TD n°5. Connexité

Exercice 1. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles connexes ?

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \le 1\}, \quad \mathbb{R}^2\backslash\{0\}, \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 1\},$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\}, \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } y = 1 \text{ ou } y = -1\}$$

Exercice 2. Montrer qu'un espace métrique X est connexe si et seulement si toute fonction continue $X \to \{0,1\}$, où $\{0,1\}$ est muni de la distance discrète (cf. TD 2 exercice 5), est constante.

Exercice 3. Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si elle est convexe (et donc que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles).

Exercice 4. Soient X et Y deux espaces métriques. Un homéomorphisme $X \to Y$ est une bijection continue d'inverse continue (s'il existe un tel homéomorphismes, on dit que X et Y sont homéomorphes). Montrer que $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $[0,1[$, $[0,1]$ et $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ sont deux à deux non homéomorphes.
Classer les lettres de l'alphabet (en majuscule) par classe d'homéomorphisme.

Exercice 5. Soit $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$. Soit $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{S}$ tel que $f(z) = f(-z)$ (on pourra étudier le signe de la fonction $z \mapsto f(z) - f(-z)$).

Exercice 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Exercice 7. Quelles sont les composantes connexes de $\mathbb{Q}$? Quelles sont les composantes connexes de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que f' satisfait le principe des valeurs intermédiaires : l'image par f' d'un intervalle est un intervalle.

Exercice 9. Soit X et Y deux espaces métriques non vides.

a) Montrer que $X \times Y$ est connexe si et seulement si X et Y sont connexes.

b) Montrer que les composantes connexes de $X \times Y$ sont de la forme $A \times B$ où A et B sont des composantes connexes de X et de Y.

Exercice 10. Soit X un espace métrique et $A \subset X$ une partie dense de X. Montrer que si A est connexe, X est connexe.

Exercice 11. Soit $X := \{(x, \sin(\frac{1}{x}))\}_{x \in]0,\infty[} \cup \{(0,y)\}_{y \in [-1,1]} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Montrer que X est connexe (on pourra utiliser l'exercice précédent).

b) Soit $f = (f_1, f_2) : [0,1] \to X$ une application telle que f_1 soit continue, $f_1(0) = 0$ et $f_1(1) > 0$. Soit $x_0 = \sup f_1^{-1}(0)$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ $f_2([x_0, x_0+\epsilon]) = [-1,1]$. En déduire que f n'est pas continue et que X n'est pas connexe par arcs.

Exercice 12. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert non connexe de $M_n(\mathbb{R})$ (on pourra considérer l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \to R$). Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert connexe de $M_n(\mathbb{C})$ (on pourra commencer par montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures sans zéro sur la diagonale est connexe, puis utiliser la triangularisation).

Exercice 13. Montrer que $S_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \det(A) = 1\}$ est un fermé connexe de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14. Soit X un espace métrique compact. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés connexes. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est connexe.

Exercice 15. On dit qu'un espace métrique X est localement connexe si pour tout $x \in X$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert connexe U de $\mathring{B}(x,\epsilon)$ contenant x.

a) Montrer que $\mathbb{R}^n$ est localement connexe.

b) Montrer que si X est localement connexe, les composantes connexes de X sont ouvertes dans X.

c) Construire un fermé de $\mathbb{R}$ qui n'est pas localement connexe.

d) Construire un fermé de $\mathbb{R}^2$ qui est connexe mais n'est pas localement connexe.

Pour aller plus loin...

Exercice 16. Soient $A_n = \{(\frac{1}{n}, y, 0), 0 \leq y \leq 2n+1\}$, $B_n = \{(0, y, 0), 2n-1 \leq y \leq 2n+1\}$ et $C_n = \{(x, 2n, x(\frac{1}{n} - x)), 0 \leq x \leq \frac{1}{n}\}$ et $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup B_n \cup C_n) \subset \mathbb{R}^3$. Montrer que X est connexe mais n'est pas connexe par arc.

Exercice 17. Soit X un espace métrique compact et connexe. Montrer que l'ensemble des fermés non vides de X, muni comme dans l'exercice 13 de la feuille 4 de la distance

$$\delta(F_1, F_2) = \max(\sup_{x\in F_2} d(x, F_1), \sup_{x\in F_1} d(x, F_2)),$$

est connexe.

Exercice 18. Si (X, d) est un espace métrique, on munit l'espace $\Omega X := \{f \in \mathcal{C}([0,1], X) | f(0) = f(1)\}$ de la distance uniforme

$$d(f_1, f_2) = \sup_{x\in[0,1]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

a) Montrer que si $f : X \to Y$ est une application continue, l'application $\Omega f : \Omega X \to \Omega Y$ qui à g associe $f \circ g$ est continue (on pourra commencer par montrer que si K est un compact de X, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in K$ et x' in X, $d(x, x') \leq \eta \implies d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$).

b) Montrer que $\Omega\mathbb{R}^n$ est connexe.

c) On considère $X_0 = \mathbb{C}\backslash 0$. Montrer que X_0 est localement connexe.

d) Si $n \in \mathbb{Z}$, on définit $f_n \in \Omega X_0$ par $f_n(x) = e^{2i\pi nx}$. Montrer que pour toute composante connexe de X_0, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f_n \in X_0$ (on pourra montrer que l'application $\{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}) | f(0) = 0, f(1) \in \mathbb{Z}\} \to \Omega X_0$ qui à f associe $e^{2i\pi f}$ est un homéomorphisme).

e) En déduire que $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ne sont pas homéomorphes.