TD n°3. Complétude

1 Propriétés de base

Exercice 1. Vrai ou faux :

a) La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour la distance usuelle dans $\mathbb{R}$.
b) $]0,1[$, muni de la distance usuelle $d(x,y) = \mid x-y \mid$, est complet.
c) Puisque $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ tend vers 0, la suite $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour la distance usuelle dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit ℓ_∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la distance uniforme, définie de la façon suivante : pour $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans ℓ_∞, on pose

$$d(x,y) = \sup_{k\geq 0} |x_k - y_k|.$$

a) Pour tout entier $n \geq 0$, on pose
$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0 \dots\right).$$
Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente, et donner sa limite. [1]
b) Montrer que (ℓ_∞, d) est complet.
c) Soit c_0 le sous-espace de ℓ_∞ formé des suites qui convergent vers 0. Montrer que c_0 est fermé dans ℓ_∞, puis que c_0 est complet.
d) Soit c_{00} le sous-espace de ℓ_∞ formé des suites qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls. Est-il complet ?

Exercice 3. Soit (X,d) un espace métrique. Pour une suite (x_n) d'éléments de X, on s'intéresse à la propriété :

$$(*) : \quad \forall n \in \mathbb{N}\ d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}.$$

a) Montrer qu'une suite satisfaisant $(*)$ est de Cauchy.
b) Montrer que si (x_n) est de Cauchy, elle a une sous-suite satisfaisant $(*)$.
c) Montrer que E est complet ssi toute suite ayant $(*)$ converge.

Exercice 4. Sur $X =]0,+\infty[$, on considère la distance

$$\delta(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

a) Vérifier que δ est bien une distance.
b) Montrer que (X,δ) n'est pas complet (on pourra considérer une suite de réels tendant vers $+\infty$).
c) Montrer que la distance δ est topologiquement équivalente à la distance usuelle sur X, que l'on notera d. La distance δ est-elle fortement équivalente à d ?
d) Soit $Y =]0,1]$. Montrer que (Y,δ) est complet.
e) On dit que la complétude est une propriété métrique et non pas topologique. Pouvez-vous expliquer ?

Exercice 5. Théorème des fermés emboîtés Soient (X,d) un espace métrique. On considère la propriété suivante : toute suite $(F_n)_{n\geq 0}$ décroissante de fermés non-vides de X dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non-vide. Montrer que (X,d) est complet si et seulement si cette propriété est vérifiée.

Exercice 6. Soient (X,d), (Y,δ) deux espaces métriques ; on suppose (X,d) complet. Soit $f : X \to Y$ continue. Soit (F_n) une suite décroissante de fermés non-vides de X dont le diamètre tend vers 0. Montrer que $f(\bigcap_n F_n) = \bigcap_n f(F_n)$. Donner un contre-exemple lorsque X n'est pas complet.

Exercice 7. Montrer que toute série réelle absolument convergente est convergente. *Aide : montrer que la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy.*

1. Il s'agit d'une suite d'éléments de ℓ_∞, c'est-à-dire une suite de suites ! Il faudra faire attention, dans la suite de l'exercice, à ne pas confondre les suites d'éléments de ℓ_∞ et les suites de réels ; on pourra par exemple utiliser l'indice n pour les premières, et k pour les secondes.

2 Théorème de prolongement

Exercice 8. *Dans cet exercice, on propose une construction de l'intégrale de Riemann, qui marche notamment pour les fonctions continues (cette construction très rapide est loin d'être aussi générale que l'intégrale de Lebesgue étudiée en cours d'intégration).* On se place dans l'espace métrique E des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont bornées, muni de la distance uniforme $d(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$. Soit F le sous-ensemble des fonctions *en escalier* (on dit aussi *constantes par morceaux*) : une fonction f est dans F s'il existe un entier $\ell > 0$, un découpage $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_\ell = 1$ de l'intervalle, et des valeurs $y_0, \ldots, y_{\ell-1}$ telles que

$$\begin{cases} f(x) = y_0 \text{ pour tout } x \in]a_0, a_1[, \\ f(x) = y_1 \text{ pour tout } x \in]a_1, a_2[, \\ \qquad \cdots \end{cases}$$

a) Donner une formule pour définir l'intégrale d'une fonction f constante par morceaux.

b) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I} : F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)dt \end{array}$$

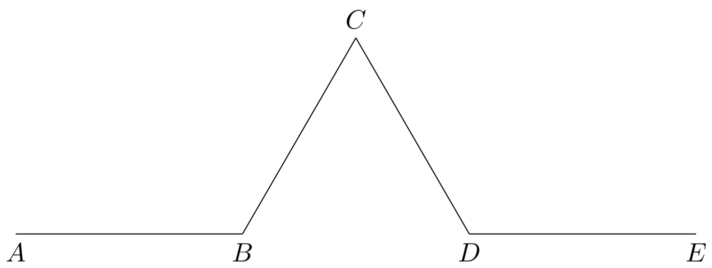
définie par cette formule est 1-lipschitzienne, et en particulier uniformément continue.

c) En déduire une construction de l'intégrale pour toutes les fonctions f qui appartiennent à l'adhérence de la partie F dans l'espace E.

d) Montrer que toute fonction continue peut-être uniformément approchée par une fonction constante par morceaux (on utilisera la continuité uniforme). Autrement dit, l'adhérence de F contient l'ensemble des fonctions continues.

Exercice 9. Le théorème de prolongement demande de la continuité uniforme. Pouvez-vous donner un exemple de fonction continue, définie sur $\mathbb{Q}$, qui n'admet pas de prolongement continu à $\mathbb{R}$?

