TD n°10. Inversion locale et fonctions implicites

1 Inversion locale

Exercice 1. Montrer que l'application $\Phi :(r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de l'ouvert $]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$ sur le plan fendu $\mathbb{R}^2 \setminus D$, où D est la demi-droite $x \leq 0$, $y = 0$.

Exercice 2. Soient E un espace de Banach et $\Phi : E \to \mathcal{L}(E)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\Phi(0) = I$. Montrer que l'application $x \mapsto \Phi(x)\cdot x$ est un difféomorphisme au voisinage de 0.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f est injective et qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout x et tout h de $\mathbb{R}^n$, on ait

$$\|Df(x)\cdot h\| \geq \delta\|h\|.$$

a) Montrer que pour tout x, la différentielle $Df(x)$ est inversible et que $\|(Df(x))^{-1}\| \leq \frac{1}{\delta}$.

b) Montrer que f est ouverte (c'est-à-dire $f(V)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$, pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^n$).

Exercice 4. Soit $F : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ qui à X associe X^2.

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $DF(X)$ pour tout X de $M_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe une fonction différentiable G, définie dans un voisinage V de la matrice identité I_n telle que $G(X)^2 = X$ pour tout $X \in V$.

c) On suppose que $n = 2$ et soit $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $DF(H)\cdot J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension fini et $f : E \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $\phi = f - Id$.

a) On suppose que $\|Df(x)\| < 1$ pour tout $x \in E$. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E sur son image.

b) Soit $g : E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que g est k-lipschitzienne si et seulement si $\|Dg(x)\| \leq k$ pour tout $x \in E$.

c) On suppose que ϕ est k-lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E dans lui-même. On pourra appliquer le théorème du point fixe à une fonction convenablement choisie.

d) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $|g'(t)| \leq k < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que les applications

$$f(x,y) = (x + g(y), y + g(x)) \quad \text{et} \quad h(x,y) = (y + g(x), x + g(y))$$

définissent des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

2 Fonctions implicites

Exercice 6. Montrer que le système d'équation

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t = 2 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

a une unique solution $(x,y,z) = f(t)$ proche de $(0,-1,1)$, pour t assez petit. Déterminer la dérivée de f en 0.

Exercice 7. Montrer que l'ensemble

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0\}$$

est, au voisinage de $(0,1)$, le graphe d'une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\psi(0) = 1$. Donner le développement limité de ψ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 8. Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$.

a) Etant donné $(a_0, b_0, c_0, X_0) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P_0(X_0) = 0$, où $P_0(X) = X^3 + a_0X^2 + b_0X + c_0$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un voisinage ouvert U de (a_0, b_0, c_0) et une application $X : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, tels que

$$X(a_0, b_0, c_0) = X_0 \quad \text{et} \quad P(X(a,b,c)) = 0 \quad \forall (a,b,c) \in U.$$

b) Soit $\Omega = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 |\ P(X) \text{ a trois racines réelles distinctes}\}$

i) Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

ii) Montrer que $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}^3; (a,b,c) \mapsto (x,y,z)$ où $x < y < z$ sont les racines (distinctes) de P est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

3 Pour aller plus loin...

Exercice 9. Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ définie au voisinage de 0 et $a > 0$. On pose $E_a = \mathcal{C}^0([-a,a]; \mathbb{R}^n)$ muni de la norme de la convergence uniforme $\| \cdot \|_a$.

a) On introduit $F : E_a \to E_a$ définie par

$$F(x)(t) = x(t) - \int_0^t f(x(u))du$$

au voisinage de 0. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$. On pourrra introduire $L_x(h)(t)$ donné par

$$L_x(h)(t) = \int_0^t Df(x(u)) \cdot h(u)du$$

et majorer

$$\|F(x+h) - F(x) - h + L_x(u)\|_a.$$

b) En déduire que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

possède une solution et une seule sur $[-a,a]$, pour x_0 et a assez petit, qui est de classe $\mathcal{C}^1$. On pourra introduire

$$y_{x_0}(t) = \begin{cases} x_0 \quad \text{si} \quad |t| \leq \alpha \\ x_0 - (t-\alpha)f(0) \text{ si } \alpha < t \leq a \\ x_0 - (t+\alpha)f(0) \text{ si } -a \leq t < -\alpha, \end{cases}$$

pour α et x_0 assez petits.

Exercice 10. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ prolongeable par continuité à la frontière ∂U de U, sur laquelle on suppose qu'elle ne s'annule pas. On suppose que 0 est une valeur régulière de f c'est-à-dire que $Df(x)$ est inversible en tout x tel que $f(x) = 0$.

a) Montrer que $f^{-1}(0)$ est une partie finie de U.

b) Montrer qu'il existe un voisinage de 0 constitué de valeurs régulières de f.

c) Monter que le degré topologique de f en y

$$\sum_{f(x)=y} \text{sign}(\det Df(x))$$

est constant au voisinage de 0.