2M360 : Topologie et Calcul Différentiel
Livret d'exercices (première partie)

Jussieu, 2015

Table des matières

I Espaces métriques

I.1 Assimilation du cours

Exercice 1.— Écrire à l'aide de quantificateurs : (1) O est un ouvert de X ; (2) la caractérisation métrique de l'intérieur d'une partie E de X ; (3) la caractérisation métrique de l'adhérence d'une partie E ; (4) la définition de la frontière ; (5) E est dense dans X ; (6) E est d'intérieur vide dans X ; (7) la définition d'une suite convergente.

Exercice 2.— Montrer que toute boule ouverte est un ouvert de X. (Indication : voir le poly).

Exercice 3.— Donner un exemple, dans le plan $\mathbb{R}^2$, d'une famille de parties ouvertes dont l'intersection n'est pas ouvertes.

Exercice 4.— Montrer que toute application lipschitzienne est continue.

Exercice 5.— Montrer que l'union d'un nombre fini de parties fermées et une partie fermée. Montrer que l'intersection d'une famille quelconque (finie ou infinie) de parties fermées est une partie fermée.

Exercice 6.—(caractérisation métrique de l'adhérence) Montrer qu'un point x appartient à l'adhérence de E si et seulement si toute boule ouverte centrée en x rencontre E.

Exercice 7.— Montrer qu'une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est continue si et seulement si l'image réciproque de toute partie fermée de Y est une partie fermée de X.

Exercice 8.—

1. Donner une caractérisation métrique de la frontière de E.

2. Montrer que $\mathrm{Fr}(E) = \mathrm{Fr}(X \setminus E)$.

3. Montrer que $\mathrm{Adhe}(X \setminus E) = X \setminus \mathrm{Inte}(E)$. En déduire une autre expression pour la frontière de E.

Exercice 9.— (unicité de la limite) Montrer que si une suite (x_n) converge à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2 alors $\ell_1 = \ell_2$.

Exercice 10.— Donner une preuve séquentielle de la continuité de la composée de deux applications continues.

Exercice 11.— Dans le plan $X = \mathbb{R}^2$, on considère le sous-espace métrique $Y = (]0,1]^2, d_2)$.

1. Donner un exemple de boule de Y qui n'est pas une boule de X.

2. Donner un exemple de partie ouverte de Y qui n'est pas une partie ouverte de X.

3. On considère la suite $((1/n, 1/n))_{n>0}$. Est-elle convergente ? justifier votre réponse par une preuve.

Exercice 12.— Soit $\Phi : X \to Y$ un homéomorphisme. Vérifier que :

1. $\Phi(O)$ est ouvert si et seulement si O est ouvert,

2. $\Phi(F)$ est fermé si et seulement si F est fermé,

3. l'intérieur de l'image par Φ d'un ensemble E est égal à l'image de l'intérieur de E,

4. l'adhérence de l'image est égale à l'image de l'adhérence,

5. l'image d'une suite convergeant vers x est une suite convergeant vers $\Phi(x)$,

---

I.2 Exercices de niveau attendu

Exercice 13.—

1. Soit O un ouvert du plan. A-t-on nécessairement $\mathrm{Inte}(\mathrm{Adhe}(O)) = O$?

2. Soient E, F deux parties du plan. A-t-on nécessairement $\mathrm{Inte}(E \cup F) = \mathrm{Inte}(E) \cup \mathrm{Inte}(F)$?

3. Donner un exemple de partie A du plan qui est contenue strictement dans sa frontière.

4. Une partie du plan est-elle toujours ouverte ou fermée ?

5. Donner un exemple de partie X du plan contenant un point x avec la propriété suivante : l'adhérence de la boule ouverte $B_1(x)$ n'est pas la boule fermée $B_1^f(x) := \{y \in X \mid d(x,y) \leq 1\}$.

Exercice 14.— Trouver une fonction continue et un ouvert $O \subseteq X$ tels que $f(O) \subseteq Y$ ne soit pas ouvert. Même question avec un fermé.

Exercice 15.—

1. Montrer que les solutions du système d'inéquations $x + 2y > 0$ et $y^2 > x$ forment un ouvert du plan.

2. Montrer que tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^N$ est fermé dans $\mathbb{R}^N$. Que pensez-vous de l'intérieur de F ?

Exercice 16.— Montrer que si Y est une partie fermée bornée non vide de $\mathbb{R}$, alors il existe deux éléments a, b **dans** Y tels que $Y \subset [a, b]$.

