TD n°12. Exremas liés et hypersurface

1 Hypersurfaces

Exercice 1. Soient $G : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et $c \in \mathbb{R}$. Donner une condition suffisante pour que l'ensemble $G^{-1}(c)$ soit une hypersurface de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. a) Montrer que la sphère $S = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2\}$, avec $a > 0$, est une hypersurface de $\mathbb{R}^n$. Expliciter son plan tangent en tout point $(x_1, \cdots, x_n) \in S$.

b) Montrer que $Sl(n) = \{M \in M_n(\mathbb{R})/detM = 1\}$ est une hypersurface.Quel est son plan tangent en la matrice I.

Exercice 3. On considére le cône $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x^2 + y^2 = z^2\}$

a) Montrer que C privé de l'origine est une hypersurface, calculer son plan vectoriel tangent.

b) Montrer que C n'est pas une hypersurface. (Aide : montrer que l'ensemble des vecteurs "tangents" en 0 n'est pas inclus dans un hyperplan vectoriel).

Exercice 4. Montrer que l'ensemble de $\mathbb{R}^3$

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : xy + xz + 2x + 2yz = 0\}$$

est une hypersurface de $\mathbb{R}^3$ au voisinage de 0. Donner l'équation du plan tangent à cette hypersurface.

2 Extrema

Exercice 5. Soient α, β et γ trois nombres réels. Déterminer le maximum et le minimum sur la sphère euclidienne S de $\mathbb{R}^3$ de la fonction

$$f : (x, y, z) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Exercice 6. a) Etablir l'inégalité

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

pour tous $x_i \geq 0$, et tous $\alpha_i > 0$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Quand a-t-on égalité ? On pourra rechercher le maximum du membre de gauche, fonction des x_i, sur l'ensemble défini par $\sum_i^n \alpha_i x_i = 1$.

b) En déduire comment obtenir un parallélépipède rectangle d'aire minimum et de volume donné.

Exercice 7. Soit A une matrice symétrique réel d'ordre n. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Montrer que le réel

$$\lambda = \sup_{\|x\|=1} Ax.x,$$

est une valeur propre de A. On utilisera la méthode des multiplicateurs de lagrange.

Exercice 8. Soit α positif. Déterminer le maximum et le minimun de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto xyz$ sur l'ensemble

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = \alpha \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Exercice 9. Soit $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + 2y^2 + z^2 = 5 \text{ et } x^2 + y^2 - 2z = 0\}$, ϕ la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + z^2 - 5, x^2 + y^2 - 2z)$, et f la fonction $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = y + z$.

a) Montrer que P est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer qu'en tout point m de P, le rang de la différentielle de ϕ est 2.

c) Trouver tous les points d'extrema de f et préciser leur nature.