TD n°9. L'inégalité des accroissements finis et la formule de Taylor

1 L'inégalité des accroissements finis

Exercice 1. On veut montrer que le système des deux équations
$$x = \tfrac{1}{4}\sin(x+y) \text{ et } y = 1 + \tfrac{2}{3}\arctan(x-y)$$
admet une unique solution.

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, trouver une norme sur $\mathbb{R}^2$ telle que
$$f : (x,y) \mapsto \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y)\right)$$
soit contractante.

b) Conclure.

Exercice 2. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et U un ouvert connexe de E. Soit $f : U \to F$ une fonction différentiable telle que sa différentielle Df est constante sur U. Montrer que
$$\exists A \in \mathcal{L}(E,F), \exists b \in F, f(x) = Ax + b \quad \forall x \in E$$
(où $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.)

Rappel : Si U est un ouvert connexe de E et $h : U \to F$ est une application différentiable telle que $Dh = 0$ sur U, alors h est constante sur U.

Exercice 3. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, U un voisinage ouvert de K et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe un voisinage V de K, convexe ouvert et relativement compact tel que $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$. On pose, pour $t \geq 0$, $f_t = I + tf$, où $I : x \mapsto x$ est l'identité de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $M = \sup\{\|Df(x)\| : x \in \bar{V}\}$ existe et que, pour tout $y \in \bar{V}$,
$$\|x-y\| \leq \|f_t(x) - f_t(y)\| + tM\|x-y\|.$$

b) On pose $t_0 = \frac{1}{M}$. Déduire de ce qui précède que pour tout $t \in [0, t_0[$, la restriction de f_t à $\bar{V}$ est injective. On suppose désormais que $t \in [0, t_0[$.

c) Montrer que la restriction de f_t à $\bar{V}$ est un homéomorphisme de $\bar{V}$ sur $f_t(\bar{V})$.

d) Montrer que pour tout $x \in V$, $\quad Df_t(x) = \mathrm{I} + tDf(x)$ est inversible si $0 \leq t < t_0$.

Exercice 4 (À retenir)**.** Soient E, F deux espaces de Banach, $U \subseteq E$ un ouvert, et une suite (f_n) d'applications $\mathcal{C}^1$, $f_n : U \to F$. On suppose :
– $\exists a \in U$ tel que $(f_n(a))$ converge ;
– (Df_n) converge uniformément sur U vers une fonction g.

a) Montrer que pour tout h tel que $[a, a+h] \subseteq U$, on a
$$\|(f_p(a+h) - f_p(a)) - (f_q(a+h) - f_q(a))\| \leq \sup_{b \in [a,a+h]} ||D(f_p - f_q)(b)|| \cdot ||h||$$

b) En déduire que $(f_n(a+h))$ est de Cauchy et que (f_n) converge simplement vers une fonction nommée f.

c) Montrer que la convergence est uniforme si $\|h\|$ est borné. En déduire que f est continue.

d) Montrer que f est différentiable en écrivant
$$\begin{aligned}\|f(b+h) - f(b) - g(b)\cdot h\| \leq \quad & \|\,(f(b+h) - f(b)) - (f_n(b+h) - f_n(b))\,\| \\ + \quad & \|f_n(b+h) - f_n(b) - Df_n(b)\cdot h\| \\ + \quad & \|Df_n(b)\cdot h - g(b)\cdot h\|\end{aligned}$$
et en majorant chacun des termes.

e) Conclure.

2 Différentielles d'ordre supérieur et formule de Taylor

Exercice 5. Soient E_1, E_2 et F des espaces normés et $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue. Montrer que B est de classe C^∞ et déterminer les différentielles $D^k B$.

Exercice 6. Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une application de classe C^2.

a) Soit $h \in E$ et $\varphi_h(x) = Df(x)(h)$. Justifier que
$$D^2 f(a)(k,h) = D\varphi_h(a)(k) \text{ pour tout } k \in E.$$

b) Supposons que, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Montrer que $D^2 f(0)(x,x) = 2f(x)$ pour tout $x \in E$.

c) Soit $a, h, k \in E$ et soit $\psi : \mathbb{R}^2 \to F$ définie par $\psi(t,s) = f(a + th + sk)$. Calculer $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s}(0,0)$.