Exercice 17.— (Continuité par morceaux) Soient (X, d) un espace métrique, et F_1, F_2 deux fermés de X qui recouvrent X (c'est-à-dire que $F_1 \cup F_2 = X$). Soient Y un autre espace métrique, et $f : X \to Y$ une application.

1. On suppose que les restrictions $f_{|F_1} : F_1 \to Y$ et $f_{|F_2} : F_2 \to Y$ sont continues. Montrer que f est continue.

2. Montrer que cette propriété devient fausse si l'on ne suppose pas que F_1 et F_2 sont fermés.

Exercice 18.—(Espaces produits)

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On veut munir d'une distance le produit

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Pour cela, on considère les applications d_1, d_2, d_∞ définies par

$$d_1((x, y), (x', y')) := d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

$$d_2((x, y), (x', y')) := \left((d_X(x, x')^2 + (d_Y(y, y')^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty((x, y), (x', y')) := \max\left(d_X(x, x'), d_Y(y, y')\right).$$

1. Montrer que chacune de ces formules définie bien une distance sur $X \times Y$.

2. On veut montrer qu'une partie O de $X \times Y$ est ouverte pour la distance d_1 si et seulement si elle est ouverte pour la distance d_∞.

a. Montrer les inégalités

$$d_1(P_0, P) \leq 2d_\infty(P_0, P) \text{ et } d_\infty(P_0, P) \leq d_1(P_0, P).$$

b. En déduire que toute d_1-boule ouverte centrée en un point P_0 de $X \times Y$ contient une d_∞-boule ouverte, et réciproquement.

c. En déduire le résultat.

3. Montrer que la distance d_2 définit également les mêmes ouverts que d_1 et d_∞.

Exercice 19.—

1. Dans un espace métrique X, on considère une suite (x_n) qui converge vers un élément x et une suite (y_n) qui converge vers un élément y. Montrer que la suite des distances $(d(x_n, y_n))$ converge vers le nombre $d(x, y)$.

2. Interpréter le résultat comme une propriété de l'application distance.

Exercice 20.—

1. Dans l'espace métrique $X = C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la distance d_∞, décrire la boule ayant pour centre la fonction nulle et pour rayon 1. Plus généralement, décrire la boule de rayon ε et de centre f_0 pour un élément f_0 quelconque de X (chercher une description utilisant le graphe de la fonction f_0).

2. Soit f_0 la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=0$ si $x\leq 0$ et $f(x)=1$ si $x>0$. Déterminer explicitement un $\varepsilon>0$ tel que la boule de rayon ε et de centre f_0 ne contient aucune fonction continue.

Exercice 21.— Dans l'espace métrique $X=C_b([0,1],\mathbb{R})$ on considère la partie

$$X_0=\{f\in C_b([0,1],\mathbb{R})\ \mid f(0)=0\}.$$

1. Montrer que X_0 est une partie fermée de X.

2. Montrer que tout élément de X_0 est limite d'une suite d'éléments de son complémentaire.

3. En déduire qu'il est d'intérieur vide.

4. Montrer de même que l'ensemble $X_{\geq 0}$ des fonctions positives est fermé. (**) Déterminer son intérieur.

Exercice 22.—(distance à un sous-ensemble)

1. Rappelons qu'une fonction $f:(X,d)\to(X',d')$ est k-lipschitzienne si $\forall(x,y)\in X^2, d'(f(x),f(y))\leq kd(x,y)$. Montrer qu'une fonction k-lipschitzienne est continue.
2. Soient (X,d) un espace métrique, $A\subseteq X$ un sous-ensemble. On pose $d_A(x)=\inf_{y\in A}d(x,y)$.

   Montrer que cela a toujours un sens. Donner un exemple où la borne inférieure n'est pas atteinte.
3. Montrer que d_A est une fonction 1-lipschitzienne (donc continue).
4. Montrer que $d_A(x)=0$ si et seulement si $x\in\overline{A}$.
5. Soient F_1, F_2 fermés *disjoints*. Montrer qu'il existe des ouverts *disjoints* U_1,U_2 tels que $F_i\subseteq U_i$. (On pourra considérer $\frac{d_{F_1}}{d_{F_1}+d_{F_2}}$.)
6. Donner un exemple de fermés disjoints $F_1,F_2\subseteq\mathbb{R}^2$ tels que $\inf\{d(x,y):(x,y)\in F_1\times F_2\}=0$.