3 Théorème de point fixe de Picard



L'exercice suivant propose une construction de la courbe "en flocon de neige", appelée aussi courbe de Von Koch. Il s'agit d'un exemple de courbe fractale, qui n'admet pas de tangentes.

Exercice 10. On considère l'ensemble X des courbes du plan qui joignent les points $A = (0,0)$ et $E = (1,0)$ (voir le dessin) :

$$X = \{\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \mid \gamma(0) = A, \gamma(1) = E, \gamma \text{ continue}\}.$$

Cet ensemble est muni de la distance uniforme,

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t\in[0,1]} d_{\mathbb{R}^2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

où $d_{\mathbb{R}^2}$ représente la distance euclidienne sur le plan.

a) Montrer, à l'aide du cours, que (X, d) est complet.

Soit h l'homothétie du plan de centre $(0,0)$ et de rapport $1/3$. On remarque que h envoie le segment $[AE]$ sur le segment $[AB]$ (voir le dessin), et multiplie les distances par $1/3$: autrement dit, pour tous points M, N du plan, on a

$$d_{\mathbb{R}^2}(h(M), h(N)) = \frac{1}{3} d_{\mathbb{R}^2}(M, N).$$

On considère alors quatre transformations du plan, H_1, H_2, H_3, H_4, vérifiant les propriétés suivantes.

- $H_1 = h$,
- H_2 envoie le segment $[AE]$ sur le segment $[BC]$,
- H_3 envoie le segment $[AE]$ sur le segment $[CD]$,
- H_4 envoie le segment $[AE]$ sur le segment $[DE]$,
- H_1, H_2, H_3, H_4 multiplient les distances par $1/3$.

b) En utilisant la transformation h et des isométries (translations et rotations), construire H_2, H_3 et H_4 ayant les propriétés voulues.

On considère maintenant la transformation $T : X \to X$ construite de la façon suivante : pour toute courbe $\gamma \in X$, la courbe $\gamma' = T(\gamma)$ est définie par

$$\gamma'(t) = \begin{cases} H_1(\gamma(4t)) & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ H_2(\gamma(4t-1)) & \text{pour } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ H_3(\gamma(4t-2)) & \text{pour } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ H_4(\gamma(4t-3)) & \text{pour } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}.$$

c) Soit γ_0 l'élément de X défini par $\gamma_0(t) = (t, 0)$. Dessiner γ_0 et $\gamma_1 = T(\gamma_0)$ (on pourra commencer par déterminer $\gamma_1(t)$ pour les valeurs $t = 0{,}1/4,\ 1/2,\ 3/4,\ 1$).

d) Montrer que T est une transformation contractante, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'hypothèse du théorème de point fixe de Picard, avec $k = 1/3$.

e) Expliquer pourquoi il existe une unique courbe γ_∞ telle que $T(\gamma_\infty) = \gamma_\infty$.

f) Dessiner (rapidement) $\gamma_2 = T \circ T(\gamma_0)$, $\gamma_3 = T \circ T \circ T(\gamma_0)$. Donner une majoration de la distance $d(\gamma_\infty, \gamma_3)$.

Exercice 11. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes : f est de classe C^1, sa dérivée est strictement comprise entre -1 et 1, et le graphe de f ne rencontre pas la droite d'équation $x = y$.

a) Dessiner l'allure du graphe d'une telle fonction.

b) Montrer que f n'a pas de point fixe.

c) Montrer que f est contractante : pour tous réels $x \neq y$, on a $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

d) f est-elle k-lipschitzienne pour un réel $k \in]0, 1[$?

4 Pour aller plus loin...

Dans les exercices qui suivent, on pourra utiliser le théorème de Baire : *dans un espace métrique complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Exercice 12. Traduire le théorème de Baire en termes d'union de fermés. En déduire qu'on ne peut pas recouvrir le plan, ni même l'espace $\mathbb{R}^n$, par une famille dénombrable de droites.

Exercice 13. Un nombre réel z est appelé *nombre de Liouville* s'il est irrationnel, et possède la propriété que pour tout entier $n > 0$ il existe des entiers p et q tels que $q > 1$ et

$$|z - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}.$$

a) Montrer que le nombre

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^{k!}}$$

est un nombre de Liouville.

b) Écrire l'ensemble $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels comme une intersection dénombrable d'ouverts denses.

c) Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}$ des nombres de Liouville est une intersection dénombrable d'ouverts denses.

d) En déduire que tout intervalle contient une infinité de nombres de Liouville.

Exercice 14. Démontrer le théorème de Baire. ***Aide*** *Etre dense, c'est rencontrer tout ouvert non vide. Soit (U_n) une suite d'ouverts denses, et V un ouvert. Il existe une boule fermée B_1 incluse dans $U_1 \cap V$. Il existe une boule fermée B_2 incluse dans $U_2 \cap B_1$. Et ainsi de suite... Compléter cette preuve à l'aide du théorème des fermés emboîtés (exercice 5).*

Exercice 15. Soit (X, d) un espace métrique. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de X. Pour tout fermé F de X et tout $\varepsilon > 0$ on appelle ε-voisinage de F l'ensemble

$$V_\varepsilon(F) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in F} \mathring{B}(x, \varepsilon).$$

Pour $F, F' \in \mathcal{F}$, on pose

$$\delta(F, F') = \inf\{\varepsilon > 0 \mid F \subset V_\varepsilon(F') \text{ et } F' \subset V_\varepsilon(F)\}.$$

a) Faire un dessin illustrant la définition d'un ε-voisinage.

b) Montrer que δ est une distance sur $\mathcal{F}$.

c) On suppose que (X, d) est complet. Montrer que $(\mathcal{F}, \delta)$ est complet.