, en particulier pas de maximum local (tout extremum local est un point critique : c'était le premier théorème du chapitre II).

Une autre possibilité pour déterminer le signe consiste à utiliser la forme canonique : $2h_1^2 + 2h_2^2 - 2h_1h_2 = 2(h_1^2 + h_2^2 - h_1h_2) = 2((h_1 - \frac{1}{2}h_2)^2 + \frac{3}{4}h_2^2)$ et on voit, sous cette forme, que l'expression est strictement positive pour tout $\vec{h} \neq 0$.

Elle n'a donc pas de maximum, puisque tout maximum est *a fortiori* un maximum local. A-t-elle un minimum ? Le calcul différentiel n'est pas suffisant pour conclure, il faut recourir à d'autres outils, comme ceux fournis par la topologie. Ici, on peut montrer (1) que $f(x, y)$ tend vers $+\infty$ lorsque la norme de (x, y) tend vers $+\infty$. Un argument de compacité permet d'en déduire (2) l'existence d'un minimum global. Ce minimum global est en particulier un minimum local, il ne peut donc s'agir que du point $(1,0)$.

Remarquer qu'ici, l'argument topologique permet de "court-circuiter" le calcul de la différentielle seconde...

Pour montrer (1), on peut par exemple mettre d'abord la partie quadratique sous la forme canonique, en écrivant

$$f(x,y) = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 - 2x + y.$$

On peut écrire

$$N(x,y) = \left((x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|(x - \frac{1}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}y)\right\| = \|A(x,y)\|$$

où A est une application linéaire inversible ; N est donc une norme sur $\mathbb{R}^2$, et par équivalence des normes, il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout x, y, $N(x,y) \geq K\,\|(x,y)\|$. On peut maintenant minorer $f(x,y)$ par une expression dans laquelle on factorise la norme :

$$f(x,y) \geq \|(x,y)\|^2\,(K^2 + \frac{-2x+y}{\|(x,y)\|^2}).$$

Lorsque la norme $\|(x,y)\|$ tend vers $+\infty$, les quantités $\frac{x}{\|(x,y)\|^2}$ et $\frac{y}{\|(x,y)\|^2}$ tendent vers 0 (par exemple à cause de la majoration $|x| \leq \|(x,y)\|$). On en déduit que le terme minorant $f(x,y)$ tend vers $+\infty$, et par comparaison il en est de même pour $f(x,y)$.

• Considérons à nouveau la fonction $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$, dont on a calculé précédemment les dérivées partielles, et cherchons les extrema éventuels de f. Ici la recherche de points critiques conduit au système d'équations

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y &= 0 \\ 4y^3 - 4x &= 0 \end{cases}$$

qui a pour solution les points $(-1,-1)$, $(1,1)$ et $(0,0)$. Aux deux premiers points, la matrice de la différentielle seconde est

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et $D^2f(a)$ y est définie positive : ces deux points sont donc des minima locaux. Au point $(0,0)$, on a $D^2f(0,0)(h_1,h_2) = -4h_1h_2$. On peut clairement trouver des valeurs du couple (h_1,h_2) pour lesquelles $D^2f(0,0)(h_1,h_2) > 0$, et d'autres pour lesquelles $D^2f(0,0)(h_1,h_2) < 0$. Le point est de type selle, le second théorème (ou plutôt sa contraposée) nous dit que a n'est pas un minimum local de f ; le théorème analogue pour les maxima nous dit que a n'est pas non plus un maximum local.

La fonction a deux minima locaux et un point selle, pas de maximum local. Elle n'a donc pas de maximum. Un argument analogue à celui développé dans l'exemple précédent permet de montrer que les minima locaux sont des minima.

(e) Dérivées d'ordres supérieurs

Tous les résultats se généralisent aux différentielles d'ordres supérieures ; donnons un aperçu de la théorie. Dans ce qui suit, Ω est un ouvert de $E = \mathbb{R}^m$.

• Soit $f : \Omega \to F$. On définit de façon récursive les applications de classe C^k : si f est différentiable sur Ω et si Df est de classe C^2, alors f est dite de classe C^3 ; si Df est de classe C^3, f est dite de classe C^4, etc.. Si elle est de classe C^k pour tout k, on dit qu'elle est de classe C^∞.

• La différentielle d'ordre k en un point a s'identifie à une application multilinéaire de E^k dans F. On généralise sans difficulté la notion de dérivée partielle pour définir les dérivées partielles d'ordre k.

• Le critère pour les applications de classe C^1 et C^2 se généralise : une application f est de classe C^k si et seulement si elle admet en tout point a des dérivées partielles d'ordre k

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(a) := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f \right) \right) (a)$$

qui dépendent continûment de a.

• Le lemme de Schwarz se généralise également : si f est de classe C^k, la différentielle $D^k f(a)$ est une application multilinéaire symétrique ; ce qui revient à dire que les dérivées partielles d'ordre k,

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(a) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_{\sigma(k)}}} f(a)$$

sont égales pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$: en pratique, le résultat de la dérivation partielle successive ne dépend que des variables par rapport auxquelles on dérive, et pas de l'ordre dans lequel ces variables apparaissent.

• En coordonnées, la différentielle d'ordre k est donnée par

$$D^k f(a)(h, \ldots, h) = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(a) h_{i_1} \cdots h_{i_k}.$$

• La somme, le produit, la composée de deux applications de classe C^k est de classe C^k. Toute application polynômiale est de classe C^∞.

• Soit k un entier plus grand que 1. Soit $f : U \to V$ un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts U, V de deux espaces vectoriels normés E, F. Supposons que f est de classe C^k. On montre alors que f^{-1} est aussi de classe C^k. Dans ce cas, on dit que f est un C^k-difféomorphisme.

• Les théorèmes d'inversion locale, des fonctions implicites, des sous-variétés données par des équations, restent valables en remplaçant partout "C^1" par "C^k". On obtient ainsi des énoncés avec une hypothèse plus forte : on suppose qu'une application est de classe C^k, là où on la supposait seulement de classe C^1, et avec une conclusion plus forte : on obtient l'existence d'une application de classe C^k (l'inverse de f dans le théorème d'inversion locale, la fonction φ dans le théorème des fonctions implicites, le difféomorphisme qui redresse les sous-variétés).

VI.2 Commentaires

(a) Interprétation de la différentielle seconde

On peut interpréter la différentielle seconde grâce au lemme de la preuve du lemme de Schwarz. Soit f une fonction définie au voisinage d'un point a, et $\vec{h}$ un vecteur. La dérivée de f selon le vecteur $\vec{h}$ donne la valeur de la différence des valeurs de f en $a + t\vec{h}$ et en a, lorsque t tend vers 0, au premier ordre :

$$\delta(a, t\vec{h}) = f(a + t\vec{h}) - f(a) = t\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a) + o(t).$$

Etant donné un deuxième vecteur $\vec{k}$, on peut se demander comment se comporte la différence entre $\delta(a + t\vec{k}, t\vec{h})$ et $\delta(a, t\vec{h})$,

$$\Delta(t) = \delta(a+t\vec{k}, t\vec{h}) - \delta(a, t\vec{h}) = \left(f(a + t\vec{h} + t\vec{k}) - f(a + t\vec{k})\right) - \left(f(a + t\vec{h}) - f(a)\right).$$

Le lemme dit que lorsque t tend vers 0, cette quantité est d'ordre 2 en t, et le coefficient est donné par la différentielle seconde :

$$\Delta(t) = t^2 D^2 f(a)(\vec{h}, \vec{k}) + o^2(t).$$