Exercice 23.—

1. Montrer que tous les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

2. Montrer que $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

3. Montrer que $[0,1]$ et $[0,1]\cup[2,3]$ ne sont pas homéomorphes.

I.3 Compléments et challenges

Espaces de matrices Soit n un entier positif. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel de dimension n^2, il s'identifie à $\mathbb{R}^{n^2}$, ce qui en fait un espace métrique lorsqu'on munit $\mathbb{R}^{n^2}$ de l'une des métriques habituelles. Par exemple, l'application

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d)$$

identifie $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^4$, et la métrique d_1 s'écrit

$$d_1(M, M') = \max\{|a - a'|, |b - b'|, |c - c'|, |d - d'|\}.$$

Exercice 24.— On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles. On rappelle aussi que l'application déterminant $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est un polynôme en les coefficients de la matrice, par exemple $\det(M) = ad - bc$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; d'autre part une matrice est inversile si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit M_0 une matrice particulière. Rappeler pourquoi il n'existe qu'un nombre fini de valeur de $t \in \mathbb{R}$ qui annule l'expression $\det(M_0 + t\mathrm{Id})$. En déduire qu'on peut trouver une suite (t_n) de réels tendant vers 0 tels que, pour tout n, la matrice $M_0 + t_n\mathrm{Id}$ est inversible. Comment s'interprète ce résultat, en termes de propriété topologique de la partie $GL_n(\mathbb{R})$?

3. Une application. On veut montrer l'identité $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$ concernant la trace (somme des termes diagonaux) d'une matrice.

a. Il est assez facile de voir que la trace d'une matrice est invariante par conjugaison : autrement dit, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}(PMP^{-1}) = \mathrm{Tr}(M)$ (ceci vient par exemple du fait que le polynôme caractéristique d'une matrice est invariant par conjugaison ; mais admettons ce fait). En déduire que l'identité recherchée est vraie lorsque la matrice M est inversible.

b. Utiliser la question 2 pour en déduire que l'identité est encore vraie lorsque N n'est pas inversible.

Exercice 25.— **1.** Soit $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant 1. Montrer que c'est un ensemble fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Même question pour l'ensemble $SO_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales, c'est-à-dire telles que $MM^t = \mathrm{Id}$.

Exercice 26.—(La distance de Hausdorff est une distance !) Soit (X, d) un espace métrique. On considère l'ensemble $\mathcal{F}(X)$ des parties fermées bornées non vides de X. On le munit de la distance de Hausdorff définie par la formule

$$d_{\mathrm{Hausdorff}}(E_1, E_2) = \inf\{r > 0 \mid E_1 \subset V(E_2, r) \text{ et } E_2 \subset V(E_1, r)\}$$

où

$$V(E, r) = \{x \in X \mid \exists y \in E, d(x, y) < r\}$$

est le r-voisinage de E (voir le poly, section c des commentaires sur la complétude). On voudrait montrer que les axiomes de distances sont bien vérifiés. La symétrie est évidente...

1. Soient E_1, E_2 des fermés bornés non vides tels que $d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_2) = 0$. Supposons qu'il existe un point x de E_1 qui n'est pas dans E_2. Construire une suite de points de E_2 qui converge vers x. Qu'en déduit-on ? Montrer que la distance de Hausdorff vérifie l'axiome de séparation.

2. On voudrait maintenant démontrer l'inégalité triangulaire. On considère trois ensemble fermés bornés non vides E_1, E_2, E_3. On note $d_{12} = d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_2)$, $d_{23} = d_{\text{Hausdorff}}(E_2, E_3)$, on se donne un $\varepsilon > 0$.

Soit x un point de E_1. Trouver un point z de E_3 tel que $d(x, z) < d_{12} + d_{23} + 2\varepsilon$. Qu'a-t-on montré, en termes de r-voisinages où $r = d_{12} + d_{23} + 2\varepsilon$? En déduire que $d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_3) \leq r$. Conclure.

II Complétude

II.1 Assimilation du cours

Exercice 27.— Écrire la définition d'une suite de Cauchy.

Exercice 28.— On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_n = \log(n)$.
1. Calculer la limite de la suite $d(u_{n+1}, u_n)$.
2. La suite (u_n) est-elle de Cauchy ?

Exercice 29.— Montrer que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas complet. On donnera trois arguments différents :
1. à l'aide de la proposition sur les sous-espaces métriques,
2. à l'aide de la propriété disant qu'une suite convergente est de Cauchy,
3. en utilisant juste la définition d'une suite de Cauchy.

