TD n°11. Différentielle seconde et extrema libres

1 Les conditions d'extrémalité

Exercice 1. Soit f une fonction d'un espace normé E dans $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in E$.

a) Démontrer que si f est différentiable en x_0 et possède en x_0 un extremum local, alors la différentielle $Df(x_0)$ est nulle.

b) Démontrer que si f admet une différentielle seconde en x_0 et admet en x_0 un minimum local, alors $Df(x_0) = 0$ et $D^2f(x_0)$ est une forme bilinéaire positive, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$D^2f(x_0)(h,h) \geq 0, \qquad \forall h \in E.$$

c) Que peut-on dire avec les mêmes hypothèses sur f si x_0 est un maximum local ?

d) Que peut-on dire sur $D^2f(x_0)$ si x_0 est un extremum local *strict* ?

Exercice 2. Existence de points critiques par compacité. Soit E un espace normé de dimension finie, soit B sa boule unité ouverte.

a) Soit f une fonction continue de $\overline{B}$ dans $\mathbb{R}$, constante sur la sphère unité S de E. On suppose que f est différentiable dans B. Démontrer que l'équation

$$Df(x) = 0$$

admet une solution dans B. Ce résultat généralise le théorème de Rolle au cas où l'espace de départ est un espace vectoriel normé de dimension finie.

b) Soit f une fonction continue de $\overline{B}$ dans $\mathbb{R}$ et on suppose qu'il existe une forme linéaire α et un réel a tels que pour tout $x \in S$, $f(x) = a + \alpha(x)$. On suppose que f est différentiable dans B. Démontrer que l'équation

$$Df(x) = \alpha$$

admet une solution dans B. Ce résultat généralise l'égalité des accroissements finis au cas où l'espace de départ est un espace vectoriel normé de dimension finie, expliquer pourquoi.

c) Peut-on généraliser le théorème de Rolle au cas où l'espace d'arrivée est de dimension plus grande que 1 ?

Exercice 3. Soit E un espace normé de dimension finie et soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ deux fois différentiable en $x_0 \in E$. On suppose que $Df(x_0) = 0$ et que $D^2f(x_0)$ est définie positive, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$D^2f(x_0)(h,h) > 0, \qquad \forall h \in E.$$

Démontrer que x_0 est un minimum local strict. Que peut-on dire si $D^2f(x_0)$ est définie négative ?

Exercice 4. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2.$$

a) Tracer l'allure du graphe de f.

b) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses matrices jacobiennes et hessiennes en tout point.

c) Déterminer les points a de $\mathbb{R}^2$ tels que $Df(a) = 0$ et étudier leur nature (minimum, maximum, autre...).

d) Tracer les courbes de niveau de f, c'est-à-dire les ensembles $N_c = f^{-1}(\{c\})$ pour $c \in \mathbb{R}$. Préciser le rapport entre ces courbes et le graphe de f et positionner les points a. Discuter.

e) Mêmes questions avec la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \cos x + y^2$$

f) Mêmes questions avec l'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x,y) = x^2 + y^3$$

2 Convexité

Exercice 5. On dit qu'une fonction f d'un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est *convexe* si pour tout couple $(x,y) \in U^2$

$$f\big((1-t)x+ty\big) \leq (1-t)f(x)+tf(y), \qquad \forall t \in [0,1],$$

et qu'elle est strictement convexe lorsque pour tout couple $(x,y) \in U^2$ avec $x \neq y$,

$$f\big((1-t)x+ty\big) < (1-t)f(x)+tf(y), \qquad \forall t \in]0,1[.$$

a) On suppose f différentiable sur U. Montrer qu'elle est convexe si et seulement si

$$f(y)-f(x) \geq Df(x)(y-x), \qquad \forall (x,y) \in U^2,$$

et qu'elle est strictement convexe si et seulement si

$$f(y)-f(x) > Df(x)(y-x), \qquad \forall (x,y) \in U^2,\ x \neq y.$$

b) Lorsque $n=1$, que peut-on dire de U ? Montrer que si f dérivable sur U, f est convexe si et seulement si f' est croissante et que f est strictement convexe si et seulement si f' est strictement croissante.

c) On suppose de nouveau n quelconque. Soit f une fonction convexe de U dans $\mathbb{R}$. Montrer que si a et b sont des minima locaux de f, alors $f(a)=f(b)$. En déduire qu'un minimum local de f est aussi un minimum global. Que peut-on dire de l'ensemble sur lequel f atteint sa valeur minimale ?

d) Donner des exemples de fonctions convexes qui ne sont pas inférieurement bornées et des exemples de fonctions convexes inférieurement bornées qui n'atteignent pas leur valeur minimale.

e) On suppose que f est différentiable dans U et que Df est nulle en un point $a \in U$. Montrer que f admet en a un minimum global sur U.

f) Montrer que si f est deux fois différentiable sur U, f est convexe si et seulement si D^2f est une forme bilinéaire positive et que f est strictement convexe si f est définie positive.

