Université Pierre et Marie Curie — Année 2014-2015

Licence $3^{\text{ème}}$ année : LM360 — Examen du 5 janvier 2015 de 16h à 19h

---

Aucun document ni machine électronique n'est autorisé. **Les téléphones portables doivent impérativement être éteints**. Veillez à la clarté de votre rédaction ainsi qu'à la justification soigneuse de vos affirmations. On rappelle que les exercices peuvent être fait dans un ordre quelconque, et que chaque question peut être admise pour faire les suivantes. Barême indicatif : 4+6+10+10+6+14 ; ce barême n'inclut pas les questions désignées par le symbole (*), qui sont hors-barême.

Exercice 1

1. (Question de cours) Donner la définition d'un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (y, x + \cos(y))$ est un C^1-difféomorphisme.

Exercice 2

1. (Question de cours) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$. Énoncer le théorème donnant une condition suffisante pour que S soit une surface (sous-variété de dimension 2).
2. Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 36\}$.
   (a) L'ensemble S est-il une sous-variété ?
   (b) Donner l'équation du sous-espace vectoriel tangent à S au point $(1,2,3)$.

Exercice 3 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 + 3y + 4z$. On s'intéresse au maximum de cette fonction sur la boule unité fermée

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}.$$

1. Démontrer qu'il existe un point P de B tel que
$$f(P) = \mathrm{Sup}\{f(Q) \mid Q \in B\}.$$
2. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$.
3. Qu'en déduit-on concernant le point P obtenu à la première question ?
4. On considère la restriction $g = f_{|S}$ de f à la sphère unité $S = \partial B$. Déterminer le(s) point(s) en le(s)quel(s) g atteint son maximum.
5. Conclure en donnant la valeur de $\mathrm{Sup}\{f(Q) \mid Q \in B\}$.

Exercice 4 Soit X un espace métrique compact, et $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. On considère une suite d'applications continues $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de X dans $\mathbb{R}$, qui converge uniformément vers f. Soit $m = \inf\{f(x) \mid x \in X\}$, et, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, $m_n = \inf\{g_n(x) \mid x \in X\}$.

1. Montrer qu'il existe un point P de X tel que $f(P) = m$ et, pour chaque entier n, un point P_n de X tel que $g_n(P_n) = m_n$.
2. (Question de cours) Écrire la définition de la convergence uniforme pour la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer que pour tout entier n assez grand, $m_n \geqslant m - \varepsilon$.
   (b) Montrer que pour tout entier n assez grand, $m_n \leqslant m + \varepsilon$.
   (c) Que conclut-on ?
4. (*) On suppose maintenant que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers P. Montrer qu'il existe un point P' différent de P tel que $f(P') = f(P)$.

Exercice 5 Dans le plan muni de la norme euclidienne, on considère la partie

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}.$$

Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1.

1. Pour tout t dans $\mathbb{R}$, on pose $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$. Montrer que la dérivée $(f \circ \gamma)'(t)$ est bien définie pour tout $t \in [0, 1]$, et exprimer-là à l'aide de la différentielle de f.
2. Soit M un réel positif, on suppose que pour tout point P de U, $\|Df(P)\| \leqslant M$, où $\|.\|$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Donner une majoration de la distance entre les images par f des points $(2, 0)$ et $(-2, 0)$.
3. (*) Montrer que pour une valeur de M bien choisie, l'application f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.
4. Qu'en déduit-on concernant l'existence et l'unicité des points fixes de l'application f ?

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{xy} - 2e^2xy$.

1. Calculer, pour tout vecteur $v = (h, k)$, le nombre $Df(2, 1)\ v$.
2. (a) Calculer, pour tout vecteur $v = (h, k)$, le nombre $D^2f(2, 1)\ (v, v)$.
   (b) Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(2, 1)$.
3. Montrer que, pour tout vecteur $v \neq (0, 0)$, $D^2f(2, 1)\ (v, v) > 0$.
4. **Déduire** de la question précédente l'existence d'un nombre $c > 0$ tel que, pour tout vecteur $v \neq (0, 0)$,
   $$D^2f(2, 1)\ (v, v) \geqslant c\|v\|^2$$
   où $\|v\|$ est la norme euclidienne du vecteur v.
5. En déduire que pour tout point (x, y) assez proche du point $(2, 1)$,
   $$f(x, y) > -3e^2 + Df(2, 1)\ (x - 2, y - 1).$$
6. Interpréter géométriquement l'inégalité obtenue.