Exercice 30.— Écrire la version duale du théorème de Baire, concernant les fermés de X.

II.2 Exercices de niveau attendu

Exercice 31.—
1. Soit (x_n) une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{1}{n}.$$

Montrer qu'elle est de Cauchy.
2. Plus généralement, montrer qu'une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si il existe une suite (ε_n) de nombres réels positifs, qui tend vers 0, et telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon_n.$$

Exercice 32.— Soit (x_n) une suite de Cauchy dans un espace métrique X, (y_n) une autre suite dans X, on suppose que la suite réelle $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Montrer que la suite (y_n) est aussi une suite de Cauchy.

Exercice 33.— Soit (X, d) un espace métrique. Pour une suite (x_n) d'éléments de X, on s'intéresse à la propriété :

$$(*) : \quad \forall n \in \mathbb{N}\ d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}.$$

1. Montrer qu'une suite satisfaisant $(*)$ est de Cauchy.
2. Montrer que si (x_n) est de Cauchy, elle a une sous-suite satisfaisant $(*)$.
3. Montrer que E est complet ssi toute suite ayant $(*)$ converge.

Exercice 34.— Montrer que toute série réelle absolument convergente est convergente.

Exercice 35.— Soit Φ un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et l'intervalle $]0,1[$; on peut par exemple prendre

$$\Phi(t) = \frac{2}{\pi} \arctan(t).$$

Soit d la distance définie sur $\mathbb{R}$ en "transportant la distance de $]0,1[$ par Φ^{-1}", c'est-à-dire définie par

$$d(x,y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|\,.$$

1. Rappeler pourquoi $]0,1[$, muni de la distance usuelle, n'est pas complet. En déduire que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

2. La distance d définit-elle les mêmes ouverts que la distance usuelle sur $\mathbb{R}$?

Exercice 36.— On considère une application $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ qui est de la forme $x \mapsto x + \Phi(x)$ où $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application qui est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne.

1. Montrer que T est bijective. *Indication : transformer le problème en une recherche de point fixe... En cas de panne on pourra comparer à l'exercice 21 du poly de calcul différentiel.*

2. Montrer que T est un homéomorphisme (on pourra montrer que l'inverse de T est lipschitzienne).

Exercice 37.— Soit (X,d) un espace métrique complet et $f\colon X \to X$ une application telle qu'il existe $k \in]0,1[$ et $p \geq 1$ tels que f^p, la composée p fois de f, soit k-lipschitzienne. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 38.—(Examen deuxième session 2014-2015)

1. L'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $[-1,1]$, muni de la "norme sup" définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|\,,$$

est-il complet ? Justifier votre réponse en vous appuyant sur le cours.

2. Soit $\Phi : [-1,1] \to [-1,1]$ une fonction de classe C^1 vérifiant $\forall t \in [-1,1], |\Phi'(t)| < 1$. Montrer qu'il existe un nombre $C \in [0,1[$ tel que, pour tous $x, y \in [-1,1]$,

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq C\,|x-y|\,.$$

3. Sous les mêmes hypothèses, montrer qu'il existe une unique fonction f : $[-1,1] \to [-1,1]$, continue, et telle que pour tout $t \in [-1,1]$,

$$f(t) = t\Phi(f(t)).$$

4. (Question optionnelle) Montrer que la fonction f trouvée à la question précédente vérifie

$$\|f\|_\infty \leq |\Phi(0)| \sum_{n\geq 0} C^n$$

où C est le nombre obtenu à la question 2.

II.3 Compléments et challenges

Exercice 39.—(Théorème de prolongement) Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. On suppose que (Y,δ) est complet, et on considère une partie $A \subset X$ dense dans X. Soit $f\colon A \to Y$ une fonction uniformément continue.

Montrer qu'il existe une unique fonction continue $g\colon X \to Y$ qui prolonge f, et vérifier que g est uniformément continue.

Exercice 40.— Rédiger une démonstration complète du théorème de Baire (voir le poly).

Exercice 41.— On munit $X = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ de la distance

$$d_1(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)| dt.$$

1. Montrer que d_1 est effectivement une distance sur X.
2. On définit la fonction $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = 1$ si $x \geq \frac{1}{n}$, $f_n(x) = -1$ si $x \leq -\frac{1}{n}$, et $f_n(x) = nx$ si $x \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X,d_1).
3. Montrer que (X,d_1) n'est pas complet.

