TD n°2. Espaces métriques

1 Quelques métriques

Exercice 1. On considère les distances suivantes sur $\mathbb{R}^2$:
– $d_2((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$
– $d_1((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = |b_1-a_1|+|b_2-a_2|$
– $d_\infty((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \max\{|b_1-a_1|,|b_2-a_2|\}$

a) Pour chacune, tracer la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

b) Généraliser les définitions à $\mathbb{R}^n$ et vérifier qu'il s'agit bien de distances (inutile de tracer les boules).

Exercice 2. Soit $X = C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les fonctions suivantes sont des distances :

a) $d_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f-g)^2}$ b) $d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|$ c) $d_\infty(f,g) = \max_{[0,1]} |f-g|$

Exercice 3 (distances produits)**.** Soient (X,d) et (X',d') deux espaces métriques. Sur $X\times X'$ on définit les fonctions suivantes :
– $\delta_2((x_1,x_1'),(x_2,x_2')) = \sqrt{d^2(x_1,x_2)+d'^2(x_1',x_2')}$
– $\delta_1((x_1,x_1'),(x_2,x_2')) = d(x_1,x_2)+d'(x_1',x_2')$
– $\delta_\infty((x_1,x_1'),(x_2,x_2')) = \max(d(x_1,x_2),d'(x_1',x_2'))$

a) Montrer qu'il s'agit de trois distances.

b) Montrer que l'on a $\delta_\infty \leq \delta_2 \leq \delta_1 \leq 2\delta_\infty$.
Ces distances sont donc fortement équivalentes. On appelle topologie produit la topologie associée.

c) Montrer que si U, U' sont des ouverts de X, X', alors $U\times U'$ (“pavé ouvert”) est un ouvert de $X\times X'$. Montrer par un exemple qu'il existe des ouverts de $X\times X'$ qui ne sont pas des pavés ouverts. Montrer que tout ouvert est union de pavés ouverts.

Exercice 4 (distance induite)**.** Soient (X,d) un espace métrique et $A\subseteq X$ un sous-ensemble.

a) Montrer que la restriction de d en $d_{|A} : A\times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définit sur A une distance, appelée distance induite.

b) On considère $X = [0,1[$ muni de la métrique induite par celle de $\mathbb{R}$. $A = [\frac{1}{2},1[$ est-il ouvert ? fermé ?

Exercice 5 (distance discrète)**.** Soit X un ensemble. On considère la fonction $\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que δ est une distance et représenter les boules ouvertes et les boules fermées de rayon $\frac{1}{2}$, 1, et 2.

Exercice 6. Soient (X,d) un espace métrique et $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction croissante, s'annulant en 0 et en 0 seulement, et sous-additive ($\varphi(x+y)\leq\varphi(x)+\varphi(y)$).

a) Montrer que $\delta(x,y) = \varphi(d(x,y))$ est une distance sur X.

b) Montrer que si φ est continue en 0, alors d et δ sont topologiquement équivalentes. Donner un exemple où ne sont pas équivalentes.

c) Donner un exemple où φ n'est pas continue en 0, et où d et δ ne sont pas topologiquement équivalentes.

2 Ouverts, fermés

Exercice 7. Montrer que dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle : $\mathbb{N}$ est fermé mais pas ouvert, $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé. On démontrera chaque point deux fois : une fois par des boules, une fois par des suites.

Exercice 8.

a) Rappeler ce que signifie “A est dense dans X”, en termes de fermés, et en termes d'ouverts.

b) Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9 (vrai ou faux ?)**.** Si la proposition suggérée est vraie, la démontrer. Si elle est fausse, la réfuter. Dans un espace métrique…

a) toute intersection de boules ouvertes est une boule ouverte.
b) toute intersection de boules ouvertes est un ouvert.
c) toute union finie de boules fermées est un fermé.
d) Tout ouvert est union de boules ouvertes.