Errata

1. Exercice 5, question 1, remplacer "$t \in [0,1]$" par "$t \in [0,\pi]$".
2. Exercice 5, question 3, "Montrer que pour une valeur de M", ajouter "strictement positive".
3. Exercice 6, question 5, "En déduire que pour tout point (x,y) assez proche du point $(2,1)$", ajouter "et distinct de $(2,1)$".

Indications de corrigé

Exercice 1 Il fallait notamment montrer que f est bijective : on prend (a,b) un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$, et on vérifie qu'il existe un unique couple (x,y) tel que $f(x,y)=(a,b)$.

Exercice 2 La condition est que le gradient de f ne s'annule en aucun point de l'ensemble S. Cette condition est vérifiée. L'espace vectoriel tangent en un point P est l'orthogonal du gradient au point P.

Exercice 3 La fonction f n'a aucun point critique sur $\mathbb{R}^3$. D'après un théorème du cours, ceci implique qu'elle n'a aucun maximum local. On en déduit que le point P ne peut pas appartenir à l'intérieur de la boule B, il doit être sur la frontière (ce qui explique les questions suivantes).
A la question 4, il s'agissait d'appliquer le théorème sur les extrema liés. Après avoir vérifié l'hypothèse, la condition de Lagrange donne un système de 4 équations à 4 inconnues x, y, z, λ (3 équations avec λ et l'équation de contrainte d'appartenir à la sphère). Attention, l'équation $x = \lambda x$ donne $\lambda = 1$ ou $x = 0$ (si on simplifie par x, ce qui est très tentant, on perd la deuxième solution). Au final, on trouve deux points sur la sphère qui vérifient l'équation, d'après le théorème des extrema liés le maximum doit être l'un des deux, il suffit de calculer la valeur de g en ces deux points pour trouver le maximum.
Enfin, on conclut à la question 5 grâce à la réponse à la question 3.

Exercice 4 Le but des trois premières questions était de montrer que lorsqu'une suite de fonctions converge uniformément, la suite des minimas converge vers le minimum de la limite.
A la dernière question, on montre (par contraposée) que si de plus la fonction limite atteint son minimum en un unique point P, alors la suite des points P_n converge vers P.

Exercice 5 La première question consistait à appliquer la formule $(f\circ\gamma)'(t) = Df(\gamma(t)).\gamma'(t)$, qui est omniprésente dans le cours. On en déduisait, à la deuxième question, d'abord que la norme de $(f\circ\gamma)'(t)$ est majorée par $2M$. On peut alors appliquer le théorème des accroissements finis, dans la version pour les fonction d'un intervalle vers un espace vectoriel normé, pour obtenir que la distance entre $f(2,0)$ et $f(-2,0)$ est majorée par $2\pi M$. ATTENTION, on ne peut pas appliquer directement la version qui utilise la majoration de la norme de Df, parce que le segment joignant les deux points n'est pas inclus dans l'ouvert U !
A la dernière question, on ne peut pas appliquer le théorème du point fixe de Banach, pour deux raisons : d'abord rien ne dit que $f(U)$ est inclus dans U, et ensuite U n'est pas complet. Par contre, l'hypothèse implique qu'il existe au plus un point fixe (en reprenant l'argument pour l'unicité dans la preuve du théorème), argument qui n'utilise pas la complétude ni l'invariance de U).

Exercice 6 On trouve, à un facteur positif près, $D^2f(2,1)(v,v) = h^2 + 2hk + 4k^2$, qu'on peut mettre sous la forme $(h+k)^2 + 3k^2$. Cette quantité est clairement positive, et si elle s'annule, alors $h + k = 0$ et $k = 0$, d'où $v = 0$.
La question 4 demandait d'en déduire l'existence de c : il fallait reprendre l'argument utilisé dans la preuve du théorème sur les conditions d'ordre 2 pour les extrema, dans le cas où la différentielle seconde est définie positive ($D^2f(2,1)(v,v)$ est strictement positive sur la sphère unité qui est compacte...). Pour la question 5, utiliser la définition précise de "être négligeable devant le carré de la norme de v", comme dans les preuves des théorèmes. L'interprétation géométrique est : au voisinage du point $2,1)$, le graphe de f est au dessus de son plan tangent.