III Compacité

III.1 Assimilation du cours

Exercice 42.—

1. Donner un exemple de suite réelle ayant deux valeurs d'adhérence. Représenter cette suite sur un dessin.

2. Donner un exemple de suite réelle ayant une seule valeur d'adhérence, mais admettant une sous-suite qui tend vers $+\infty$. Faire un dessin. Cette suite est-elle convergente ?

Exercice 43.—(Examen deuxième session 2014-2015, extrait)

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que la suite $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers $+\infty$.

1. Ecrire l'hypothèse à l'aide de quantificateurs.

2. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite bornée.

3. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite convergente.

Exercice 44.— Montrer que l'application $x \mapsto x^2$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n'est pas uniformément continue.

Exercice 45.— Montrer que les espaces $[0, 1]$ et $]0, 1]$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 46.— Soient K et L deux parties compactes d'un espace métrique X. Montrer que $K \cup L$ est une partie compacte.

III.2 Exercices de niveau attendu

Exercice 47.— Dans un espace métrique compact, montrer que toute suite ayant une unique valeur d'adhérence est convergente.

Exercice 48.— Montrer que dans tout espace métrique, une suite de Cauchy ayant au moins une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence. En déduire que tout espace métrique compact est complet.

Exercice 49.— Montrer qu'un espace métrique compact contient une partie dénombrable dense.

Exercice 50.— Montrer que la distance entre deux compacts est atteinte, c'est-à-dire : si K et K' sont deux compacts d'un espace métrique, il existe $(x, x') \in K \times K'$ vérifiant

$$d(x, x') = d(K, K') := \inf_{(y,y') \in K \times K'} d(y, y').$$

Exercice 51.— Dans un espace métrique (X, d), on considère un fermé non vide F vérifiant $F \neq X$ et un compact K non vide tel que $K \cap F = \emptyset$.

1. a. Montrer que $d(K, F) := \inf_{x \in K, y \in F} d(x, y)$ est strictement positif. **b.** Ce résultat est-il vrai si K est seulement supposé fermé ?

2. Pour $\varepsilon > 0$ on note $K_\varepsilon := \{x \in X, \quad d(x, K) < \varepsilon\}$. On considère un ouvert Ω de X tel que $K \subset \Omega$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, K_ε est un ouvert de X et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon \subset \Omega$.

Exercice 52.— Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$; ceci revient à dire que pour toute suite (x_n) dans $\mathbb{R}^N$,

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, 0) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (f(x_n)) = +\infty.$$

1. Donner des exemples d'applications vérifiant cette hypothèse, et d'applications qui ne la vérifient pas.

2. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

3. Application I. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \geq |P(x_0)|$.

4. Application II. Soit ABC un triangle dans le plan. Montrer qu'il existe un point M du plan tel que la somme des distances de M à A, B et C est minimale.

Exercice 53.— On se place dans $C_b([0, 1], \mathbb{R})$. Deux variantes au choix :

1) Soit n un entier, dessiner une fonction continue $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$, qui s'annule en dehors de l'intervalle

$$\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$$

et qui prend la valeur 1 au milieu de cet intervalle. Que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$ pour $n \neq m$? En déduire que la suite (f_n) n'a pas de valeur d'adhérence.

2) Pour tout n, soit $f_n : x \mapsto x^n$. Pour n fixé, que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$ lorsque m est très grand ? Formaliser. En déduire que cette suite n'a pas de valeur d'adhérence.

Exercice 54.— Etant donnés deux polynômes $P(X), Q(X)$ à coefficients réels, on définit $d(P, Q)$ comme le maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme $P(X) - Q(X)$. Il est facile de voir que ceci définit une distance sur l'ensemble $\mathbb{R}[X]$.

1. Calculer, pour tout entiers positifs p, q, la distance de 0 au polynôme X^p, puis la distance entre les deux polynômes X^p et X^q.

2. En déduire que la suite $(X^p)_{p\geq 0}$ d'élements de $\mathbb{R}[X]$ est bornée mais n'admet pas de sous-suite convergente.

3. Montrer que, dans cet espace métrique, la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 n'est pas compacte.

Exercice 55.—(partiel 2012) Soit X un espace métrique compact, et A une partie de X. On suppose que A est *localement finie* : pour tout point x de X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(x, \varepsilon)$ ne contient qu'un nombre fini de points de A.

1. Montrer que A ne contient qu'un nombre fini de points.

2. (*) Montrer que le résultat ne tient plus si, dans la définition de "localement fini", on remplace "pour tout point x de X" par "pour tout point x de A".