Exercice 10 (intérieur, adhérence, frontière)**.** Soient (X, d) un espace métrique et $A, B \subseteq X$.

a) Montrer que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A, et l'union de tous les ouverts inclus dans A.
b) Énoncer et démontrer un analogue pour l'adhérence $\overline{A}$ de A.
c) Soit $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ (frontière de A). Montrer que ∂A est un fermé et que $\overline{A}$ est l'union disjointe de $\mathring{A}$ et ∂A.
d) Déterminer dans $\mathbb{R}$ usuel l'intérieur, l'adhérence, et la frontière de $[0, 1[$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
e) Déterminer dans $\mathbb{R}^2$ usuel l'intérieur, l'adhérence, et la frontière de $[0, 1[\times\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
f) Démontrer en toute généralité les formules suivantes :

i) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ iii) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ iv) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

v) $X \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{X \setminus A}}$ vi) $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$ vii) $\overset{\circ}{\widehat{A \setminus B}} = \mathring{A} \setminus \overline{B}$ viii) $\partial\partial\partial A = \partial\partial A$

Pour (iii) et (iv), donner un contre-exemple à l'égalité.

Exercice 11. Cet exercice vous apprendra à faire attention aux notations. On note $B_o(a, r)$ la boule ouverte de centre a, rayon r ; $B_f(a, r)$ la boule fermée.

a) Montrer que $\overline{B_o(a, r)} \subseteq B_f(a, r)$ et $B_o(a, r) \subseteq \overset{\circ}{\widehat{B_f(a, r)}}$.
b) En prenant l'exemple de la topologie discrète (voir Exercice 5), montrer qu'on n'a pas forcément égalité.

Dans le cas des espaces vectoriels normés (définis plus tard), on aura toutefois égalité. Mais prudence !

3 Convergence et continuité

Exercice 12. Soient (X, d) un espace métrique, $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in X$.

a) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   i) pour toute boule ouverte B de centre ℓ, à partir d'un certain rang, la suite est dans B
   ii) pour tout ouvert U contenant ℓ, à partir d'un certain rang, la suite est dans U
   iii) pour tout voisinage V de ℓ, si l'on attend assez longtemps, à partir d'un certain rang, la suite est dans V.

   On dit que la suite converge vers ℓ.
b) Montrer que si la limite existe, elle est unique.

Exercice 13. On rappelle que a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) s'il existe une suite extraite $u_{\varphi(n)}$ qui converge vers a. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est $\cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{u_k : k \geq n\}}$.

Exercice 14. Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une fonction.

a) Montrer que sont équivalentes les propriétés suivantes :
   i) $(\forall x_0 \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)$
   ii) l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert
   iii) l'image réciproque d'un fermé est un fermé
   iv) pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge, la suite $(f(x_n)) \in Y^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(\lim x_n)$
   v) pour tout sous-ensemble $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

   Si l'une de ces propriétés est satisfaite, on dit que f est continue.
b) Trouver une fonction continue et un ouvert $O \subseteq X$ tels que $f(O) \subseteq Y$ ne soit pas ouvert. Même question avec un fermé.

Exercice 15. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une fonction. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f peut s'écrire comme intersection dénombrable d'une suite décroissante d'ouverts.

Exercice 16 (distance à un sous-ensemble)**.** Soient (X, d) un espace métrique, $A \subseteq X$ un sous-ensemble. On pose $d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

a) Montrer que cela a toujours un sens. Donner un exemple où la borne inférieure n'est pas atteinte.

b) Montrer que d_A est une fonction 1-lipschitzienne (donc continue).

c) Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

d) Soient F_1, F_2 fermés *disjoints*. Montrer qu'il existe des ouverts *disjoints* U_1, U_2 tels que $F_i \subseteq U_i$. (On pourra considérer $\frac{d_{F_1}}{d_{F_1}+d_{F_2}}$.)

e) Donner un exemple de fermés disjoints $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tels que $\inf\{d(x, y) : (x, y) \in F_1 \times F_2\} = 0$.

Exercice 17 (diamètre d'un sous-ensemble)**.** Soient (X, d) un espace métrique et $A \subseteq X$ un sous-ensemble. Définir le diamètre de A. Montrer que A et sa frontière ont toujours même diamètre.

Exercice 18.

a) Montrer qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.

b) Même question avec des fonctions uniformément continues.

c) Montrer que c'est faux pour une limite simple.

4 Pour aller plus loin...

Exercice 19. Montrer que le cardinal de l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est celui de $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Soit $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ sans point isolé. Montrer que A est de cardinal continu.