TD n°6. Espaces vectoriels normés

1 Normes et équivalence

Exercice 1.

a) Montrer que sur $\mathbb{C}^n$ les trois applications suivantes sont des normes :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.

b) Montrer également qu'il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq a\|x\|_\infty$$

c) Définir des normes analogues sur l'espace $\mathbb{C}[X]$ des polynômes complexes. Sont-elles équivalentes ?

d) Même question pour l'espace $C([0,1], \mathbb{C})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.

Remarque. On peut pour tout $p \geq 1$ définir la norme $\| \cdot \|_p$ par :

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

avec une définition analogue pour des fonctions. Il est évident que cela est défini, potisif, et homogène. En revanche, montrer l'inégalité triangulaire n'est pas trivial (inégalité de Minkowski).

Exercice 2 (exponentielle matricielle)**.** On admet qu'il existe sur $M_n(\mathbb{C})$ des normes sous-multiplicatives, i.e. telles que pour toutes matrices M, N, on ait : $\|M \cdot N\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$.

a) Soit pour $M \in M_n(\mathbb{C})$ la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} M^k$. Montrer que cette série converge. On note $\exp M$ sa limite.

b) Montrer que $\exp M$ est un polynôme en M (on pourra considérer le sous-espace $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, M, M^2, \dots)$).

c) Conjecturer et démontrer les propriétés usuelles de l'exponentielle.

2 Topologie des evn

Exercice 3. Soit E un evn. Montrer que toute boule ouverte est homéomorphe à E. On pourra considérer l'application de E dans $B(a, r)$ qui à x associe $\frac{r(x-a)}{1+\|x-a\|}$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé.

a) Soit A un sous-ensemble de E. Montrer que $\overline{A} = \cap_{\varepsilon > 0} A + B(0, \varepsilon)$.

b) Montrer que l'adhérence $\overline{F}$ d'un sous-espace $F \leq E$ est un sous-espace.

c) En déduire que si F est un hyperplan de E, alors F est fermé ou dense.

d) Donner un cas où l'inclusion $F \subseteq \overline{F}$ est stricte.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel normé.

a) Montrer que si (X, d) est un espace métrique avec un sous-ensemble $A \subseteq X$ tel que (A, d_A) soit complet, alors A est fermé dans X.

b) En déduire qu'un sous-espace de dimension finie de E est toujours fermé.

c) Montrer qu'un espace de Banach n'est jamais de dimension $\aleph_0$. [Songer au théorème de Baire.]

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé dont la boule unité fermée est compacte. On va montrer que E est de dimension finie.

a) Montrer qu'il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n \in B_f(0,1)$ tels que

$$B_f(0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{2})$$

b) On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer que F est fermé dans E.
c) Montrer que $B_f(0,1) \subseteq F + B(0, \frac{1}{2})$.
d) Montrer que $B_f(0,1) \subseteq F + B(0, \frac{1}{4})$.
e) Montrer que $E = F$ est de dimension finie.

Exercice 7. Soient E un evn et $A \subseteq E$. Montrer que A et sa frontière ∂A ont même diamètre.

3 Espaces de Banach (ou pas)

Exercice 8. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues réelles sur $[0,1]$.
a) Rappeler pourquoi E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.
b) On admet que pour $p \geq 1$, $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int |f|^p}$ définit sur E une norme. Montrer que $(E, \|\cdot\|_p)$ n'est pas un espace de Banach. On pourra considérer la suite de fonctions données par

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} -1 & \text{si} & x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{si} & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} & x \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

Exercice 9. Soit E l'espace des fonctions $C^1([-1,1], \mathbb{R})$.
a) Montrer que $N(f) = \sup_{x \in [-1.1]} |f(x)|$ est une norme sur E.
b) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in C^1([-1,1], \mathbb{R})$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x - \frac{1}{n}\sin(nx) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

est une suite de Cauchy et trouver sa limite. En déduire que (E, N) n'est pas un espace de Banach.
c) Montrer qu'en revanche E muni de la norme :

$$N'(f) = \sup_{x \in [-1.1]} |f(x)| + \sup_{x \in [-1.1]} |f'(x)|$$

est un espace de Banach.

Exercice 10. Soit $E = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme sup.
a) On appelle support d'une fonction f l'adhérence de $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Soit $C_c(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues dont le support est compact. Montrer que $C_c(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
b) Montrer que l'adhérence de $C_c(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions qui tendent vers 0 à l'infini :

$$\{f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : f(x) \underset{\|x\| \to \infty}{\longrightarrow} 0\}$$

Exercice 11. Soit $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Posons :

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n) - y(n)|}{1 + |x(n) - y(n)|}, \ \forall x, y \in \ell^\infty$$

a) Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.
b) Soit $E = \ell^\infty$ le sous-espace de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ formé des suites bornées. Posons pour $x \in E$, $\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |x(n)|$. Montrer que c'est une norme sur E et écrire la distance associée.
c) Montrer que si E est un espace vectoriel et d une distance sur E, une condition nécessaire et suffisante pour que d provienne d'une norme est que, pour tout $x, y, z \in E$ et λ scalaire,

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y) \quad \text{et} \quad d(x+z, y+z) = d(x,y)$$

d) Sur ℓ^∞, la distance d provient-elle d'une norme ?
e) Soit dans (ℓ^∞, d) la suite (e_p) définie par $e_p(n) = 1$ ssi $n = p$, 0 sinon. Montrer que $\lim_{p \to \infty} e_p = 0$.
f) Utiliser la même suite dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ pour montrer que la boule unité de cet espace n'est pas compacte.
g) Comparer sur E les topologies définies par d et $\|\cdot\|_\infty$.