Exercice 56.— Trouver l'erreur dans la réponse suivante à la première question de l'exercice précédent. *Par hypothèse, pour tout x de X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $B(x, \varepsilon) \cap A$ ne contient qu'un nombre fini de points. Par compacité, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules $B(x_1, \varepsilon), \dots, B(x_k, \varepsilon)$. On a*

$$A \subset A \cap B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup A \cap B(x_k, \varepsilon)$$

et puisque A est une réunion finie d'ensembles finis, il ne contient qu'un nombre fini de points.

III.3 Compléments et challenges

Exercice 57.— Montrer que l'ensemble des fonctions continues et affines par morceaux est dense dans $(C([0,1], \mathbb{R}), d_\infty)$. *Aide : utiliser la continuité uniforme.*

Exercice 58.— (Une autre preuve du lemme de Lebesgue) On se place sous les hypothèses du lemme de Lebesgue, c'est-à-dire qu'on considère un recouvrement d'un espace métrique compact X par des ouverts U_i. Pour chaque $x \in X$, on pose

$$R(x) = \sup\{r > 0, \exists i \in I, B(x, r) \subset U_i\}.$$

Faire un dessin. Montrer que cette formule définit une fonction de X dans $]0, +\infty[$, et que cette fonction est continue (elle est même 1-lipschiptzienne). En déduire une nouvelle preuve du lemme.

Exercice 59.—(produit infini d'espaces compacts) Soit X un espace métrique compact. On munit l'ensemble $X^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \to X\}$ de la distance suivante :

$$\delta(u, v) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} \min(1, d(u(k), v(k)))$$

1. Vérifier que δ est effectivement une distance.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $X^{\mathbb{N}}$ et soit $u \in X^{\mathbb{N}}$. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \delta(u_n, u) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} d(u_n(k), u(k)) = 0.$$

3. Montrer que $(X^{\mathbb{N}}, \delta)$ est compact.
4. Montrer que U est un ouvert de $(X^{\mathbb{N}}, \delta)$ si et seulement si pour tout x dans U, il existe une partie finie $J \subset \mathbb{N}$ et un réel strictement positif α vérifiant :

$$\forall y \in X^{\mathbb{N}}, \forall j \in J, \quad d(y(j), x(j)) < \alpha \Rightarrow y \in U.$$

IV Connexité

IV.1 Assimilation du cours

Exercice 60.—

1. Montrer que l'image d'un espace métrique connexe par arcs par une application continue est un espace métrique connexe par arcs *(indication : on commencera par introduire des notations et préciser les hypothèses)*.

2. En déduire que si la connexité par arcs est une propriété invariante par homéomorphisme *(même indication)*.

Exercice 61.— Montrer que la réunion de deux parties connexes par arcs, d'intersection non vide, est connexe par arcs.

Exercice 62.— (critère pratique de connexité) La caractérisation suivante de la connexité est très utile : *Un espace métrique X est connexe si et seulement si toute fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante.* Démontrer cette caractérisation.

IV.2 Exercices de niveau standard

Exercice 63.— Montrer que le graphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I est une partie connexe par arcs du plan.

Exercice 64.— Soit X le graphe de la fonction $x \mapsto 1/x$, de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$. Montrer que X n'est pas connexe.

Exercice 65.—

1. Montrer que $[0, 1]$ n'est pas homéomorphe au cercle unité du plan. *(Aide : enlever un point, et utiliser la connexité...)*

2. Montrer, avec la même méthode, que la droite $\mathbb{R}$ et le plan $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 66.— (Version en dimension un du théorème de Borsuk-Ulam). On note $\mathbb{S}^1$ le cercle unité de centre 0 dans le plan ; on le voit comme un sous-espace métrique du plan. Soit f une application continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux points du cercle, diamétralement opposés, qui ont la même image par f. *Aide : utiliser la connexité du cercle et la fonction auxiliaire définie par $g(v) = f(v) - f(-v)$ (noter que v et $-v$ sont diamétralement opposés).*

Exercice 67.—(Examen deuxième session 2014-2015, extrait) La réunion de deux parties connexes par arcs *disjointes* peut-elle être connexe par arcs ? On justifiera la réponse par une démonstration ou un exemple.

Exercice 68.— Montrer que l'adhérence d'une partie connexe est connexe *(indication : utiliser le bon critère... Voir le poly !)*

IV.3 Compléments et challenges

Exercice 69.— Montrer qu'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

Exercice 70.— On note A le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ sur l'intervalle du type $]0, \pi]$.

