TD n°1. Les réels

1 Borne inférieure et supérieure

Exercice 1.

a) Soit $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ une partie bornée. Montrer que $\sup_{(a_1,a_2)\in A^2} |a_2 - a_1| = \sup A - \inf A$.

b) Soient $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties bornées. On note $A + B = \{a + b : (a, b) \in A \times B\}$. Montrer que $A + B$ est bornée, puis que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ et $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 2 (droite numérique achevée)**.** On ordonne $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R})(-\infty < x < +\infty)$.

a) Montrer que toute partie non-vide de $\overline{\mathbb{R}}$ a une borne supérieure et une borne inférieure.

b) Montrer que toute suite monotone (i.e., croissante ou décroissante) de $\overline{\mathbb{R}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.

c) Montrer que l'on ne peut pas étendre la multiplication à $\overline{\mathbb{R}}$ de façon continue.

Exercice 3 ($\liminf$ et $\limsup$)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ une suite de réels. On définit pour $n \in \mathbb{N}$:

$$i_n = \inf\{a_k : k \geq n\}, \quad s_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$$

Ceci définit deux suites $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\overline{\mathbb{R}}$ (voir Exercice 2).

a) Montrer que (i_n) est croissante, que (s_n) est décroissante, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_n \leq a_n \leq s_n$.

b) En déduire que (i_n) et (s_n) convergent vers deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ notés respectivement $\liminf a_n$ et $\limsup a_n$, et que l'on a $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

c) On suppose que (a_n) converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers une limite ℓ. Montrer que (i_n) et (s_n) tendent vers ℓ (en d'autres termes, montrer que $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$).

d) Montrer la réciproque : si $\liminf a_n = \limsup a_n = \ell$, alors (a_n) converge (dans $\overline{\mathbb{R}}$) vers ℓ.

Exercice 4 (parties convexes de $\mathbb{R}$)**.** Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit convexe si :

$$(\forall (a_1, a_2) \in A^2)(\forall x \in \mathbb{R})(a_1 \leq x \leq a_2 \Rightarrow x \in A)$$

a) Montrer que tout intervalle est convexe.
On démontre à présent la réciproque. Soit A un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}$. On suppose $A \neq \emptyset$.

b) On suppose A borné, et que $\inf A$ et $\sup A$ sont dans A. Montrer que $A = [\inf A, \sup A]$.

c) On suppose A borné, et que ni $\inf A$ ni $\sup A$ n'est dans A. Montrer que $A =]\inf A, \sup A[$.

d) On suppose A ni majoré ni minoré. Montrer que $A = \mathbb{R}$.

e) Écrire un plan couvrant tous les cas, et se convaincre que du résultat.

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont donc exactement les intervalles.

2 Axiomatique de $\mathbb{R}$

Exercice 5 (autour de l'axiome d'Archimède)**.** Montrer que les propriétés suivantes de $\mathbb{R}$ sont équivalentes (démontrer qu'elles s'impliquent mutuellement sans dire "elles sont toutes vraies") :

– $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(x < n)$;
– $(\forall x \in \mathbb{R}_{>0})(\exists n \in \mathbb{N}_{>0})(\frac{1}{n} < x)$;
– $(\forall x \in \mathbb{R}_{>0})(\forall y \in \mathbb{R}_{\geq 0})(\exists n \in \mathbb{N})(nx \geq y)$;
– $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})((x < y) \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q})(x < q < y))$.

On dit que $\mathbb{R}$ est archimédien.

Remarque (corps non-archimédiens)**.** Voici deux façons d'obtenir un corps non-archimédien :
– par l'algèbre, ordonner le corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(X)$ en posant X incommensurable à 1 ;
– par la logique, introduire des infinitésimaux dans une extension de $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (partie entière)**.** Grâce à l'archimédianité de $\mathbb{R}$, la fonction suivante a un sens. À $x \in \mathbb{R}$, on associe le plus petit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. On note $E(x) = n$ (partie entière de x).

a) Tracer le graphe de la partie entière.

b) Montrer que E est une fonction croissante.

c) Montrer que E est sur-additive : $E(x+y) \geq E(x) + E(y)$.

d) Montrer que si $n \in \mathbb{N}_{>0}$, alors $E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Exercice 7 ($\mathbb{Q}$ n'est pas complet)**.** Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, par exemple avec la série $\sum \frac{1}{n!}$.

Exercice 8 ($\mathbb{R}$ est complet)**.** Montrer que $\mathbb{R}$ est complet.

Exercice 9. Montrer que les propriétés suivantes de $\mathbb{R}$ sont équivalentes (démontrer qu'elles s'impliquent mutuellement sans dire "elles sont vraies") :
– $\mathbb{R}$ satisfait le principe de la borne supérieure ;
– $\mathbb{R}$ satisfait le principe de la borne inférieure ;
– si (a_n) est une suite croissante, (b_n) une suite décroissante, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq c \leq b_n$;
– $\mathbb{R}$ est archimédien et complet.

3 Pour aller plus loin

Exercice 10. On ordonne $\mathbb{R}^2$ par l'ordre lexicographique (celui du dictionnaire). Montrer qu'il n'existe pas d'application croissante de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11 (unicité de $\mathbb{R}$)**.** Montrer que $\mathbb{R}$ est l'unique corps totalement ordonné satisfaisant le principe de la borne supérieure : on montrera que si $\mathbb{K}$ en est un autre, il existe un unique isomorphisme de corps ordonné (isomorphisme de corps qui est croissant) entre $\mathbb{K}$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (construction de Dedekind)**.** Cet exercice propose une construction alternative de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. Une coupure de $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{Q}$ ayant les propriétés suivantes :
– $A \neq \emptyset$;
– $(\forall q \in A)(\forall q' \in \mathbb{Q})(q' < q \Rightarrow q' \in A)$;
– $(\forall q \in A)(\exists q' \in A)(q < q')$

On note (dans cet exercice !) $\mathbb{R}$ l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$.

a) Soit $q \in \mathbb{Q}$. Montrer que $A_q = \{p \in \mathbb{Q} : p < q\}$ est une coupure.

b) Montrer que $A_{\sqrt{2}} = \{p \in \mathbb{Q} : p^2 < 2\}$ est une coupure qui n'est de la forme A_q pour aucun $q \in \mathbb{Q}$.

c) On ordonne $\mathbb{R}$ par : $A <_{\mathbb{R}} B$ si $A \subsetneq B$. Montrer que $<_{\mathbb{R}}$ est une relation d'ordre total. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

d) Montrer que toute partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. On pourra prendre une famille majorée $\mathcal{F}$ de coupures, et montrer que $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ est encore une coupure.

e) Soient A et B deux coupures. Montrer que $\{a+b : (a,b) \in A \times B\}$ est encore une coupure.
On pose $A +_{\mathbb{R}} B = \{a+b : (a,b) \in A \times B\}$.

f) Montrer que cette loi est associative et commutative. Montrer que $0_{\mathbb{R}} = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ joue le rôle d'élément neutre.

g) Pour $A \in \mathbb{R}$, soit $-A = \{q \in \mathbb{Q} : (\exists p > q)(-p \notin A)\}$. Montrer que $-A$ est une coupure.

h) Montrer que $A + (-A) = 0_{\mathbb{R}}$.
$\mathbb{R}$ est ainsi un groupe abélien. On peut montrer que l'ordre est compatible avec l'addition ; on peut aussi définir la multiplication, mais cela devient franchement technique.