TD n°8. Différentiabilité

Exercice 1.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 1 en un point x_0. En déduire l'expression de la différentielle $Df(x_0)$ à l'aide de $f'(x_0)$.

b) Rappeler la formule donnant la différentielle de $(g \circ f)$ à l'aide des différentielles de f et g. Ecrire la formule pour f, g deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et retrouver ainsi la formule donnant la dérivée de $g \circ f$ à l'aide de celles de f et de g.

Exercice 2.

a) Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est différentiable si et seulement si elle est continue et, dans ce cas, pour tout x de E on a $Df(x) = f$.

b) Soient E, F, G des espaces vectoriels normés. Montrer qu'une application bilinéaire $f : E \times F \to G$ est différentiable si et seulement si elle est continue, et, dans ce cas, pour tout (x, y) dans $E \times F$, on a $Df(x, y) = f(x, .) + f(., y)$.

c) (Application de la question précédente) Soit $X = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que l'application

$$f \mapsto \int_0^1 f^2(t)dt$$

de X dans $\mathbb{R}$ est différentiable, et calculer sa différentielle.

d) (Deuxième application)

i) Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{< x, x >}$, de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, est différentiable en tout x_0 non nul, et donner sa différentielle.

ii) Montrer que cette application n'est pas différentiable en 0.

iii) Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ une application de classe C^1. Donner une formule pour la dérivée de la fonction qui associe à t la distance de 0 à $\gamma(t)$. Interpréter géométriquement l'annulation de cette dérivée.

Exercice 3. On dit qu'une application $f : E \to F$ *admet au point a une dérivée suivant le vecteur* $\vec{h}_0$ si l'application $t \mapsto f(a + t\vec{h}_0)$, qui va de $\mathbb{R}$ dans F, est dérivable en 0. La dérivée se note alors $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}_0}(a)$.

a) Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces vectoriels normés, et x_0 un point de E. Quels liens logiques y a-t-il entre les propriétés suivantes ? Représenter ces liens sur un diagramme.
(i) f est différentiable en x_0,
(ii) f admet en x_0 des dérivées directionnelles suivant tout vecteur (non nul),
(iii) f admet des dérivées partielles en x_0,
(iv) f est continue en x_0,
(v) f est de classe C^1 sur un voisinage de x_0.

b) Chacune des formules suivantes définit une fonction f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, que l'on prolonge en posant $f(0, 0) = 0$. Pour chacune des fonctions obtenues, répondre aux questions suivantes : l'application admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$? Des dérivées directionnelles ? Est-elle continue en $(0, 0)$? Est-elle de classe C^1 au voisinage de $(0, 0)$? Est-elle différentiable en $(0, 0)$?

$$(i)\ \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad (ii)\ \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \qquad (iii)\ \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \qquad (iv)\ \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \qquad (v)\ \frac{xy^3}{x^4 + y^2}.$$

Aide : on pourra vérifier et utiliser l'inégalité $x^4 + y^2 \geq \sqrt{2}x^2|y|$.

c) Soit f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x^2 \text{ et } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles en $(0, 0)$ selon tout vecteur. Montrer cependant que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 4.

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (\sin(x+y), 2xy^3, ye^x)$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ en un point (x_0, y_0), écrire la matrice jacobienne. Rappeler le lien entre dérivées partielles et différentielle, donner la valeur de $Df(x_0, y_0)(\vec{h})$ pour un vecteur $\vec{h} = (h_x, h_y, h_z)$ quelconque. Ecrire l'approximation de $f(x_0 + \vec{h})$ fournie par la différentielle, donner la version matricielle.

b) Mêmes questions pour la fonction définie par $g(a,b,c) = (2a + ab^2c^3, ae^b)$.

c) Comment obtient-on la matrice de l'application linéaires $D(f \circ g)(a,b,c)$ à partir de celles de Df et Dg ?

Exercice 5. Soit E un espace de Banach, et $U(E)$ l'ouvert des applications linéaires continues inversibles. Montrer que l'application $u \mapsto u^{-1}$ est différentiable, et calculer sa différentielle en un point u_0 quelconque (on pourra commencer par le cas $u_0 = \mathrm{Id}$, et utiliser les séries, puis utiliser l'application linéaire continue $h \mapsto u_0 h$, voir la feuille précédente).

Exercice 6.

a) Soit E un espace vectoriel normé, et k un entier (positif). On considère l'application Φ_k,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ u & \mapsto & u^k. \end{array}$$

Montrer qu'elle est différentiable, et calculer sa différentielle.

b) Montrer qu'on a

$$\Phi_k(u+h) = \Phi_k(u) + D\Phi_k(u)(h) + R(u,h)$$

avec $\|R(u,h)\| \leq 2^k \|h\|^2 \max(\|h\|, \|u\|)^{k-2}$.

En déduire que, lorsque E est un espace de Banach, l'application $\exp : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ est différentiable en tout point u (on pourra commencer par $u = \mathrm{Id}$).

Exercice 7. On considère l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

a) Calculer les dérivées partielles de cette application au point Id. En déduire la différentielle de l'application en ce point, et écrire l'approximation donnée par la différentielle.

b) Soit A_0 une matrice inversible. Déduire de la question précédente la différentielle de det en A_0.

c) Rappeler la formule donnant l'inverse à l'aide de la comatrice (ou matrice des cofacteurs).

d) Montrer que l'application det est de classe C^1.

e) Soit A_0 une matrice quelconque. En utilisant que l'ensemble des matrices inversibles est dense dans $M_n(\mathbb{R})$, en déduire la différentielle en A_0.

Exercice 8. Soit n un entier ≥ 1, on note $\|.\|_2$ la norme euclidienne standard sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On considère l'espace vectoriel E des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui sont de classe C^1. On munit E des deux normes définies de la façon suivante :

$$N_0(\gamma) = \mathrm{Sup}\{\|\gamma(t)\| \mid t \in [0,1]\}$$

et

$$N_1(\gamma) = N_0(\gamma) + N_0(\gamma').$$

Etant donnée $\gamma \in E$, on définit la longueur de γ par la formule

$$\mathrm{Long}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2 \, dt.$$

a) On munit ici E de la norme N_1. Soit $\gamma_0 \in E$, on suppose que $\gamma_0'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$, $\gamma \mapsto \mathrm{Long}(\gamma)$ est différentiable en γ_0 et calculer sa différentielle.

b) On munit maintenant E de la norme N_0. On veut montrer qu'avec cette norme, l'application $\gamma \mapsto \mathrm{Long}(\gamma)$ n'est même pas continue. Soit $\gamma_0 : t \mapsto (t, 0, \ldots, 0)$.

   i) Soit $\varepsilon > 0$ et M un entier. Calculer la longueur de la courbe

   $$\gamma_{\varepsilon,M} : t \mapsto \gamma_0(t) + \varepsilon(\cos(Mt), \sin(Mt)).$$

   Dessiner cette courbe pour ε très petit et M très grand.

   ii) Conclure en choisissant des valeurs de ε et de M.