1. Montrer que sur n'importe quel intervalle du type $[1/(a+2\pi), 1/a]$, la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ prend toutes les valeurs entre 0 et 1. Dessiner le graphe au-dessus d'un intervalle de ce type lorsque x est très proche de 0.

2. Montrer que $\bar{A} = A \cup \{(0,0)\} \times [-1,1]$.

3. Montrer que A est connexe par arcs. En déduire que $\bar{A}$ est connexe.

4. Pour montrer que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs, on raisonne par l'absurde, en considérant un chemin $\gamma : [0,1]\ to \bar{A}$ allant du point du graphe d'absisse π à un point $(0,0)$ du segment vertical ; on note $\gamma_x(t), \gamma_y(t)$ les coordonnées du point $\gamma(t)$ dans le plan.

a. Montrer qu'il existe $\tau \geq 0$ tel que le point $\gamma(t) = (0, y_0)$ est sur le segment vertical mais tous les points $\gamma(t)$ avec $t < \tau$ sont sur le graphe.

b. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, et $x = \gamma_x(\tau - \varepsilon)$. Montrer qu'il existe $t \in [\tau - \varepsilon, t_0]$ tel que

$$\frac{1}{\gamma_x(t)} = \frac{1}{x} + 2\pi.$$

c. En déduire que pour tout point $(0, \alpha)$ du segment, il existe une suite (t_n) décroissante et convergeant vers τ telle que la suite $(\gamma_y(t_n))$ converge vers $(0, \alpha)$.

d. Conclure en montrant que γ ne satisfait pas le critère de continuité séquentiel en τ.

Exercice 71.— Montrer qu'une intersection décroissante de compacts connexes est connexe *(indication : voir la recette de preuve dans le poly)*.

V Espaces vectoriels normés

V.1 Assimilation du cours

Exercice 72.— Montrer que les boules d'un espace vectoriel normé E sont convexes : si C est un point de E, r un réel strictement positif, et P, Q deux points de la boule $B(C, r)$, alors tout point M du segment $[P, Q]$ est encore dans $B(C, r)$. *Indication : on pourra commencer par le cas où $C = 0$ et $r = 1$.*

Exercice 73.— On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|_\infty$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver par un calcul direct un nombre m tel que, pour tout vecteur x, $\|Ax\|_\infty \leq m \|x\|_\infty$.

2. Trouver un vecteur x, de norme 1, pour lequel l'inégalité précédente est une égalité.

3. En déduire la norme matricielle de A.

Exercice 74.— Soit M un élement de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, où N est un entier strictement positif. Montrer que la formule

$$\Phi(M) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} M^{2n}$$

définit un autre élément de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

V.2 Exercices de niveau standard

Exercice 75.— **1.** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. En considérant le produit cartésien $E \times F$ comme un espace vectoriel, montrer que $\max(\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F)$ est une norme sur $E \times F$.

2. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites convergentes dans $E, \|.\|$. **a.** Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est convergente. **b.** Si (λ_n) est une suite convergente de réels, montrer que la suite $(\lambda_n u_n)$ converge. **c.** Ces deux résultats s'interprètent en disant que deux application sont continues, de quelles applications s'agit-il ?

3. **a.** Montrer, pour tout $x, y \in E$, l'inégalité

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

b. Ici encore, interpréter cette inégalité en termes d'application lipschitzienne.

Exercice 76.—(Transport de norme) Soit $f : E \to F$ une application linéaire et N une norme sur F. A quelle condition l'application $N \circ f$ est-elle une norme sur E ?

Exercice 77.—Soit E un espace vectoriel normé, $P \in E$ et $r > 0$. Démontrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(P, r)$ est la boule fermée $B_f(P, r)$.

Exercice 78.—

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_\infty$. Déterminer la norme associée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. *Indication : il s'agit de généraliser l'exercice 73, en reprendre la démarche.*

2. On munit maintenant $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_2$. Démontrer que la norme d'une matrice A symétrique (${}^{\mathrm{t}}A = A$) est égale à son *rayon spectral* $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} |\lambda|$ où $\mathrm{Spec}(A)$ désigne le *spectre* de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de la matrice A.

Exercice 79.— Soit $L : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés.