Exercice 6. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *coercive* lorsque pour tout $A \in \mathbb{R}^+$, il existe $B \in \mathbb{R}^+$ tel que si $\|x\| \geq B$, alors $f(x) \geq A$ (vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de la norme).

a) Démontrer que si f est une fonction continue et coercive de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, f admet un minimum global.

b) On considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, dont la différentielle seconde en tout point est définie positive, et telle que pour toute forme linéaire α sur $\mathbb{R}^n$, $f-\alpha$ soit coercive (condition de superlinéarité). Donner des exemples de telles fonctions. Démontrer que l'application différentielle $Df : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ est surjective.

c) Démontrer que Df est injective.

d) Démontrer que Df est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $(\mathbb{R}^n)^*$.

3 Lemme de Morse et applications

Exercice 7. Soit f une fonction de classe C^3 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0,0)=0$ et $Df(0,0)=0$.

a) Démontrer que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \alpha(x,y)x^2 + 2\beta(x,y)xy + \gamma(x,y)y^2,$$

avec

$$\alpha(x,y) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx,ty)\,dt, \quad \beta(x,y) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx,ty)\,dt, \quad \gamma(x,y) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx,ty)\,dt,$$

(voir aussi l'exercice 7 de la feuille 9).

b) Déterminer $\alpha(0,0)$, $\beta(0,0)$, $\gamma(0,0)$.

c) Démontrer que les fonctions α, β, γ ainsi définies sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

d) On suppose que $D^2 f(0,0)$ est définie positive. Montrer qu'il existe une boule $B(0,\rho)$, avec $\rho > 0$, sur laquelle les fonctions α et $\alpha\gamma - \beta^2$ sont strictement positives. Vérifier que dans cette boule

$$f(x,y) = \alpha(x,y)\Big(x + \frac{\beta(x,y)}{\alpha(x,y)}y\Big)^2 + \frac{\alpha(x,y)\gamma(x,y) - \beta(x,y)^2}{\alpha(x,y)}y^2.$$

e) Pour $(x,y) \in B(0,\rho)$, on pose

$$u(x,y) = \sqrt{\alpha(x,y)}\Big(x + \frac{\beta(x,y)}{\alpha(x,y)}y\Big), \qquad v(x,y) = \sqrt{\frac{\alpha(x,y)\gamma(x,y) - \beta(x,y)^2}{\alpha(x,y)}}y$$

Démontrer que u et v sont de classe C^1 sur $B(0,\rho)$.

f) Démontrer que les hypothèses du théorème d'inversion locale sont vérifiées en $(0,0)$ pour l'application $\Phi : B(0,\rho) \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big).$$

En déduire l'existence de voisinages ouverts O et $\mathscr{O}$ de $(0,0)$ tels que Φ soit un C^1 difféomorphisme de O sur $\mathscr{O}$.

g) Démontrer que si $\Psi = \big(\Phi_{|O}\big)^{-1}$ et si $(u,v) \in \mathscr{O}$

$$f \circ \Psi(u,v) = u^2 + v^2.$$

h) Montrer que les courbes de niveau de f au voisinage de $(0,0)$ sont les images de cercles par un difféomorphisme. Interpréter l'exercice 4 de ce point de vue.

i) On suppose maintenant que $D^2 f(0,0)$ est non dégénérée et de signature $+-$ (c'est-à-dire que la matrice hessienne possède une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative). En modifiant le raisonnement précédent, montrer l'existence voisinages ouverts O et $\mathscr{O}$ de $(0,0)$ et d'un difféomorphisme Ψ de $\mathscr{O}$ sur O tels que si $(u,v) \in \mathscr{O}$

$$f \circ \Psi(u,v) = u^2 - v^2.$$

j) Montrer que les courbes de niveau de f au voisinage de $(0,0)$ sont les "images d'arcs d'hyperboles" par un difféomorphisme. Interpréter l'exercice 4 de ce point de vue.