Exercice 7. a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^\infty$ et soit $n \geq 1$.
Établir l'équivalence des propriétés suivantes :
– $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$.
– $f(x) = x^n g(x)$ avec $g \in C^\infty$.

b) Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On suppose $f(0) = Df(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ telles que $f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j g_{i,j}(x)$.

c) (la même propriété dans les espaces de Banach)
Soient $E_1, \ldots, E_n$ et F des espaces de Banach et $f : U \subset E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ une fonction $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert convexe U (avec $k \geq 2$) telle que $f(0) = 0$ et $Df(0) = 0$.
Montrer qu'il existe des fonctions $g_{ij} : U \to \mathcal{L}(E_i, E_j; F)$ de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ sur U telles que
$$f(x) = \sum_{i,j} g_{ij}(x)(x_i, x_j) \quad \forall x \in U,$$
où $\mathcal{L}(E_i, E_j; F)$ désigne l'espace des applications bilinéaires continues $E_i \times E_j \to F$ et $x_i = \Pi_i(x)$ où $\Pi_i : E_1 \times \ldots \times E_n \to E_i$ est la projection sur l'espace E_i.

Exercice 8. Soit $f(x,y)$ une fonction $\mathcal{C}^2$ au voisinage du cercle $x^2 + y^2 = 1$. On pose $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = a$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = b$. On définit, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculez $F''(0)$ en fonction de a et de b.

Exercice 9. Soient E, F, G des espaces de Banach et $u : E \to F$, $v : F \to G$ deux applications C^2. Calculer, à l'aide de la définition, la différentielle seconde de $w = v \circ u$.

Exercice 10. Ecrire la formule de Taylor-Young

a) à l'ordre deux pour une fonction de trois variables ;

b) à l'ordre trois pour une fonction de deux variables ;

c) à l'ordre treize en $(0,0)$ pour $f(x,y) = y^5 + x^3 y - x^2 + y$.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur E telle que
$$\forall x \in E, \quad f(x) > 0.$$
On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que
$$\forall x \in E, \quad \|D^2 f(x)\| \leq M.$$

a) Montrer que si $h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$\forall x \in E, \quad 0 < f(x) + \lambda Df(x) \cdot h + \frac{\lambda^2}{2} M \|h\|^2.$$
Indication : appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à f entre x et $x + \lambda h$.

b) En déduire que $\|Df(x)\| \leq \sqrt{2Mf(x)}$.

3 Pour aller plus loin...

Exercice 12. Soient E un espace de Banach, $f : [0,1] \to E$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux applications continues, différentiables sur $]0,1[$, telles que pour tout $t \in]0,1[$,
$$||f'(t)|| \leq g'(t).$$
On suppose de plus que $||f(1) - f(0)|| = g(1) - g(0)$. Montrer que pour $0 < u < v < 1$,
$$||f(v) - f(u)|| = g(v) - g(u).$$
En déduire que $||f'(t)|| = g'(t)$ pour tout $t \in]0,1[$.

Exercice 13. Soient E, F deux espaces de Banach et $k \in]0,1[$. On considère une application $\varphi : E \times F \to F$ telle que $||\varphi(x,y) - \varphi(x,z)|| \leq k||y-z||$ pour tous $x \in E$ et $y, z \in F$. Pour $a \in E$ fixé on définit $D_1\varphi(a,b) \in \mathcal{L}(F)$ la différentielle de l'application $\varphi(a,\cdot) : F \to F$ au point $b \in F$. De même on définit $D_2\varphi(a,b) \in \mathcal{L}(E,F)$.

a) Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe un unique $f(x) \in F$ tel que $\varphi(x, f(x)) = f(x)$.

   On suppose desormais que φ est différentiable.

b) Montrer que $||D_2\varphi(a,b)|| \leq k$ pour tout couple $(a,b) \in E \times F$. En déduire que $id_F - D_2\varphi(a,b)$ est inversible en $\mathcal{L}(F)$.

c) Calculer $Df(a)$ en tout point $a \in E$ où f est différentiable.

d) Montrer que pour tous $a, h \in E$ on a $||\varphi(a+h, f(a)) - \varphi(a, f(a))|| \geq (1-k)||f(a+h) - f(a)||$. En déduire qu'il existe une constante $M = M(a)$, dont on fournira une majoration explicite, telle que l'on ait, pour $||h||$ assez petite, $||f(a+h) - f(a)|| \leq M||h||$.

e) On pose $w_a(h) = f(a+h) - f(a)$. Montrer que

$$w_a(h) - D_2\varphi(a,b) \cdot w_a(h) = D_1\varphi(a,b) \cdot w_a(h) + o(||h||)$$

   lorsque $||h|| \to 0$. En déduire que f est différentiable sur E et retrouver l'expression trouvée précédement pour $Df(a)$.

Exercice 14. (Application de l'exercice précédent) Soit $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application telles que

$$k := \sup_y \int_{\mathbb{R}} |K(x,y)| dx < 1.$$

Montrer que l'équation intégrale

$$g(x) + \int_{\mathbb{R}} K(x,y) g(y) dy = f(x) \sin(x)$$

admet, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, une solution $g = g_f \in L^1(\mathbb{R})$ et que l'application $f \mapsto g_f$ est differentiable sur $L^1(R)$.