1. On suppose que L est bornée sur une boule $B(0, r)$ de centre 0. Montrer que L est bornée sur la boule $B(0, 1)$.

2. Sous les mêmes hypothèses, en déduire que L est lipschitzienne.

3. Réciproquement, montrer que si L est continue, alors elle est bornée sur une certaine boule centrée en 0.

V.3 Compléments et challenges

Exercice 80.—

1. Rappeler pourquoi la boule unité fermée est compacte dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.

2. En utilisant l'équivalence des normes, en déduire que c'est encore le cas lorsqu'on muni $\mathbb{R}^N$ d'une norme quelconque.

3. Montrer le théorème de Riesz : si E est un espace vectoriel normé dans lequel la boule unité fermée $B^f(0, 1)$ est compacte, alors il est de dimension finie. *Aide : voir le poly.*

Exercice 81.— (Hyperplans et formes linéaires) Soit E un espace vectoriel normé et H un *hyperplan* de E, c'est-à-dire le noyau $\ker \varphi$ d'une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ non nulle. Montrer l'alternative suivante :

— soit φ est continue et H fermé dans E,

— soit φ n'est pas continue et H dense dans E.

Indication : si φ n'est pas continue, construire une suite (y_n) d'éléments de E qui converge vers 0 et vérifiant $\varphi(y_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

VI Différentielle, dérivées partielles, gradient

VI.1 Assimilation du cours

Exercice 82.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{xy} - 2e^2xy$. Calculer, pour tout vecteur $\overrightarrow{v} = (h,k)$, le nombre $Df(2,1).\overrightarrow{v}$.

Exercice 83.—

1. Montrer que l'application "produit" $(x,y) \mapsto xy$, définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et donner sa différentielle en un point (x,y).

2. Plus généralement, montrer que l'application "produit scalaire" $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$, définie de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, est différentiable sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et donner sa différentielle.

Exercice 84.— Calculer la différentielle de l'application $f \mapsto \int_0^1 (f(t))^2 dt$, définie de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, en un point α quelconque.

Exercice 85.— Montrer l'unicité de la différentielle en un point. *On pourra suivre les indications du poly.*

VI.2 Exercices de niveau standard

Exercice 86.—

1. Soit $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^m$ une courbe paramétrée dérivable. Rappeler la formule pour la dérivée de $g \circ \gamma$ en $t = 0$ en terme de gradient de g.

2. On suppose maintenant que g admet un maximum local en un point P_0, et que $\gamma(0) = P_0$. Montrer que le gradient de g s'annule au point P_0. *Indication : on pourra utiliser le résultat pour les fonctions d'une variable : si $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ admet un maximum en $t = 0$ alors $f'(0) = 0$; voir aussi le poly.*

3. Soit $f : O \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable sur un ouvert O de $\mathbb{R}^m$. On suppose que le gradient de f s'annule sur O.

a. On suppose d'abord que O est une boule ouverte. Montrer que f est constante sur O. *Indication : on pourra énoncer et utiliser le résultat pour les fonctions d'une variable, ainsi que la convexité des boules ouvertes.*

b. En déduire le cas où O est un ouvert connexe.

Exercice 87.—(Examen deuxième session 2014-2015) On considère une application $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f est différentiable en 0.

1. (Question de cours) Compléter la phrase suivante :

Puisque f est différentiable en 0 et $f(0) = 0$, on peut écrire, pour tout $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^N$,

$$f(\overrightarrow{h}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

avec $o(\overrightarrow{h})$ négligeable devant $\overrightarrow{h}$, ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad .$$

Pour chaque entier $n > 0$, on définit une application $g_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ par la formule

$$g_n(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right).$$

2. On se donne un point x de $\mathbb{R}^N$. Déterminer la limite de la suite $(g_n(x))_{n>0}$.

3. Soit $R > 0$. Montrer que la convergence de la question précédente est uniforme sur la boule $B(0, R)$ de $\mathbb{R}^N$.

VI.3 Compléments et challenges

Exemple IV : inversion de matrice Pour toute matrice H de norme matricielle $\|H\| < 1$, la matrice $\mathrm{Id} + H$ est inversible et on a

$$(\mathrm{Id} + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-H)^k = \mathrm{Id} - H + o(H)$$

en posant

$$o(H) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-H)^k.$$

Exercice 88.—

1. On admet provisoirement que $o(H)$ est négligeable devant H. Interpréter très précisément ce qu précède en terme de différentielle de l'application $M \mapsto M^{-1}$.

2. Pour montrer que $o(H)$ est négligeable devant H, majorer la norme de $o(H)$, par exemple pour tout $\|H\| < \frac{1}{2}$. On commencera par mettre H^2 en facteur.